

УДК 519.676

Использование модификаций метода максимального сечения для моделирования систем со случайной структурой с распределенными переходами*

Т.А. Аверина^{1,2}

¹Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

²Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090
E-mail: ata@osmf.sccc.ru

Аверина Т.А. Использование модификаций метода максимального сечения для моделирования систем со случайной структурой с распределенными переходами // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2016. — Т. 19, № 3. — С. 235–247.

В данной работе рассматриваются системы со случайной структурой с распределенными переходами. Доказана теорема о виде условных распределений процесса номера структуры. Для моделирования этих распределений построен статистический алгоритм, использующий рандомизированный метод максимального сечения. Также построена модифицированная версия этого алгоритма с использованием моделирования по одному случайному числу. Построенные алгоритмы использованы для моделирования численного решения систем со случайной структурой с распределенными переходами. Доказана теорема о слабой сходимости численного решения, полученного с помощью разработанных алгоритмов.

DOI: 10.15372/SJNM20160301

Ключевые слова: статистическое моделирование, системы со случайной структурой, стохастические дифференциальные уравнения, пуассоновский поток, метод “максимального сечения”.

Averina T.A. Using a randomized method of a maximum cross-section for simulating random structure systems with distributed transitions // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2016. — Vol. 19, № 3. — P. 235–247.

In this paper we consider the random structure systems with distributed transitions. A theorem about the form of conditional structure distributions has been proved. To simulate these distributions a statistical algorithm using a randomized method of maximum cross-section is constructed. Also, a modified version of this algorithm using the simulation of one random number has been constructed. The algorithms developed were used for the simulation of the numerical solution of random structure systems with distributed transitions. The theorem about a weak convergence of the numerical solution, obtained by the algorithms developed has been proved.

Keywords: statistical simulation, systems with a random structure, stochastic differential equations, Poisson flow, numerical methods, maximum cross-section method.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов “Научные школы” НШ-9049.2016.1 и РФФИ (проект № 14-01-0078).

1. Введение

Под *системами со случайной структурой* понимаются динамические системы, поведение которых на случайных интервалах времени характеризуется различными структурами и описывается различными уравнениями [1, 2].

Состояние системы со случайной структурой характеризуется смешанным процессом $[\mathbf{y}(t), s(t)]^\top$, где $s(t)$ — дискретный случайный процесс с конечным множеством состояний $\{1, 2, \dots, S\}$, S — число структур системы, а $\mathbf{y}(t)$ — d -мерный случайный процесс, описываемый при условии $s(t) = l$ стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ) в смысле Ито или в смысле Стратоновича [1, 3]:

$$d\mathbf{y}(t) = a^{(l)}(t, \mathbf{y}(t)) dt + \sigma^{(l)}(t, \mathbf{y}(t)) d\mathbf{w}(t), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0. \quad (1)$$

Здесь $t \in [t_0, T]$; $\mathbf{w}(t)$ — m -мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от \mathbf{y}_0 ; $a^{(l)}(t, \mathbf{y}) : [t_0, T] \times R^d \rightarrow R^d$ — вектор-функция размера d ; $\sigma^{(l)}(t, \mathbf{y}) : [t_0, T] \times R^d \rightarrow R^{d \times m}$ — матричная функция размера $d \times m$; l — номер структуры, $l = 1, 2, \dots, S$. Случайный процесс $s(t)$ может быть произвольным немарковским, марковским или условным марковским, зависящим от вектора $\mathbf{y}(t)$.

2. Системы со случайной структурой с независимыми распределенными переходами

Рассмотрим систему со случайной структурой с распределенными переходами, т. е. когда процесс смены структуры $s(t)$ является дискретным марковским процессом [3], принимающим целочисленные значения $1, \dots, S$, и вероятность перехода из l -й структуры к r -й за малый интервал Δt имеет вид

$$\begin{aligned} P(s(t + \Delta t) = r \mid s(t) = l) &= \nu_{lr}(t)\Delta t + o(\Delta t), \quad l, r = 1, 2, \dots, S, \quad r \neq l, \\ P(s(t + \Delta t) = l \mid s(t) = l) &= 1 - \nu_l(t)\Delta t + o(\Delta t), \quad \nu_l(t) = \sum_{r=1 \neq l}^S \nu_{lr}(t), \\ s(t_0) &= s_0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $o(\Delta t)/\Delta t \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$; $\nu_{lr}(t) : [t_0, T] \rightarrow [0, +\infty)$ называются *интенсивностью перехода* из l -й структуры к r -й, а $\nu_l(t)$ — *суммарной интенсивностью перехода* из l -й структуры.

Условие (2) обеспечивает отсутствие нескольких переключений процесса $s(t)$ за малый интервал времени Δt . Моменты смены структуры представляют пуассоновский поток. Поэтому алгоритмы статистического моделирования пуассоновских точечных полей, предложенные в работах [4–7], можно использовать для моделирования моментов смены структуры.

Напомним, что обобщенное экспоненциальное распределение случайной величины ξ с функцией интенсивности λ имеет вид

$$p_\xi(x) = \lambda(x)e^{-\int_0^x \lambda(u) du}, \quad x > 0, \quad \lambda(x) \geq 0, \quad \int_0^\infty \lambda(u) du = +\infty. \quad (3)$$

При условии $s(t) = l$ промежутки τ_{lr} времен перехода из l -й к r -й структуре имеют обобщенное экспоненциальное распределение с плотностями

$$p_{\tau_{lr}}(x) = \nu_{lr}(t+x)e^{-\int_0^x \nu_{lr}(t+u) du}, \quad x > 0, \quad l, r = 1, 2, \dots, S, \quad r \neq l, \quad (4)$$

и смена структуры происходит в момент времени $\tilde{t} = t + \tau_0$, где

$$\tau_0 = \min_{r \neq l} \tau_{lr}. \quad (5)$$

Теорема 1. Пусть задана система со случайной структурой (1) с независимыми распределенными переходами (2) и τ_{lr} , $r = 1, 2, \dots, S$, $r \neq l$, — промежутки времен перехода из l -й к r -й структуре, распределенные при условии $s(t) = l$ с плотностями (4). Тогда, при условии $s(t) = l$:

- 1) случайная величина τ_0 (5) имеет обобщенное экспоненциальное распределение с плотностью

$$p_{\tau_0}(\tau) = \nu_l(t+\tau)e^{-\int_0^\tau \nu_l(t+u) du}, \quad \tau > 0; \quad (6)$$

- 2) номер новой структуры $s(t+\tau_0)$ является случайной величиной η , для которой

$$P(\eta = r | \tau_0 = \tau) = \frac{\nu_{lr}(t+\tau)}{\nu_l(t+\tau)}, \quad r = 1, 2, \dots, S, \quad r \neq l. \quad (7)$$

Доказательство. Функция распределения случайной величины τ_0 при условии $s(t) = l$ имеет вид

$$F_{\tau_0}(x) = P(\tau_0 < x) = 1 - P(\tau_0 > x) = 1 - e^{-\int_0^x \nu_l(t+u) du},$$

так как

$$\begin{aligned} P(\tau_0 > x) &= P(\tau_{l1} > x, \tau_{l2} > x, \dots, \tau_{l,l-1} > x, \tau_{l,l+1} > x, \dots, \tau_{lS} > x) \\ &= \prod_{r=1 \neq l}^S P(\tau_{lr} > x) = \prod_{r=1 \neq l}^S e^{-\int_0^x \nu_{lr}(t+u) du} = e^{-\int_0^x \nu_l(t+u) du}. \end{aligned}$$

Дифференцируя функцию распределения по x , получаем плотность (6).

Рассмотрим совместное распределение случайной величины τ_0 и случайной величины η , задающей номер соответствующей структуры. Вероятность того, что $\eta = r$, равна

$$\begin{aligned} P(\eta = r | \tau_0 = \tau) &= P(\tau_{lr} = \tau, \tau_{li} > \tau (i = 1, \dots, S; i \neq l, i \neq r) | \tau_0 = \tau) \\ &= \frac{P(\tau_{lr} = \tau, \tau_{li} > \tau (i = 1, \dots, S; i \neq l, i \neq r))}{P(\tau_0 = \tau)} \\ &= \frac{\nu_{lr}(t+\tau)e^{-\int_0^\tau \nu_{lr}(t+u) du} \prod_{i \neq l, i \neq r}^S e^{-\int_0^\tau \nu_{li}(t+u) du}}{\nu_l(t+\tau)e^{-\int_0^\tau \nu_l(t+u) du}} = \frac{\nu_{lr}(t+\tau)}{\nu_l(t+\tau)}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. \square

Из теоремы 1 видно, что для моделирования целочисленного процесса смены структуры $s(t)$ нужно уметь моделировать:

- случайную величину с плотностью (6) (задающую время нахождения системы в текущей структуре);
- случайную величину с распределением (7) (задающую номер следующей структуры).

Если обозначим t_k — момент смены структуры, а s_k — номер новой структуры, то

$$s(t) = s_k \quad \text{при} \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad t \leq T. \quad (8)$$

3. Моделирование процесса смены структуры для систем с независимыми распределенными переходами

Рассмотрим способы моделирования требуемых распределений (6), (7). Символами $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ будем обозначать независимые случайные числа, равномерно распределенные в интервале $(0, 1)$. Моделирование с помощью “генератора” псевдослучайных чисел будем обозначать как $\alpha := \text{rand}$. В работе [10] рассмотрены различные типы “генераторов” стандартных случайных чисел.

Моделирование обобщенного экспоненциального распределения. Стандартный метод (метод обратной функции) моделирования непрерывной случайной величины ξ с функцией распределения $F(x)$:

$$\xi = F^{-1}(\alpha)$$

для обобщенного экспоненциального распределения с плотностью (6) сводится к решению уравнения

$$\int_0^\xi \nu_l(t+u) du = -\ln(\alpha). \quad (9)$$

Поэтому в случае постоянных интенсивностей перехода

$$\nu_{lr}(t) \equiv \bar{\nu}_{lr}, \quad \nu_l \equiv \bar{\nu}_l = \sum_{i \neq l}^S \bar{\nu}_{li} \quad (10)$$

моделирование времени нахождения системы в текущей структуре осуществляется по формуле

$$\tau = -\ln(\alpha)/\bar{\nu}_l. \quad (11)$$

В общем случае реализация формулы (9) может быть достаточно трудоемкой. Поэтому для моделирования распределения (6) можно использовать метод “максимального сечения” с постоянной [8–10]:

$$\nu_{lr}(t) \leq \bar{\nu}_{lr}, \quad \nu_l(t) \leq \bar{\nu}_l = \sum_{i \neq l}^S \bar{\nu}_{li}, \quad t > 0,$$

или переменной [4–7] мажорантой

$$\nu_{lr}(t) \leq \bar{\nu}_{lr}(t), \quad \nu_l(t) \leq \bar{\nu}_l(t) = \sum_{i \neq l}^S \bar{\nu}_{li}(t), \quad t > 0, \quad (12)$$

если функции $\bar{\nu}_l(t)$ вычисляются достаточно просто.

Запишем метод “максимального сечения” [7] для моделирования случайной величины τ_0 с условным распределением (6) при условии $s(t) = l$.

Пусть $\zeta_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, где ξ_k — последовательность случайных величин, распределенных с условными плотностями

$$f(x|s(t) = l, \zeta_{k-1}) = \bar{\nu}_l(t + \zeta_{k-1} + x) \exp\left(-\int_0^x \bar{\nu}_l(t + \zeta_{k-1} + s) ds\right),$$

и пусть

$$N = \min\{n : \alpha_n \leq \nu_l(t + \zeta_n)/\bar{\nu}_l(t + \zeta_n)\}, \quad \tau_0 = \zeta_N. \quad (13)$$

Тогда τ_0 имеет обобщенное экспоненциальное распределение с плотностью (6).

Метод “максимального сечения” основан на правиле прорезивания пуассоновского потока [11], оставляя точки пуассоновского потока интенсивности $\bar{\nu}_l(x)$ с вероятностью

$$p = \frac{\nu_l(x)}{\bar{\nu}_l(x)}, \quad (14)$$

мы получаем пуассоновский поток интенсивности

$$\bar{\nu}_l(x)p = \bar{\nu}_l(x) \frac{\nu_l(x)}{\bar{\nu}_l(x)} = \nu_l(x).$$

Моделирование дискретного распределения. Запишем распределение (7) в виде

$$P(\eta = v_j) = p_j, \quad j = 1, \dots, M, \quad \sum_{j=1}^M p_j = 1.$$

Стандартный метод моделирования этого распределения состоит в следующем [10]: моделируется α и полагается

$$\eta = v_j, \quad \text{если} \quad \sum_{i=1}^{j-1} p_i < \alpha \leq \sum_{i=1}^j p_i, \quad p_0 = 0. \quad (15)$$

3.1. Алгоритмы

Используя рассмотренные способы моделирования обобщенного экспоненциального распределения с плотностью (6), можно сформулировать следующие алгоритмы моделирования процесса смены структуры для решения систем со случайной структурой (1) с независимыми распределенными переходами (2).

Алгоритм 1а (для систем с постоянными интенсивностями перехода (10)).

- 0) $k := 0$; моделируем s_k согласно заданному начальному условию $s(t_0)$;
- 1) $l := s_k$; $\alpha := \text{rand}$; $\tau = -\frac{\ln(\alpha)}{\bar{\nu}_l}$ (время нахождения в l -й структуре (11));
- 2) $t_{k+1} = t_k + \tau$; если $t_{k+1} \geq T$, то STOP;
- 3) $\alpha := \text{rand}$; если $\sum_{i=1 \neq l}^{r-1} \frac{\bar{\nu}_{li}}{\bar{\nu}_l} < \alpha \leq \sum_{i=1 \neq l}^r \frac{\bar{\nu}_{li}}{\bar{\nu}_l}$, то $s_{k+1} = r$;
- 4) $k := k + 1$, идем на 1).

Алгоритм 1б (использование метода “максимального сечения”).

- 0) $k := 0$; моделируем s_k согласно заданному начальному условию $s(t_0)$;
- 1) $l := s_k$; моделируем τ — возможное время нахождения системы в текущей структуре по методу “максимального сечения”:
 - 1.1) $\tau := 0$;
 - 1.2) моделируем ξ как значение случайной величины с условной плотностью $p(x) = \bar{\nu}_l(t_k + x)e^{-\int_0^x \bar{\nu}_l(t_k + u) du}$, $x > 0$, и полагаем $\tau := \tau + \xi$;
 - 1.3) $t_{k+1} = t_k + \tau$; если $t_{k+1} \geq T$, то STOP;
 - 1.4) $\alpha := \text{rand}$; если $\alpha > \frac{\nu_l(t_{k+1})}{\bar{\nu}_l(t_{k+1})}$, то идем на 1.2);

- 2) $\alpha := \text{rand}$; если $\sum_{i=1 \neq l}^{r-1} \frac{\nu_{li}(t_{k+1})}{\bar{\nu}_l(t_{k+1})} < \alpha \leq \sum_{i=1 \neq l}^r \frac{\nu_{li}(t_{k+1})}{\bar{\nu}_l(t_{k+1})}$, то $s_{k+1} = r$;
 3) $k := k + 1$, идем на 1).

Алгоритмы 1а и 1б были использованы в работе [12] в алгоритмах моделирования систем со случайной структурой с постоянными и с переменными интенсивностями перехода.

В некоторых случаях, при большом числе структур S , достаточно трудоемко вычислять сумму функций при вычислении вероятностей прорезживания (14). В этих случаях для уменьшения трудоемкости можно использовать представление вероятности в виде

$$p = \frac{\nu_l(x)}{\bar{\nu}_l(x)} = \sum_{i=1 \neq l}^S \frac{\nu_{li}(x)}{\bar{\nu}_l(x)} = \sum_{i=1 \neq l}^S \frac{\bar{\nu}_{li}(x)}{\bar{\nu}_l(x)} \frac{\nu_{li}(x)}{\bar{\nu}_{li}(x)}. \quad (16)$$

Метод “максимального сечения”, использующий представление (16), также называют рандомизированным методом “максимального сечения” или методом “мажорантной частоты” [13].

Построим алгоритм моделирования процесса смены структуры, использующий рандомизированный метод “максимального сечения”.

Алгоритм 1в (использование рандомизированного метода “максимального сечения”).

- 0) $k := 0$; моделируем s_k согласно заданному начальному условию $s(t_0)$;
 1) $l := s_k$; моделируем возможное время перехода из l -й структуры и возможный номер новой структуры по методу “мажорантной частоты”:
 1.1) $\tau := 0$;
 1.2) моделируем ξ как значение случайной величины с условной плотностью $p(x) = \bar{\nu}_l(t_k + x)e^{-\int_0^x \bar{\nu}_l(t_k + u) du}$, $x > 0$, и полагаем $\tau := \tau + \xi$;
 1.3) полагаем $t_{k+1} = t_k + \tau$; если $t_{k+1} \geq T$, то STOP;
 1.4) $\alpha := \text{rand}$; если $\sum_{i=1 \neq l}^{j-1} \frac{\bar{\nu}_{li}(t_{k+1})}{\bar{\nu}_l(t_{k+1})} < \alpha \leq \sum_{i=1 \neq l}^j \frac{\bar{\nu}_{li}(t_{k+1})}{\bar{\nu}_l(t_{k+1})}$, то $r = j$;
 1.5) $\alpha := \text{rand}$; если $\alpha > \frac{\nu_{lr}(t_{k+1})}{\bar{\nu}_l(t_{k+1})}$, то идем 1.2);
 2) $s_{k+1} = r$; $k := k + 1$, идем на 1).

Теорема 2. 1) Целочисленный случайный процесс $s(t)$, построенный с помощью алгоритма 1а, является процессом смены структуры для системы (1), (2) с постоянными интенсивностями перехода $\{\nu_{lr} \equiv \bar{\nu}_{lr}\}$, а целочисленные случайные процессы, построенные с помощью алгоритмов 1б, 1в, являются процессами смены структуры для системы (1), (2) с переменными интенсивностями перехода $\{\nu_{lr}(t)\}$ при условии (12).
 2) Построенные алгоритмы реализуются с конечной трудоемкостью.

Доказательство основано на приведенных выше рассуждениях и на теоремах, доказанных в работах [4, 13].

3.2. Менее трудоемкая реализация предложенных алгоритмов моделирования процесса смены структуры

В работе [14] был предложен экономичный способ моделирования случайных величин, плотности распределения которых представляют собой взвешенные суммы (смеси)

эффективно моделируемых плотностей. Для моделирования таких величин в [14] предложено использовать модифицированный метод суперпозиции, который использует “двух-этапное” моделирование по одному и тому же значению случайного числа. В работе [6] эта методика формулируется и обосновывается в многоэтапном варианте и применяется для моделирования неоднородных пуассоновских ансамблей с использованием последовательности “исключений” по одному случайному числу.

Приведем формулировку доказанной в работе [6] теоремы, которая позволит построить экономичную реализацию алгоритмов, предложенных в предыдущем пункте.

Теорема 3. Пусть заданы натуральные $\{M^{(i)}\}$ ($M^{(i)} < \infty$), наборы вероятностей $\sum_{j=1}^{M^{(i)}} p_j^{(i)} = 1$ ($p_0 = 0$) и последовательности случайных величин $\{\beta^{(i)}\}$ и $\{\eta^{(i)}\}$:

$$\beta^{(i+1)} = \frac{\beta^{(i)} - \sum_{l=0}^{j-1} p_l^{(i)}}{p_j^{(i)}}, \quad \text{если } \beta^{(i)} \in \Delta_j^{(i)} = \left(\sum_{l=0}^{j-1} p_l^{(i)}, \sum_{l=0}^j p_l^{(i)} \right), \quad j = 1, \dots, M^{(i)},$$

$$\eta^{(i)} = v_j^{(i)}, \quad \text{если } \beta^{(i)} \in \Delta_j^{(i)}, \quad j = 1, \dots, M^{(i)},$$

где $\beta^{(1)} = \alpha$ — равномерно распределенная случайная величина в интервале $(0, 1)$, $i = 1, 2, \dots$. Тогда для любого натурального k :

1) случайные величины $\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \dots, \beta^{(k+1)}$ являются равномерно распределенными в интервале $(0, 1)$;

2) случайные величины $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \dots, \eta^{(k)}$ имеют распределение

$$P(\eta^{(i)} = v_j^{(i)}) = p_j^{(i)}, \quad j = 1, \dots, M^{(i)}, \quad \sum_{j=1}^{M^{(i)}} p_j^{(i)} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, k; \quad (17)$$

3) случайные величины $\eta^{(1)}, \dots, \eta^{(k)}, \beta^{(k+1)}$ являются независимыми.

Эта теорема позволяет экономично моделировать последовательность независимых случайных величин с требуемыми дискретными распределениями с помощью одного случайного числа.

Замечание 1. Одним значением α можно пользоваться, пока

$$l_k = \prod_{i=1}^k \bar{\Delta}^{(i)} \geq \epsilon, \quad \text{где } \bar{\Delta}^{(i)} = |\Delta_j^{(i)}|, \quad \text{если } \beta^{(i)} \in \Delta_j^{(i)}, \quad j = 1, \dots, M^{(i)},$$

где ϵ — погрешность псевдослучайных чисел, обычно возникающая вследствие конечной разрядности двоичных кодов. В случае $l_k < \epsilon$ следует использовать новое независимое значение α .

На основании теоремы 3 и замечания 1 запишем алгоритмы 1б и 1в, использующие моделирование только одного случайного числа α .

Модифицированный алгоритм 1б (использование модифицированного метода “максимального сечения”):

0) $k := 0$; моделируем s_k согласно заданному начальному условию $s(t_0)$;

$\alpha := \text{rand}$; $\beta := \alpha$; $lk := 1$;

- 1) $l := s_k$; моделируем возможное время нахождения системы в текущей структуре:
 - 1.1) $\tau := 0$;
 - 1.2) моделируем ξ как значение случайной величины с условной плотностью $p(x) = \bar{\nu}_l(t_k + x)e^{-\int_0^x \bar{\nu}_l(t_k+u) du}$, $x > 0$, и полагаем $\tau := \tau + \xi$;
 - 1.3) $t_{k+1} = t_k + \tau$; если $t_{k+1} \geq T$, то STOP;
 - 1.4) $p := \frac{\nu_l(t_{k+1})}{\bar{\nu}_l(t_{k+1})}$;
 если $\beta > p$, то $\beta := \frac{\beta-p}{1-p}$, $lk := lk(1-p)$, CM^* и идем на 1.2),
 иначе $\beta := \frac{\beta}{p}$, $lk := lk \cdot p$, CM^* ;
- 2) моделируем номер следующей структуры:

$$\text{если } \sum_{i=1 \neq l}^{r-1} \frac{\nu_{li}(t_{k+1})}{\nu_l(t_{k+1})} < \beta \leq \sum_{i=1 \neq l}^r \frac{\nu_{li}(t_{k+1})}{\nu_l(t_{k+1})}, \quad \text{то}$$

$$s_{k+1} = r, \quad p1 = \sum_{i=1 \neq l}^{r-1} \frac{\nu_{li}(t_{k+1})}{\nu_l(t_{k+1})}, \quad p = \frac{\nu_{lr}(t_{k+1})}{\nu_l(t_{k+1})}, \quad \beta := \frac{\beta - p1}{p}, \quad lk := lk \cdot p, \quad CM^*;$$

- 3) $k := k + 1$, идем на 1).

Модифицированный алгоритм 1в (использование модифицированного рандомизированного метода “максимального сечения”):

- 0) $k := 0$; моделируем s_k согласно заданному начальному условию $s(t_0)$;
 $\alpha := \text{rand}$; $\beta := \alpha$; $lk := 1$;
- 1) $l := s_k$; моделируем возможное время перехода из l -й структуры и возможный номер новой структуры по методу “мажорантной частоты”:
 - 1.1) $\tau := 0$;
 - 1.2) моделируем ξ как значение случайной величины с условной плотностью $p(x) = \bar{\nu}_l(t_k + x)e^{-\int_0^x \bar{\nu}_l(t_k+u) du}$, $x > 0$, и полагаем $\tau := \tau + \xi$;
 - 1.3) полагаем $t_{k+1} = t_k + \tau$; если $t_{k+1} \geq T$, то STOP;
 - 1.4) если $\sum_{i=1 \neq l}^{j-1} \frac{\bar{\nu}_{li}(t_{k+1})}{\bar{\nu}_l(t_{k+1})} < \beta \leq \sum_{i=1 \neq l}^j \frac{\bar{\nu}_{li}(t_{k+1})}{\bar{\nu}_l(t_{k+1})}$, то $r = j$, $p1 = \sum_{i=1 \neq l}^{r-1} \frac{\bar{\nu}_{li}(t_{k+1})}{\bar{\nu}_l(t_{k+1})}$,
 $p = \frac{\bar{\nu}_{lr}(t_{k+1})}{\bar{\nu}_l(t_{k+1})}$, $\beta = \frac{\beta - p1}{p}$, $lk := lk \cdot p$, CM^* ;
 - 1.5) $p := \frac{\nu_{lr}(t_{k+1})}{\bar{\nu}_{lr}(t_{k+1})}$;
 если $\beta > p$, то $\beta := \frac{\beta-p}{1-p}$, $lk := lk(1-p)$, CM^* и идем на 1.2),
 иначе $\beta := \frac{\beta}{p}$, $lk := lk \cdot p$, CM^* ;
- 2) $s_{k+1} = r$, $k := k + 1$, идем на 1).

Замечание 2. Переменная lk соответствует l_k из замечания 1, а оператор CM^* проверяет условие из замечания 1 и в случае его невыполнения моделируется новое случайное число. CM^* — сокращенная запись условного оператора:

$$\text{если } lk < \varepsilon, \quad \text{то } \alpha := \text{rand}, \quad \beta := \alpha, \quad lk := 1.$$

4. Численное моделирование решения системы со случайной структурой с независимыми распределенными переходами

В предыдущих разделах были построены статистические алгоритмы моделирования процесса смены структуры (8), т. е. совокупности пар точек $\{t_k, s_k\}$, задающих момент смены структуры t_k и номер новой структуры s_k . С учетом этих алгоритмов, и так как каждая структура задана соответствующей ей системой стохастических дифференциальных уравнений, можно записать следующий:

Алгоритм статистического моделирования решения системы со случайной структурой с независимыми распределенными переходами (1), (2):

- 1) моделируем процесс смены структуры $\{t_k, s_k\}$, $k = 0, \dots, K$, $s_K = T$ одним из алгоритмов, построенных в предыдущем разделе;
- 2) $k := 0$;
- 3) на интервале $[t_k, t_{k+1}]$ численным методом СДУ [17] решаем уравнения (1) для s_k -й структуры, находим y_{k+1} — вектор состояния системы в момент времени t_{k+1} ;
- 4) если $k + 1 < K$, то
 - 4а) довычисляем y_{k+1} согласно $q_{s_k s_{k+1}}(y, t | y', t)$ — условной функции плотности вероятности восстановления s_{k+1} -й реализаций из s_k -й;
 - 4б) $k := k + 1$ и идем на 3);
- 5) если $k + 1 = K$, то STOP.

Вид функции q_{lr} определяется физическим содержанием задачи и характеризует начальные условия при восстановлении процесса в r -й структуре при переходе из l -й структуры. Могут иметь место различные условия восстановления, определяемые функциями q_{lr} . В частности, если

$$q_{lr}(y, t | y', t) = \delta(y - y'),$$

то восстановление точное (“жесткое”, “без потерь”), т. е. конечные условия процесса в l -й структуре совпадают с начальными в r -й структуре. Если условная плотность восстановления

$$q_{lr}(y, t | y', t) = \delta(y - \gamma^{(r)}(t)),$$

то имеют место несвязанные условия восстановления. При восстановлении процесс всегда начинается с заданной функции времени $\gamma^{(r)}$. Если условная плотность вероятности не зависит от предыдущего состояния

$$q_{lr}(y, t | y', t) = \psi^{(r)}(y),$$

то имеет место общий случай процесса с несвязанными условиями восстановления.

В общем случае условная плотность вероятности $q_{lr}(y, t | y', t)$ может задавать произвольный закон распределения фазового вектора $y(t)$ в r -й структуре при заданном $y'(t)$ в l -й структуре.

Выбор численного метода решения конкретной системы СДУ и шага интегрирования h определяются видом этой системы и требуемой точностью вычисления вероятностных характеристик выходных процессов. Для различных структур могут использоваться разные численные методы с различными шагами интегрирования.

Пусть для решения l -й структуры используется численный метод, который слабо сходится с порядком p_l на решении задачи Коши для СДУ, и h_l обозначает максимальный шаг, используемый для решения этим методом. Пусть временная сетка включает равномерную сетку с шагом h и моменты скачков t_k .

Определение. Численное решение системы со случайной структурой *слабо сходится* с порядком p , если для любой достаточно гладкой функции $f(\mathbf{y})$:

$$\max_{1 \leq k \leq K} |\mathbb{E}_{t_0, \mathbf{y}_0} f(\mathbf{y}(t_k)) - \mathbb{E}_{t_0, \mathbf{y}_0} f(\mathbf{y}_k)| = O(h^p), \quad h \rightarrow 0,$$

где \mathbf{y}_k — численное решение в момент времени t_k , $h_k = t_k - t_{k-1}$, $h = \max_{1 \leq k \leq K} h_k$ — максимальный шаг интегрирования, $t_K = T$, \mathbb{E} — операция вычисления математического ожидания; $\mathbb{E}_{t_0, \mathbf{y}_0} f(\mathbf{y}(t_k)) = \mathbb{E}(f(\mathbf{y}(t_k)) | \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0)$.

На точность вычисления решения влияют:

- 1) порядки сходимости используемых численных методов решения СДУ;
- 2) точность моделирования моментов смены структуры;
- 3) точность моделирования условий восстановления в новой структуре.

Исследуем слабую сходимость численного решения системы со случайной структурой при точном восстановлении реализаций и моделировании моментов смены структуры одним из построенных точных алгоритмов.

Теорема 4. Численное решение системы со случайной структурой (1) с распределенными переходами (2), полученное с помощью алгоритма 2, имеет p -й порядок слабой сходимости, где

$$p = \min_{l=1, \dots, S} p_l$$

и p_l — порядок точности в смысле слабых аппроксимаций численного метода решения задачи Коши для СДУ, используемый для решения l -й структуры, $l = 1, \dots, S$, то есть для любой достаточно гладкой функции $g(\mathbf{y})$:

$$\max_{1 \leq k \leq K} |\mathbb{E}_{t_0, \mathbf{y}_0} g(\mathbf{y}(t_k)) - \mathbb{E}_{t_0, \mathbf{y}_0} g(\mathbf{y}_k)| = O(h^p), \quad h \rightarrow 0, \quad (18)$$

где h — максимальный шаг сетки.

Доказательство. Так как построенные алгоритмы моделирования процесса смены структуры являются точными, то алгоритмическая вероятность нахождения системы в l -й структуре $P_k^{(l)}$ совпадает с точной вероятностью $P^{(l)}(t_k)$. Для любой точки временной сетки t_k имеем

$$\begin{aligned} & |\mathbb{E}_{t_0, \mathbf{y}_0} g(\mathbf{y}(t_k)) - \mathbb{E}_{t_0, \mathbf{y}_0} g(\mathbf{y}_k)| \\ &= \left| \sum_{l=1}^S \mathbb{E}_{t_0, \mathbf{y}_0} (g(\mathbf{y}(t_k)) | s(t_k) = l) P^{(l)}(t_k) - \sum_{l=1}^S \mathbb{E}_{t_0, \mathbf{y}_0} (g(\mathbf{y}_k) | s_k = l) P_k^{(l)} \right| \\ &= \left| \sum_{l=1}^S \left[\mathbb{E}_{t_0, \mathbf{y}_0} (g(\mathbf{y}(t_k)) | s(t_k) = l) - \mathbb{E}_{t_0, \mathbf{y}_0} (g(\mathbf{y}_k) | s_k = l) P^{(l)}(t_k) \right] \right| \\ &\leq Ch^p \sum_{l=1}^S P^{(l)}(t_k) \leq Ch^p, \end{aligned}$$

а значит выполнено (18), и теорема доказана. \square

5. Заключение

В работе [6] было численно показано, что при моделировании неоднородных пуассоновских процессов экономичная модификация метода “максимального сечения” уменьшает время счета более чем на 10% за счет уменьшения обращений к “генератору” псевдослучайных чисел.

Эти экономичные модификации метода “максимального сечения” были использованы в данной работе для моделирования решения систем со случайной структурой с распределенными переходами, что также позволит уменьшить время расчетов. Кроме уменьшения трудоемкости вычислений, уменьшение количества используемых значений α (независимых равномерных случайных величин) снизит конструктивную размерность алгоритмов, связанную с многомерной равномерностью используемых псевдослучайных чисел.

Построенные в данной работе алгоритмы, использующие рандомизированный метод максимального сечения для моделирования процесса смены структуры, рекомендуется использовать при большом числе структур, когда достаточно трудоемко вычислять сумму функций при вычислении вероятностей прорезживания.

Построенные алгоритмы решения систем со случайной структурой с распределенными переходами предполагается применить для решения аналитической математической модели процесса самонаведения противорадиолокационной ракеты (ППР) HARM на зенитно-ракетный комплекс (ЗРК), оснащенный средствами радиолокационной защиты типа “Дублер”, обеспечивающими отвлечение ППР на себя. Данная математическая модель [18] разработана в классе нестационарных нелинейных стохастических динамических систем со случайно изменяющейся структурой с распределенными переходами.

Литература

1. **Казаков И.Е., Артемьев В.М., Бухалев В.А.** Анализ систем случайной структуры. — М.: Физматлит, 1993.
2. **Артемьев В.М., Ивановский А.В.** Управление дискретными системами со случайным периодом квантования. — М.: Энергоатомиздат, 1986.
3. **Тихонов В.И., Миронов М.А.** Марковские процессы. — М.: Советское радио, 1977.
4. **Михайлов Г.А., Аверина Т.А.** Алгоритм “максимального сечения” в методе Монте-Карло // ДАН. — 2009. — Т. 428, № 2. — С. 163–165.
5. **Аверина Т.А.** Методы статистического моделирования неоднородного пуассоновского ансамбля // Сиб. журн. вычисл. матем. / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2009. — Т. 12, № 4. С. 361–374.
6. **Аверина Т.А.** Новые алгоритмы статистического моделирования неоднородных пуассоновских ансамблей // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2010. — Т. 50, № 1. — С. 16–23.
7. **Аверина Т.А., Михайлов Г.А.** Алгоритмы точного и приближенного статистического моделирования пуассоновских ансамблей // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2010. — Т. 50, № 6. — С. 1005–1016.
8. **Coleman W.A.** Mathematical verification of a certain Monte Carlo sampling technique and applications of the techniques to radiation transport problems // J. Nucl. Sci. and Eng. — 1968. — Vol. 32, № 1. — P. 76–81.
9. **Ермаков С.М., Михайлов Г.А.** Статистическое моделирование. — М.: Наука, 1982.
10. **Михайлов Г.А., Войтишек А.В.** Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. — М.: Изд. центр “Академия”, 2006.

11. **Беляев Ю.К.** Пуассоновский точечный процесс // Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия. — М.: Научное изд-во, 1999. — С. 525–526.
12. **Аверина Т.А., Рыбаков К.А.** Два метода анализа стохастических мультиструктурных систем с распределенными переходами // Сиб. журн. вычисл. матем. / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2008. — Т. 11, № 1. — С. 1–18.
13. **Михайлов Г.А., Рогазинский С.В.** Модифицированный метод “мажорантной частоты” для численного моделирования обобщенного экспоненциального распределения // ДАН. — 2013. — Т. 444, № 1. — С. 28–30.
14. **Михайлов Г.А.** К вопросу о построении экономичных алгоритмов моделирования случайных величин // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1966. — Т. 6, № 6. — С. 1134–1136.
15. **Аверина Т.А., Артемьев С.С.** Новое семейство численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. — 1986. — Т. 288, № 4. — С. 777–780.
16. **Artemiev S.S., Averina T.A.** Numerical Analysis of Systems of Ordinary and Stochastic Differential Equations. — Utrecht, The Netherland: VSP, 1997.
17. **Аверина Т.А.** Устойчивые численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений в смысле Стратоновича // Вестник Бурятского государственного университета. — 2012. — № 9. — С. 91–94.
18. **Косачев И.М.** Математическая модель процесса самонаведения противорадиолокационной ракеты НАРМ на ЗРК, оснащенный средствами радиолокационной защиты типа “Дублер” // Вестник Военной академии Республики Беларусь. — 2012. — № 2(35). — С. 39–51.

*Поступила в редакцию 30 октября 2015 г.,
в окончательном варианте 3 декабря 2015 г.*

Литература в транслитерации

1. **Kazakov I.E., Artem'ev V.M., Buhalev V.A.** Analiz sistem sluchaynoy struktury. — М.: Fizmatlit, 1993.
2. **Artem'ev V.M., Ivanovskii A.V.** Upravlenie diskretnymi sistemami so sluchaynym periodom kvantovaniya. — М.: Energoatomizdat, 1986.
3. **Tihonov V.I., Mironov M.A.** Markovskie protsessy. — М.: Sovetskoe radio, 1977.
4. **Mikhailov G.A., Averina T.A.** Algoritm “maksimal'nogo secheniya” v metode Monte-Karlo // DAN. — 2009. — Т. 428, № 2. — С. 163–165.
5. **Averina T.A.** Metody statisticheskogo modelirovaniya neodnorodnogo puassonovskogo ansambleya // Sib. zhurn. vychisl. matem. / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2009. — Т. 12, № 4. С. 361–374.
6. **Averina T.A.** Novye algoritmy statisticheskogo modelirovaniya neodnorodnyh puassonovskih ansambley // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2010. — Т. 50, № 1. — С. 16–23.
7. **Averina T.A., Mikhailov G.A.** Algoritmy tochnogo i priblizhennogo statisticheskogo modelirovaniya puassonovskih ansambley // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2010. — Т. 50, № 6. — С. 1005–1016.
8. **Coleman W.A.** Mathematical verification of a certain Monte Carlo sampling technique and applications of the techniques to radiation transport problems // J. Nucl. Sci. and Eng. — 1968. — Vol. 32, № 1. — P. 76–81.
9. **Ermakov S.M., Mikhailov G.A.** Statisticheskoe modelirovanie. — М.: Nauka, 1982.
10. **Mikhailov G.A., Voytishchek A.V.** Chislennoe statisticheskoe modelirovanie. Metody Monte-Karlo. — М.: Izd. tsentr “Akademiya”, 2006.

11. **Belyaev Yu.K.** Пуассоновский стохастический процесс // Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия. — М.: Научное изд-во, 1999. — С. 525–526.
12. **Averina T.A., Rybakov K.A.** Два метода анализа стохастических мультиструктурных систем с распределенными переходами // Sib. zhurn. vychisl. matem. / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2008. — Т. 11, № 1. — С. 1–18.
13. **Mikhailov G.A., Rogazinskii S.V.** Модифицированный метод “мажорантной частоты” для численного моделирования обобщенного экспоненциального распределения // DAN. — 2013. — Т. 444, № 1. — С. 28–30.
14. **Mikhailov G.A.** К вопросу о построении экономических алгоритмов моделирования случайных величин // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1966. — Т. 6, № 6. — С. 1134–1136.
15. **Averina T.A., Artem'ev S.S.** Новое семейство численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений // Dokl. AN SSSR. — 1986. — Т. 288, № 4. — С. 777–780.
16. **Artemiev S.S., Averina T.A.** Numerical Analysis of Systems of Ordinary and Stochastic Differential Equations. — Utrecht, The Netherland: VSP, 1997.
17. **Averina T.A.** Устойчивые численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений в смысле Стратоновича // Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta. — 2012. — № 9. — С. 91–94.
18. **Kosachev I.M.** Математическая модель процесса самонаведения противорadiолокационной ракеты HARM на ZRK, оснащенный средствами радиолокационной защиты типа “Дублер” // Vestnik Voennoy akademii Respubliki Belarus'. — 2012. — № 2(35). — С. 39–51.

