

УДК 532.546

ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОС В ТАЮЩЕМ СНЕГЕ

А. Н. Сибин, А. А. Папин

Алтайский государственный университет, 656049 Барнаул, Россия

E-mails: sibin_anton@mail.ru, papin@math.asu.ru

С использованием уравнений неизотермической двухфазной фильтрации рассматривается задача о движении воды и воздуха в тающем снеге. Исследуемая математическая модель верифицирована с использованием экспериментальных данных.

Ключевые слова: многофазная фильтрация, пористая среда, тающий снег, фазовый переход, насыщенность, численное решение.

DOI: 10.15372/PMTF20210112

Введение. Преобладающая часть стока северных рек формируется за счет таяния сезонного снежного покрова. Условия снеготаяния оказывают основное влияние не только на количество поступающих в водоемы-приемники талых вод, но и на их качество. Кроме того, объем снежного покрова (снегозапас) влияет на промерзание поверхностного слоя почв и, следовательно, его впитывающую способность и определяет соотношение между склоновым и грунтовым стоками. Поэтому моделирование состояния снежного покрова и солепереноса в период снеготаяния имеет большое значение при разработке методов расчетов и прогнозов гидрографов весеннего половодья и качества воды в водоемах-приемниках [1]. Имеется большое количество работ, посвященных исследованию солемассопереноса в тающем снеге, в которых используются данные наблюдений и эмпирические зависимости (см. работу [2] и библиографию к ней). Большая часть эмпирических моделей являются одномерными и не позволяют вычислить скорость фильтрации воды, а модели, позволяющие определить скорость фильтрации воды, обычно не учитывают фазовые переходы или пригодны только для специфичных режимов движения воды в снежном покрове и также не позволяют получить необходимую информацию о поле скоростей и насыщенности водной фазы, необходимой для оценки водного стока и стока загрязняющих веществ.

Таким образом, для достоверного прогнозирования водного стока и стока загрязняющих веществ необходимы данные о поле скоростей и насыщенности водной фазы, т. е. следует использовать комплексные модели, описывающие совместное движение загрязняющих веществ и воды в снежном покрове с учетом различных краевых условий, фазовых переходов и процесса сублимации. Эти модели позволяют рассчитать нестационарное движение загрязняющих веществ внутри снежного покрова и оценить поверхностный и

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ (FZMW-2020-0008) “Современные методы гидродинамики для задач природопользования, промышленных систем и полярной механики”, численный эксперимент проведен на вычислительном кластере центра коллективного пользования “Сибирский суперкомпьютерный центр” (вычислительный комплекс РСК “Торнадо”).

подземный стоки веществ. Для этого они должны учитывать ряд важных факторов: переменную пористость снежного покрова, фазовые переходы, специфику граничных условий (в частности, наличие промерзшего или непромерзшего грунта). Основы теории движения воды и воздуха в тающем снеге изложены в работах [3–5]. Несмотря на то что в [3–5] снег рассматривался в качестве многофазной среды, переменная пористость льда, его деформация и фазовые переходы не учитывались.

В работе [6] снежный покров рассматривался как трехфазная среда (вода, воздух, лед). Приведены эмпирические зависимости для капиллярного скачка (вода — воздух) и эмпирические формулы для коэффициента проводимости снега. Однако движением воздуха пренебрегалось, и уравнение для температуры существенно упрощено. В результате трехфазная модель сводится к уравнениям для температуры и объемной концентрации водной фазы.

В работе [7] построено автомодельное решение для модели двухфазной фильтрации при естественных граничных условиях. В [2] приведены постановки следующих задач тепломассопереноса в тающем снеге: 1) о движении воды и воздуха в тающем снеге с учетом фазовых переходов и деформации ледового скелета; 2) о распределении водяного стока тающего снега между грунтовыми и поверхностными водами; 3) об абляции деформируемого снежно-ледового покрова. Также в [2] разработан алгоритм численного решения задачи о переносе консервативных солей в тающем снеге и построена модель движения грунтовых вод, контактирующих с промерзшим грунтом.

Целями настоящей работы являются моделирование совместного движения воды и воздуха в тающем снеге с учетом фазовых переходов, разработка алгоритма численного решения одномерной задачи, проведение численных расчетов и сравнение полученных результатов с экспериментальными данными [8].

1. Постановка задачи. Следуя [1, 3–5], будем рассматривать тающий снег как сплошную среду, состоящую из воды ($i = 1$), воздуха ($i = 2$) и льда ($i = 3$), составляющего твердый пористый скелет. Фильтрация воды и воздуха в пористом ледовом скелете описывается с помощью уравнений сохранения массы для каждой фазы с учетом фазовых переходов, уравнений двухфазной фильтрации и уравнения теплового баланса для трехфазной среды:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \mathbf{u}_i) = \sum_{j=1}^3 I_{ji}, \quad i = 1, 2, 3, \quad I_{ji} = -I_{ij}, \quad \sum_{i,j=1}^3 I_{ij} = 0; \quad (1.1)$$

$$\varphi s_i (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_3) = -K_0 \frac{\bar{k}_{0i}}{\mu_i} (\nabla p_i - \rho_i^0 \mathbf{g}), \quad i = 1, 2, \quad p_2 - p_1 = p_c(s_1, \theta); \quad (1.2)$$

$$\left(\sum_{i=1}^3 \rho_i^0 c_i \alpha_i \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \left(\sum_{i=1}^3 \rho_i^0 \alpha_i c_i \mathbf{u}_i \right) \nabla \theta = \operatorname{div}(\lambda_c \nabla \theta) - L_i I_{23} - \nu I_{13}. \quad (1.3)$$

Здесь \mathbf{u}_i — скорость i -й фазы; ρ_i — приведенная плотность, связанная с истинной плотностью ρ_i^0 и объемной концентрацией α_i соотношением $\rho_i = \alpha_i \rho_i^0$ (условие $\sum_{i=1}^3 \alpha_i = 1$ следует

из определения ρ_i); I_{ji} — интенсивность перехода массы из j -й в i -ю составляющую в единице объема в единицу времени; φ — пористость снега; s_1, s_2 — насыщенности воды и воздуха ($\alpha_1 = \varphi s_1, \alpha_2 = \varphi s_2, \alpha_3 = 1 - \varphi, s_1 + s_2 = 1$); $K_0(\varphi)$ — тензор проницаемости пористой среды; \bar{k}_{0i} — фазовые проницаемости ($\bar{k}_{0i} = \bar{k}_{0i}(s_i) \geq 0, \bar{k}_{0i}|_{s_i=0} = 0$); $\mu_i = \operatorname{const} > 0$ — динамические вязкости; p_i — давления фаз; p_c — капиллярное давление; \mathbf{g} — ускорение свободного падения; θ — температура среды ($\theta_i = \theta, i = 1, 2, 3$); $c_i = \operatorname{const} > 0$ — удельная

теплоемкость i -й фазы при постоянном объеме; $\nu = \text{const} > 0$ — удельная теплота плавления льда; $L_i = \text{const} > 0$ — удельная теплота сублимации льда; λ_c — теплопроводность снега ($\lambda_c = a_c + b_c \rho_c^2$, $\rho_c = \sum_{i=1}^3 \rho_i^0 \alpha_i$, $a_c = \text{const} > 0$, $b_c = \text{const} > 0$).

При использовании рассматриваемого подхода большое значение имеет корректное определение интенсивностей фазового перехода лед — вода и лед — воздух. Следует отметить, что для описания процессов испарения и конденсации молекул пара на межфазной границе жидкость — пар используются классическая формула Герца — Кнудсена — Ленгмюра [9. С. 88] и ее модификации. В соответствии с формулой Герца — Кнудсена — Ленгмюра интенсивность фазового перехода пропорциональна разности давления жидкости на фазовой границе и давления насыщения. Аналогичная формула используется для описания процесса сублимации в снеге [10]. Для моделирования интенсивности фазового перехода лед — вода, как правило, используется методология задачи Стефана, т. е. предполагается, что существует межфазная граница, на которой при определенной температуре скачкообразно происходит переход льда в воду. При таком подходе не требуется задавать интенсивность фазового перехода лед — вода. При другом подходе к исследованию процесса таяния снега полагается, что фазовый переход лед — вода происходит во всей толще снежно-ледового покрова и для описания распространения тепла необходимо использовать уравнение вида (1.3) с соответствующей правой частью. Эта задача аналогична задаче о тепломассопереносе в протаивающих (промерзающих) грунтах [11]. Имеется ряд экспериментальных данных о зависимости концентрации льда в пористой среде от температуры [12]. В настоящей работе для определения интенсивности фазового перехода лед — вода используются зависимости, полученные с помощью работ [11, 12]:

$$I_{31} = I = \begin{cases} -\lambda_1 \varphi \theta s, & \theta < \theta^-, \\ 0, & \theta^- \leq \theta \leq \theta^+, \\ \lambda_2 (1 - \varphi)^2 e^{\beta(\theta - \theta^+)}, & \theta > \theta^+. \end{cases} \quad (1.4)$$

Здесь θ^+ , θ^- — температура плавления льда и замерзания воды; β , λ_1 , λ_2 — размерные постоянные, характеризующие интенсивность фазового перехода ($[\beta] = 1/\text{K}$, $[\lambda_1] = \text{кг}/(\text{м}^3 \cdot \text{с} \cdot \text{K})$, $[\lambda_2] = \text{кг}/(\text{м}^3 \cdot \text{с})$).

2. Преобразования системы уравнений. Система (1.1)–(1.3) дополняется уравнениями $\mathbf{u}_3 = 0$ (частицы льда неподвижны, структура льда как сплошной среды не уточняется [1]), $I_{12} = 0$, $I_{23} = 0$ (сублимацией и обменом массами между водой и воздухом пренебрегается), $\rho_i^0 = \text{const} > 0$, $i = 1, 2, 3$. Пусть $s_1 \equiv s$ — водонасыщенность ($1 - s = s_2$), $\rho_3^0 < \rho_1^0$, $p_c = p_c(s)$ (данное предположение сделано для упрощения, все результаты легко обобщаются на случай $p_c(s, \theta)$). В дальнейшем полагается, что величины $p_c(s)$ удовлетворяют условиям [3]

$$p_c(s) > 0, \quad s \in (0, 1), \quad p_c(0) = \infty, \quad p_c(1) = 0, \quad \frac{\partial p_c}{\partial s} < 0.$$

С учетом принятых предположений система (1.1), (1.2) записывается в виде

$$\frac{\partial (s\varphi)}{\partial t} + \nabla \cdot (s\varphi \mathbf{u}_1) = \frac{I}{\rho_1^0}; \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial (1-s)\varphi}{\partial t} + \nabla \cdot ((1-s)\varphi \mathbf{u}_2) = 0; \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial(1-\varphi)}{\partial t} = -\frac{I}{\rho_3^0}; \quad (2.3)$$

$$\mathbf{v}_i \equiv s_i \varphi \mathbf{u}_i = -K_0(\varphi) k_{0i} (\nabla p_i - \rho_i^0 \mathbf{g}), \quad i = 1, 2, \quad p_2 - p_1 = p_c(s), \quad (2.4)$$

где $k_{0i} = \bar{k}_{0i}/\mu_i$. Преобразуем систему (2.1)–(2.4), сложив уравнения (2.1), (2.2), (2.3). Получаем

$$-\nabla \cdot (s\varphi \mathbf{u}_1 + (1-s)\varphi \mathbf{u}_2) = \left(1 - \frac{\rho_3^0}{\rho_1^0}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (2.5)$$

Положим

$$\mathbf{v} \equiv s\varphi \mathbf{u}_1 + (1-s)\varphi \mathbf{u}_2.$$

Используя (2.4) и формулу $p_2 - p_1 = p_c$ для \mathbf{v} , получаем следующее представление:

$$-\mathbf{v} = K_0(\varphi) (k_{01} (\nabla(p_2 - p_c) - \rho_1^0 \mathbf{g}) + k_{02} (\nabla p_2 - \rho_2^0 \mathbf{g})) = K \nabla p + \mathbf{f}, \quad (2.6)$$

где $k(s) = k_{01} + k_{02}$; $K(s, \varphi) = K_0(\varphi) k(s)$; $\mathbf{f}(s, \varphi) = -K_0 \mathbf{g} (k_{01} \rho_1^0 + k_{02} \rho_2^0)$; p — “приведенное” давление [13. С. 209]:

$$p = p_2 + \int_s^1 \frac{k_{01}(\xi)}{k(\xi)} \frac{\partial p_c}{\partial \xi} d\xi. \quad (2.7)$$

С учетом (2.7) для $\mathbf{v}_2 = (1-s)\varphi \mathbf{u}_2$ находим

$$-\mathbf{v}_2 = -a \nabla s + K_0 k_{02} \nabla p + \mathbf{f}_0, \quad (2.8)$$

где

$$a(s, \varphi) = -K_0 \frac{k_{01} k_{02}}{k} \frac{\partial p_c}{\partial s}, \quad \mathbf{f}_0(s, \varphi) = -K_0 k_{02} \rho_2^0 \mathbf{g}.$$

С учетом (2.6) выражение (2.8) принимает вид

$$-\mathbf{v}_2 = -a \nabla s - b \mathbf{v} - \mathbf{F}, \quad (2.9)$$

где

$$\mathbf{F}(s, \varphi) = b \mathbf{f} - \mathbf{f}_0 = \frac{k_{01} k_{02} K_0 \mathbf{g}}{k} (\rho_2^0 - \rho_1^0), \quad b(s) = \frac{k_{02}}{k}.$$

С использованием (2.2), (2.8) получаем

$$\frac{\partial((1-s)\varphi)}{\partial t} = \nabla \cdot (-a \nabla s + K_0 k_{02} \nabla p + \mathbf{f}_0). \quad (2.10)$$

Уравнения (2.3), (2.5) запишем в виде

$$\nabla \cdot (K \nabla p + \mathbf{f}) = \left(1 - \frac{\rho_3^0}{\rho_1^0}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial t}; \quad (2.11)$$

$$\rho_3^0 \frac{\partial(1-\varphi)}{\partial t} = -I. \quad (2.12)$$

Система уравнений (1.3), (2.10)–(2.12) при заданном I рассматривается относительно функций s, p, θ, φ . С учетом (2.9) данную систему можно привести к следующему виду:

$$\frac{\partial s \varphi}{\partial t} = \nabla \cdot (a \nabla s + b \mathbf{v} + \mathbf{F}) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}; \quad (2.13)$$

$$-\nabla \cdot \mathbf{v} = \left(1 - \frac{\rho_3^0}{\rho_1^0}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial t}; \quad (2.14)$$

$$\rho_3^0 \frac{\partial (1 - \varphi)}{\partial t} = -I; \quad (2.15)$$

$$-\mathbf{v} = K \nabla p + \mathbf{f}; \quad (2.16)$$

$$Q(s, \theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda_c \nabla \theta) - \mathbf{V} \nabla \theta - \nu I, \quad (2.17)$$

$$Q = c_1 \rho_1^0 s \varphi + c_2 \rho_2^0 (1 - s) \varphi + \rho_3^0 c_3 (1 - \varphi), \quad \mathbf{V} = c_1 \rho_1^0 \mathbf{v}_1 + c_2 \rho_2^0 \mathbf{v}_2.$$

Особенностью рассматриваемой задачи является возможное вырождение на решении уравнения (2.10) при $s = 0$, $s = 1$. Кроме того, значения пористости и насыщенности должны удовлетворять условиям $0 \leq \varphi < 1$, $0 \leq s \leq 1$ соответственно.

3. Алгоритм численного решения одномерной задачи. Для системы (2.13)–(2.17) в одномерном случае рассматривается следующая начально-краевая задача:

$$\begin{aligned} \varphi(y, 0) &= \varphi^0(y), \quad s(y, 0) = s^0(y), \quad s(0, t) = s_0(t), \quad \frac{\partial s}{\partial y}(l, t) = 0, \\ \theta(y, 0) &= \theta^0(y), \quad \theta(0, t) = \theta_0(t), \quad \theta(l, t) = \theta_l(t), \\ p(0, t) &= p_0(t), \quad \frac{\partial p}{\partial y}(l, t) = p_l(t), \quad y \in [0, l]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Перейдем к безразмерным переменным

$$\tilde{y} = \frac{y}{y_{sc}}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{t_{sc}}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{p_{sc}}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{v_{sc}}, \quad \tilde{\theta} = \frac{\theta}{\theta_{sc}},$$

где $y_{sc} = l$; $p_{sc} = \rho_1^0 g l$; температура θ_{sc} принимается равной температуре плавления льда; $v_{sc} = B \rho_1^0 g / \mu_1$; $t_{sc} = y_{sc} / v_{sc}$ — характерное время. Тогда область изменения y представляет собой единичный отрезок $[0, 1]$, а система уравнений (2.13)–(2.17) в одномерном случае принимает вид

$$\varphi \frac{\partial s}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left(\tilde{a} \frac{\partial s}{\partial \tilde{y}} + b \tilde{v} + \tilde{F} \right) + (1 - s) \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{t}}; \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left(\tilde{K} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \tilde{f} \right) = \left(1 - \frac{\rho_3^0}{\rho_1^0}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{t}}; \quad (3.3)$$

$$\tilde{Q} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left(\tilde{\lambda}_c \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{y}} \right) - \tilde{V} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{y}} - \chi \tilde{I}; \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{t}} = \tilde{I}. \quad (3.5)$$

Здесь $\chi = \nu / (c_3 \theta_{sc})$ — безразмерная постоянная; $\tilde{v} = \tilde{v}_1 + \tilde{v}_2$; $\tilde{K} = \tilde{K}_0 \tilde{k}$,

$$\tilde{v}_1 = -\tilde{K}_0 \bar{k}_{01} \left(\frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial \tilde{y}} - 1 \right), \quad \tilde{v}_2 = -\tilde{K}_0 \frac{\bar{k}_{02}}{\mu} \left(\frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial \tilde{y}} - \frac{\rho_2^0}{\rho_1^0} \right), \quad b(s) = \frac{\bar{k}_{02}}{\mu \bar{k}_{01} + \bar{k}_{02}}, \quad \mu = \frac{\mu_2}{\mu_1},$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}(s, \varphi) &= -\tilde{K}_0 \frac{\bar{k}_{01}\bar{k}_{02}}{\mu\bar{k}_{01} + \bar{k}_{02}} \frac{\partial \tilde{p}_c}{\partial s}, \quad \tilde{F} = \tilde{K}_0 \frac{\bar{k}_{01}\bar{k}_{02}(\rho_2^0/\rho_1^0 - 1)}{\mu\bar{k}_{01} + \bar{k}_{02}}, \quad \tilde{K}_0 = \frac{B\rho_1^0 g}{v_{sc}\mu_1} \frac{\varphi^3}{(1-\varphi)^2}, \\ \tilde{k} &= \bar{k}_{01} + \frac{\bar{k}_{02}}{\mu}, \quad \tilde{f} = -\tilde{K}_0 \left(\bar{k}_{01} + \frac{\rho_2^0}{\rho_1^0 \mu} \bar{k}_{02} \right), \quad \tilde{Q} = \frac{\rho_1^0 c_1}{\rho_3^0 c_3} s\varphi + \frac{c_2 \rho_2^0}{c_3 \rho_3^0} (1-s)\varphi + 1 - \varphi, \\ \tilde{\lambda}_c &= \frac{a_c t_{sc}}{y_{sc}^2 \rho_3^0 c_3} \left(1 + \frac{b_c}{a_c} \rho_c^2 \right), \quad \tilde{V} = \frac{\rho_1^0 c_1}{\rho_3^0 c_3} \tilde{v}_1 + \frac{\rho_2^0 c_2}{\rho_3^0 c_3} \tilde{v}_2, \quad \tilde{I} = \frac{t_{sc}}{\rho_3^0} I. \end{aligned}$$

В дальнейшем знак “ \sim ” опускается. Следует отметить, что v является искомой функцией и определяется из равенства (2.6) в ходе решения задачи.

При аппроксимации уравнений (3.2), (3.4) используется направленная разность для конвективных слагаемых. Уравнение (3.3) аппроксимируется неявной схемой второго порядка точности, уравнение (3.5) — неявной схемой Рунге — Кутты второго порядка точности.

Численное решение начально-краевой задачи находится следующим образом. Используя начальные значения пористости $\varphi(x, 0)$, температуры $\theta(x, 0)$ и концентрации $s(x, 0)$, получаем начальное распределение приведенного давления $p(x, 0)$ из уравнения (3.3). Используя найденное давление, определяем скорость фильтрации $v_i(x, 0)$. Из равенства (3.4) находим температуру θ на следующем шаге по времени, из (3.5) — пористость снега φ , из уравнения (3.2) — концентрацию воды s . Рассчитываем давление на следующем шаге по времени. Используя найденные значения искоемых функций, корректируем значения пористости на первом шаге по времени. Повторяя данный алгоритм на следующих шагах по времени, находим значения искоемых функций на всем временном интервале.

4. Численное исследование одномерной задачи. В настоящей работе для тестирования и калибровки предложенной математической модели используются результаты экспериментальной работы [8], в которой исследовалось движение воды в тающем снеге. Снег с зернами различного размера просеян и упакован в прямоугольные контейнеры таким образом, чтобы получить заданные характеристики слоев снега. Процесс таяния инициировался с помощью четырех инфракрасных ламп (100 Вт), установленных над каждым контейнером. Лампы создавали однородный поток тепла с интенсивностью 150 Вт/м². Стены контейнеров были изолированы панелями из полистирола. В помещении поддерживалась отрицательная температура. Направления течения талой воды определялись визуально с помощью краски, водонасыщенность — с помощью рефрактометров, установленных внутри контейнеров. Экспериментально показано, что при фильтрации воды в однородном снежном покрове выделяются предпочтительные пути фильтрации и снег становится неоднородным.

Снег двух видов упаковывался в контейнеры слоями. Первый контейнер заполнялся сначала крупнозернистым снегом с плотностью (480 ± 8) кг/м³ (толщина слоя 10 см), а затем мелкозернистым с плотностью (540 ± 8) кг/м³ (толщина слоя 15 см). Вторым контейнером, наоборот, сначала заполнялся мелкозернистым снегом (толщина слоя 10 см), а затем крупнозернистым (толщина слоя 15 см). Датчики, измеряющие влажность (TDR probes), располагались на расстоянии 17,0; 14,5; 5,0 см от дна контейнеров соответственно (далее будем называть эти датчики верхним, средним и нижним). Датчики температуры располагались только на нижнем уровне (на расстоянии 5 см от дна контейнера).

Первые исследования зависимости коэффициента проницаемости от пористости были выполнены для грунтов (изменение пористости в грунте может быть вызвано, в частности, процессом внутренней суффозии [14]). По аналогии с фильтрацией в грунте для снега коэффициент проницаемости задается в виде [3] $K_0 = b\varphi^m$ или $K_0 = d e^{\alpha\varphi}$, $\bar{k}_{0i} = s_i^n$ (b, d — размерные постоянные, м²; $\alpha = \text{const}$); значение степени n обычно принимается равным 2;

$3 \leq m \leq 5$. Выражение для капиллярного давления, как правило, зависящего только от водонасыщенности, имеет вид $p_c(s) = \gamma/s$ [4] или $p_c(s) = \gamma/s + c$ [5] (γ, c — размерные постоянные, Па). Для грунтов с переменной пористостью часто используется зависимость Козени $K_0 = B\varphi^3/(1 - \varphi)^2$ (B — размерная постоянная, м²).

В работе [6] при моделировании фильтрации воды в тающем снеге используется зависимость для грунтов [15]

$$k_{01} = \sqrt{s} (1 - (1 - s^{1/m})^m)^2$$

(m — заданная постоянная), коэффициент проницаемости задается зависимостью $K_0 = d(\varphi) e^{\alpha\rho_c/\rho_3^0}$ [16], где d — размерная функция; α — постоянная. Для капиллярного давления используется зависимость [6]

$$p_c = \gamma(s^{-1/m} - 1)^{1/n}, \tag{4.1}$$

где γ — размерная постоянная, Па; n — заданная постоянная.

В соответствии с работами [3–6] при численном исследовании начально-краевой задачи (3.1)–(3.5) для капиллярного давления использовался частный случай зависимости (4.1) при $m = n = 1$ (в численных расчетах $\gamma = 0,02$ Па [3. С. 374]). Модель тестировалась на простых зависимостях коэффициента проницаемости от пористости $K_0 = b\varphi^m$ и $K_0 = B\varphi^3/(1 - \varphi)^2$. Следует отметить, что при $B = 0,001$ м² использование формулы Козени позволяет получить результаты, лучше согласующиеся с экспериментальными данными (значение параметра B получено при анализе экспериментальных данных [8]). В численных расчетах использовались следующие модельные параметры: $g = 9,8$ м/с², $k_{0i} = s_i^2$ при $0 \leq s \leq 1$, $k_{0i} = 0$ при $s_i \leq 0$, $k_{0i} = 1$ при $s_i \geq 1$, $\rho_1^0 = 10^3$ кг/м³, $\rho_2^0 = 1,292$ кг/м³, $\rho_3^0 = 916,2$ кг/м³, $l = 0,25$ м, $\mu_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/(м·с), $\mu_2 = 2 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с), $\nu = 333,8$ Дж/г, $c_1 = 4,18$ Дж/(г·К), $c_2 = 0,838$ Дж/(г·К), $c_3 = 2,06$ Дж/(г·К).

Для определения интенсивности фазового перехода использовалась зависимость (1.4) (параметры $\beta = 1$ К⁻¹, $\lambda_1 = 10^{-3}$ кг/(м³·с·К), $\lambda_2 = 3 \cdot 10^{-3}$ кг/(м³·с) определяются путем подбора в ходе решения задачи и сопоставления результатов моделирования и экспериментальных данных).

Начало отсчета находится на поверхности снежного покрова, ось y направлена вниз ($y \in [0, l]$, $l = 0,25$ м). Начальные и граничные условия (3.1) задавались в виде $p_2(0, t) = 101$ кПа (атмосферное давление) из (2.7),

$$p(0, t) = 101 \text{ кПа} + \int_{s(0,t)}^1 \frac{k_{01}(\xi)}{k(\xi)} \frac{\partial p_c}{\partial \xi} d\xi.$$

Полагалось, что $s(0, t) = 0$, т. е. на границе $y = 0$ вода отсутствует, температура на верхней границе равна температуре в холодной комнате [8]. При $y = l$ задавалось условие непротекания $v_1 = v_2 = 0$, т. е. $(\partial p/\partial y)(l, t) = -f/K$. С учетом равенства (2.8) для концентрации воды принимаем условие $(\partial s/\partial y)(l, t) = 0$. Температура при $y = l$ задавалась на основе показаний нижнего датчика в эксперименте.

В настоящей работе представлены результаты двух расчетов с различными начальными распределениями пористости. В начальный момент времени для эксперимента 1 пористость полагалась кусочно-постоянной: $\varphi(y, 0) = 0,476$ при $y \in [0, 0,1]$ и $\varphi(y, 0) = 0,41$ при $y \in (0,1, 0,25]$; для эксперимента 2 верхний слой снега имел пористость $\varphi(y, 0) = 0,41$ при $y \in [0, 0,1]$, нижний слой — $\varphi(y, 0) = 0,476$ при $y \in (0,1, 0,25]$; водонасыщенность s для обоих экспериментов задавалась равной нулю: $s(x, 0) = 0$, так как до включения ламп температура в холодной комнате была ниже нуля.

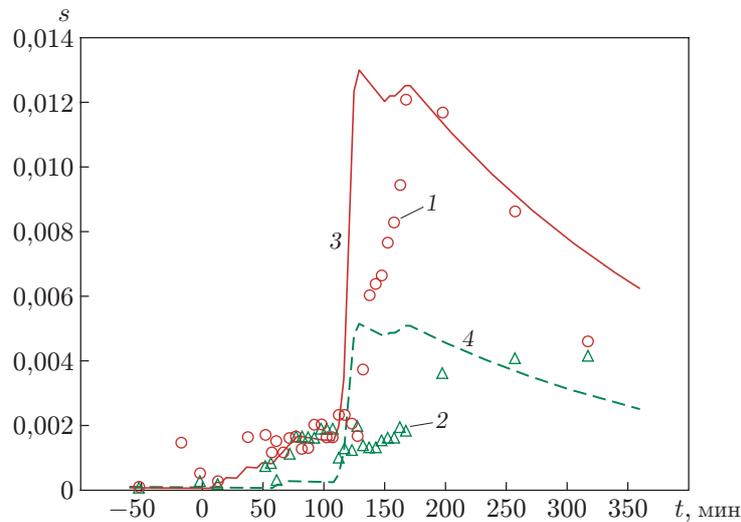


Рис. 1. Зависимости водонасыщенности s от времени:

1, 2 — данные эксперимента 1 (1 — показания верхнего датчика, 2 — показания нижнего датчика), 3, 4 — численное моделирование (3 — $y = 0,08$, 4 — $y = 0,20$)

На рис. 1 представлены результаты численного моделирования эксперимента 1 и значения концентрации, измеренные верхним и нижним датчиками. Лампы работали в течение 180 мин. В период нагрева верхний датчик зафиксировал увеличение концентрации воды в снеге. Верхний датчик устанавливался выше границы раздела двух слоев снега. Поскольку сверху находился слой крупнозернистого снега (с большей пористостью), на верхнем участке скорость воды больше и на границе раздела двух слоев формируется область, насыщенная водой. Математическая модель достаточно точно описывает период постепенного таяния снега в верхнем слое (от 50 до 120 мин) и формирование слоя, насыщенного водой. Несовпадение экспериментальных данных и результатов численного моделирования при $t = 150 \div 250$ мин (см. рис. 1, 2) может быть обусловлено неоднородностью снега. Увеличение концентрации воды в этот период, зафиксированное нижним датчиком, обусловлено, по-видимому, формированием в снеге областей с большей пористостью (предпочтительных путей фильтрации). В верхнем слое данный эффект имеет меньшее влияние, протаивание происходит более равномерно. На рис. 3 показано изменение пористости снега за время проведения эксперимента.

Результаты моделирования для эксперимента 2 представлены на рис. 2, 3, б. Как и предполагалось, скачок концентрации воды в верхнем слое в два раза меньше, чем в эксперименте 1, так как пористость нижнего слоя больше.

Незначительное изменение пористости снега на рис. 2, 3, б обусловлено, по-видимому, малым временем нагрева (работы ламп накаливания). После выключения ламп фильтрующаяся вода замерзает.

Устойчивость и порядок сходимости вычислительного алгоритма проверялись с использованием вычислительных экспериментов и правила Рунге: достаточно провести три расчета на сетках с шагами $h_1 = h$, $h_2 = h/2$, $h_3 = h/4$, $\tau_i = \kappa h_i$, $\kappa = \text{const}$, $i = 1, 2, 3$, контролируя концентрацию воды s . При этом получен порядок сходимости $R \approx 1,1$, относительная погрешность составила $\varepsilon \approx 2\%$.

Заключение. В работе численно исследована одномерная математическая модель фильтрации воды в тающем снеге. Проведены численные расчеты, результаты которых согласуются с экспериментальными данными при медленном протаивании в верхних слоях

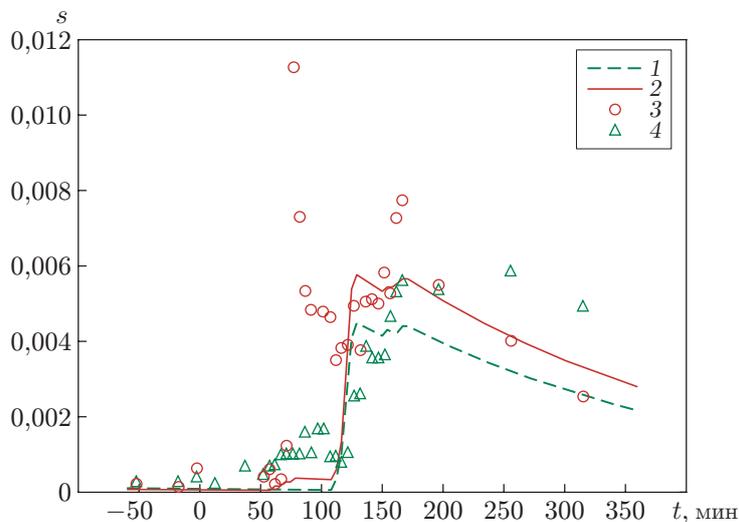


Рис. 2. Зависимости водонасыщенности s от времени:
 1, 2 — численное моделирование (1 — $y = 0,08$, 2 — $y = 0,20$), 3, 4 — данные эксперимента 2 (3 — показания верхнего датчика, 4 — показания нижнего датчика)

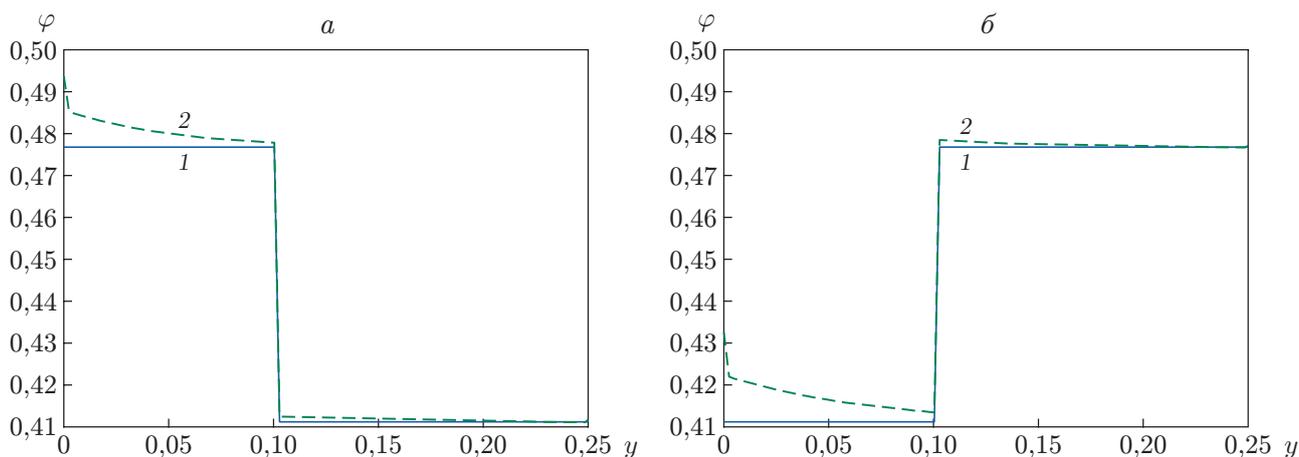


Рис. 3. Распределения пористости φ по глубине, полученные при численном моделировании для эксперимента 1 (а) и эксперимента 2 (б):
 1 — в начальный момент времени, 2 — после завершения эксперимента

снега. Показано, что учет неравномерности протаивания может иметь большое значение при моделировании таяния нижних слоев снега.

Предложен алгоритм численного решения начально-краевой задачи о фильтрации воды в тающем снеге и проведены тестовые численные расчеты. Найдены пористость и концентрация воды для снега, состоящего из двух слоев с различными свойствами.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кучмент Л. С.** Формирование речного стока. Физико-математические модели / Л. С. Кучмент, В. Н. Демидов, Ю. Г. Мотовилов. М.: Наука, 1983.
2. **Папин А. А., Tokareva М. А.** Problems of heat and mass transfer in the snow-ice cover // IOP Conf. Ser. Earth Environment. Sci. 2018. V. 193. P. 1–8.

3. **Colbeck S. C.** A theory of water percolation in snow // *J. Glaciol.* 1972. V. 11, N 63. P. 369–385.
4. **Gray J. M. N. T.** Water movement in wet snow // *Philos. Trans.: Math. Phys. Engng Sci.* 1996. V. 354, N 1707. P. 465–500.
5. **Sellers S.** Theory of water transport in melting snow with a moving surface // *Cold Regions Sci. Technol.* 2000. V. 2000, N 31. P. 47–57.
6. **Daanen R. P., Nieber J. L.** Model for coupled liquid water flow and heat transport with phase change in a snowpack // *J. Cold Regions Engng.* 2009. V. 23, N 2. P. 43–68.
7. **Папин А. А.** Разрешимость модельной задачи тепломассопереноса в тающем снеге // *ПМТФ.* 2008. Т. 49, № 4. С. 13–23.
8. **Waldner P. A., Schneebeli M., Schultze-Zimmermann U., Fluhler H.** Effect of snow structure on water flow and solute transport // *Hydrolog. Process.* 2008. V. 18, N 7. P. 1271–1290.
9. **Нигматулин Р. И.** Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Т. 1.
10. **Thorpe A. D., Mason B. J.** The evaporation of spheres and ice crystals // *British J. Appl. Phys.* 1996. V. 17. P. 541–548.
11. **Колесников А. Г.** К изменению математической формулировки задачи о промерзании грунта // *Докл. АН СССР.* 1953. Т. 82, № 6. С. 889–891.
12. **Нерсесова З. А.** Изменение льдистости грунтов в зависимости от температуры // *Докл. АН СССР.* 1950. Т. 75, № 6. С. 845–846.
13. **Антонцев С. Н.** Краевые задачи механики неоднородных жидкостей / С. Н. Антонцев, А. В. Кажихов, В. Н. Монахов. Новосибирск. Наука. Сиб. отд-ние, 1983.
14. **Папин А. А., Сибин А. Н.** Моделирование движения смеси твердых частиц и жидкости в пористых средах с учетом внутренней суффозии // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* 2019. № 4. С. 82–94.
15. **van Genuchten T. M.** A closed form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soil // *Soil Sci. Soc. Amer. J.* 1980. V. 44. P. 892–898.
16. **Shimizu H.** Air permeability of deposited snow. Sapporo: Inst. of Low Temperature Sci., 1970.

*Поступила в редакцию 28/VIII 2019 г.,
после доработки — 12/V 2020 г.
Принята к публикации 25/V 2020 г.*
