

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕГУЛЯРНОГО ОТРАЖЕНИЯ УДАРНЫХ ВОЛН

В. М. Тешуков

(Новосибирск)

Как известно, задача обтекания бесконечного клина установившимся сверхзвуковым потоком невязкого газа имеет неединственное решение [1]. Одно из решений определяет течение со слабым присоединенным скачком уплотнения, второе — с сильным скачком. В задаче о регулярном отражении косоугольного скачка уплотнения от жесткой стенки возникает аналогичная неединственность (сильный и слабый отраженные скачки). В данной работе исследуется устойчивость течений со слабым и сильным отраженными скачками относительно малых нестационарных возмущений. Установлены корректность задачи о возмущениях течения со слабым отраженным скачком и некорректность задачи о возмущениях течения с сильным скачком. Этот результат определяет границы устойчивости регулярного отражения ударных волн. Вопросы устойчивости течений с сильными и слабыми скачками давно привлекают внимание исследователей [2]. Аналитические результаты ранее были получены только для модельных упрощенных постановок газодинамической задачи о возмущениях [3—5]. Утверждения об устойчивости течений со слабыми скачками и о неустойчивости течений с сильными высказывались в [5, 6] в связи с анализом результатов вычислительных экспериментов.

1. Постановка задачи. Рассмотрим установившееся течение невязкого нетеплопроводного газа, возникающее при отражении косоугольного скачка уплотнения от жесткой стенки. Пусть Γ_0 — падающий скачок уплотнения (рис. 1), Γ_1 — отраженный скачок уплотнения, $y = 0$ соответствует жесткой стенке. Плотности ρ_i , давления p_i , векторы скорости $\mathbf{u}_i = (u_i, v_i)$ ($i = 0, 1, 2$, $v_0 = v_2 = 0$) в областях 0, 1, 2 постоянны, $p_2 > p_1 > p_0$. Эти величины связаны соотношениями Гюгонио на фронтах Γ_0, Γ_1 .

По заданным параметрам падающей ударной волны (величинам с индексами 0, 1) основные величины в области 2 можно найти методом ударных волн. Пусть q, ψ — полярные координаты в плоскости годографа: $u = q \cos \psi$, $v = q \sin \psi$. Из соотношений Гюгонио на ударной волне следует уравнение ударной волны

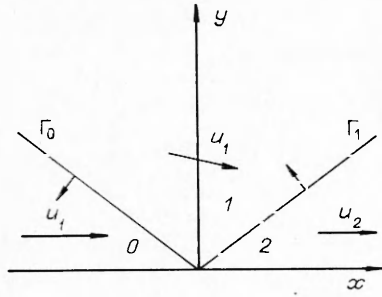
$$(1.1) \quad \psi - \psi_i = \pm \arcsin \left[\frac{(p - p_i)(\tau_i - \tau - \tau_i^2 q_i^{-2} (p - p_i))}{q_i^2 - (p - p_i)(\tau_i + \tau)} \right]^{1/2}.$$

Здесь $\tau = \rho^{-1}$; $\tau = \tau(p, \tau_i, p_i)$ в силу уравнения адиабаты Гюгонио; величины без индекса отвечают течению за скачком, с индексом — перед скачком. В [7] для уравнений состояния нормального газа получены условия, обеспечивающие единственность точки перехода через скорость звука на ударной волне (точки, где достигается равенство $q^2 = q_i^2 - (p - p_i)(\tau_i + \tau) = c^2$, c — скорость звука) и наличие только двух точек пересечения ударной волны с прямыми $\psi = \text{const}$ ($|\psi - \psi_i| < \psi_m$, ψ_m — предельный угол поворота вектора скорости в косом скачке). Эти условия считаем выполненными. Конфигурация ударных волн, соответствующая регулярному отражению косоугольного скачка уплотнения от стенки, изображена на рис. 2. Течение в области 2 определяется неоднозначно: точка 2 отвечает течению за слабым отраженным скачком, 2* — за сильным ($p_2^* > p_2$).

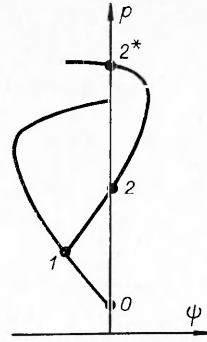
В [7] также показано, что в газах с уравнениями состояния $\varepsilon = \varepsilon(\tau, p)$, $p = g(\tau, S)$ (S — энтропия, ε — внутренняя энергия), удовлетворяющими условию

$$(1.2) \quad (p + \tau g_\tau) \varepsilon_p + p \tau \leq 0,$$

за сильным отраженным скачком течение всегда дозвуковое (политропный газ удовлетворяет (1.2)). Если же условие (1.2) нарушается, то течение за сильным скачком может быть и дозвуковым и сверхзвуковым. В данной работе рассматриваются нестационарные возмущения до-



Р и с. 1



Р и с. 2

звуковых течений как за слабым, так и за сильным отраженным скачком уплотнения.

В [8, 9] исследована устойчивость стационарных ударных волн относительно нестационарных возмущений. В [9] рассмотрены начальные возмущения, носитель которых лежит в полосе конечной ширины, прилегающей к ударному фронту. Установлено, что если параметры основного течения удовлетворяют неравенствам

$$(1.3) \quad -1 < \Delta < \frac{1 - M_n^2 - RM_n^2}{1 - M_n^2 + RM_n^2} \quad \left(R = \frac{\tau_i}{\tau} \right),$$

$$\Delta = \frac{p - p_i}{\tau_i - \tau} \frac{\partial \tau(p, \tau_i, p_i)}{\partial p}, \quad M_n = \frac{u_n}{c}, \quad u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n},$$

то возмущения на ударном фронте затухают с ростом времени. Если

$$(1.4) \quad \frac{1 - M_n^2 - RM_n^2}{1 - M_n^2 + RM_n^2} < \Delta < 1 + 2M_n,$$

то возмущения осциллируют и не затухают с ростом времени. При $\Delta > 1 + 2M_n$ или $\Delta < -1$ имеет место неустойчивость по линейному приближению.

Будем считать, что на падающем и отраженном скачках уплотнения выполнены условия (1.3) или (1.4). В [10] получено описание классов уравнений состояния, для которых на ударных волнах всегда выполняются либо неравенства (1.3), либо (1.4). В частности, (1.3) выполняются на любом ударном фронте тогда и только тогда, когда уравнения состояния удовлетворяют условию (1.2). В дальнейшем область параметров (1.3) будет называться областью сильной устойчивости, а область параметров (1.4) — нейтральной устойчивости. Следует отметить, что условия устойчивости (1.3), (1.4) еще не гарантируют корректность постановки задачи о возмущениях в областях 0, 1, 2. Для гиперболических систем уравнений известны примеры постановок задач в угловых областях, когда локально, в окрестности каждой грани, граничные условия определяют корректную задачу, но задача в угловой области в целом некорректна.

Пусть нестационарные изменения основного потока возникают за счет внесения возмущений в момент $t = 0$ в области 0. В силу сверхзвукового характера течения влияние этих возмущений распространится при $t > 0$ в области 1 и 2. Построение возмущенного решения в области 0 сводится к решению корректной смешанной задачи с данными Коши при $t = 0$ и условием непротекания при $y = 0$. В области 1 возмущения восстанавливаются в результате решения смешанной задачи с данными Коши при $t = 0$ и линеаризованными условиями Гюгонио на Γ_0 (эта задача рассматривалась в [9, 11]). После построения возмущений в областях 0, 1 остается найти возмущения в области 2.

Параметры течения в области 2 $\bar{u}, \bar{v}, \bar{p}, \bar{S}$ представим в виде

$$\bar{p} = p_2 + \rho_2 c_2^2 p, \quad \bar{u} = u_2 + c_2 u, \quad \bar{v} = c_2 v, \quad \bar{S} = S_2 (1 + S)$$

(u, v, p, S — безразмерные малые возмущения). Эти функции удовлетворяют линейризованным уравнениям газовой динамики

$$(1.5) \quad \begin{aligned} u_t + M u_x + p_x &= 0, \quad v_t + M v_x + p_y = 0, \\ p_t + M p_x + u_x + v_y &= 0, \quad S_t + M S_x = 0 \quad (M = u_2 c_2^{-1}) \end{aligned}$$

(в качестве независимых переменных выбраны декартовы координаты x, y и $t = \bar{t} c_2$, \bar{t} — время). Уравнение возмущенного отраженного ударного фронта запишем в форме

$$x = ay + \Phi(y, t) \quad \left(a = \left(\frac{u_2^2 (\tau_1 - \tau_2)}{\tau_2^2 (p_2 - p_1)} - 1 \right)^{1/2} \right).$$

Здесь $x = ay$ задает Γ_1 , а $\Phi(y, t)$ — искомое малое возмущение. Начально-краевые условия смешанной задачи, определяющей возмущения в области 2 ($x \geq ay, y \geq 0, t \geq 0$), имеют вид

$$(1.6) \quad \begin{aligned} t = 0: u = v = p = S = 0; \quad y = 0: v = 0; \\ x = ay: av - u = (1 + a^2)(1 - \Delta)(2M)^{-1}p + f_1(y, t), \\ au + v = M(R - 1)(1 + a^2)^{-1}\Phi_y + f_2(y, t), \\ p = 2M(R^{-1} - 1)(1 + a^2)^{-1}(1 + \Delta)^{-1}(\Phi_t + aM(1 + a^2)^{-1}\Phi_y) + \\ + f_3(y, t), \\ S = \rho_2 c_2^2 \left(1 - g_\tau(\tau_2, S_2) \frac{\partial \tau}{\partial p}(p_2, \tau_1, p_1) \right) (S_2 g_S(\tau_2, S_2))^{-1} p + f_4(y, t); \\ x = y = 0: \Phi(0, t) = x(t). \end{aligned}$$

Первая группа условий — данные Коши, затем следует условие непротекания при $y = 0$, затем — линейризованные условия Гюгонио на Γ_1 , последнее — условие прохождения отраженного ударного фронта через точку падения возмущенного падающего фронта. Здесь $f_i(y, t), x(t)$ — заданные функции, выражающиеся через известные параметры возмущенного потока в области 1.

Определим области параметров основного течения, соответствующие слабому и сильному отраженным скачкам. В точке 2 (см. рис. 2) $d\psi/dp > 0$, в точке 2* $d\psi/dp < 0$. Вычисление $d\psi/dp$ с помощью уравнения (1.1) приводит к выражению $(d\psi/dp)_2 = (a^2(1 - \Delta) - R(1 + \Delta))(2\rho_2 c_2^2 a M^2)^{-1}$. Поэтому слабому отраженному скачку отвечает область параметров, описываемая неравенством $a^2(1 - \Delta) - R(1 + \Delta) > 0$, а сильному отраженному скачку — область, описываемая обратным неравенством. Так как

$$\frac{a^2 - R}{a^2 + R} - \frac{1 - M_n^2 - RM_n^2}{1 - M_n^2 + RM_n^2} = \frac{2R(M^2 - 1)}{(a^2 + R)(1 - M_n^2 + RM_n^2)} < 0$$

при $M < 1$, то на слабом скачке обязательно выполнены условия сильной устойчивости (1.3). На сильном скачке при

$$\frac{a^2 - R}{a^2 + R} < \Delta < \frac{1 - M_n^2 - RM_n^2}{1 - M_n^2 + RM_n^2}$$

выполняются условия сильной устойчивости (1.3), в оставшейся области параметров — условия нейтральной устойчивости. Таким образом, исследование устойчивости регулярного отражения ударных волн сводится к задаче (1.5), (1.6). Заметим, что изучение нестационарных возмущений в области за присоединенным скачком уплотнения при обтекании бесконечного клина сводится к решению точно такой же задачи. Поэтому ре-

зультаты исследования задачи (1.5), (1.6) полностью применимы к анализу устойчивости обтекания клина сверхзвуковым потоком газа.

2. Построение решения. В области 2 удобно ввести полярные координаты $x = r \cos \theta$, $(1 - M^2)^{1/2}y = r \sin \theta$. В новых переменных области 2 соответствует полуполоса $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \theta_0$ ($\sin \theta_0 = (1 - M^2)^{1/2} \times \times (a^2 + 1 - M^2)^{-1/2}$, $\cos \theta_0 = a(a^2 + 1 - M^2)^{-1/2}$).

Рассмотрим преобразование Лапласа по времени вектор-функции $U = (u, v, p)$:

$$U_1(\lambda, r, \theta) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} U(t, r, \theta) dt.$$

Введем также преобразование Лапласа по радиусу от вектора U_1 :

$$U_2(\lambda, z, \theta) = \int_0^{\infty} e^{-zr} U_1(\lambda, r, \theta) dr.$$

Требование квадратичной суммируемости $|U_1(\lambda, r, \theta)|$ по r обеспечивает аналитичность $U_2(\lambda, z, \theta)$ при положительном $\operatorname{Re} \lambda$ в области $\operatorname{Re} z > 0$. Для построения решения задачи (1.5), (1.6) введем новые искомые функции $\eta(\lambda, \mu, \theta)$, $\sigma(\lambda, \mu, \theta)$, $L(\lambda, \mu, \theta)$ ($\mu = z + kM \cos \theta$, $k = \lambda(M^2 - 1)^{-1}$):

$$(2.1) \quad \begin{aligned} 2\eta &= (\mu^2 - k^2)^{1/2} P_3 + U_3 k i \sin \theta - V_3 i (k \cos \theta - M\mu)(1 - M^2)^{-1/2}, \\ 2\sigma &= (\mu^2 - k^2)^{1/2} P_3 - U_3 k i \sin \theta + V_3 i (k \cos \theta - M\mu)(1 - M^2)^{-1/2}, \\ L &= (kM \cos \theta - \mu) P_3 + U_3 (k \cos \theta - M\mu) + k \sin \theta (1 - M^2)^{1/2} V_3 \end{aligned}$$

($U_3(\lambda, \mu, \theta) = (U_3, V_3, P_3) = U_2(\lambda, \mu - kM \cos \theta, \theta)$). Отметим, что последнее уравнение системы (1.5) можно проинтегрировать независимо от остальных. При известных u, v, p , Φ функция S однозначно определяется с помощью условий (1.6). Поэтому в дальнейшем будем изучать независимую подсистему из первых трех уравнений (1.5), используя граничные условия (1.6), не содержащие S . Преобразованные уравнения (1.5) имеют вид

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \eta_{\theta} + i(\mu^2 - k^2)^{1/2} \eta_{\mu} &= 0, \quad \sigma_{\theta} - i(\mu^2 - k^2)^{1/2} \sigma_{\mu} = 0, \\ L_{\theta} + (M\mu \cos \theta - k)(M \sin \theta)^{-1} L_{\mu} &= 0. \end{aligned}$$

Ниже используется вспомогательная комплексная переменная, связанная с μ соотношением $\mu = 2^{-1}k(\xi + \xi^{-1})$. Ветвь обратного отображения $\xi = \xi(\mu)$ выбирается таким образом, что области аналитичности функции $U_3(\lambda, \mu, \theta)$ $\operatorname{Re} \mu > k_1 M \cos \theta$ ($k = k_1 + ik_2$) соответствует следующая область D_{θ} , принадлежащая внешности единичного круга $\beta = |\xi| \geq 1$ плоскости $\xi = \beta e^{i\varphi}$:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \text{а) } \kappa \in (\pi/2, \pi]: \quad \beta &\geq 1, \\ 2\pi - \varphi_1(\theta, \kappa, \beta) - \varphi_2(\theta, \kappa, \beta) &< \varphi < 2\pi + \varphi_1(\theta, \kappa, \beta) + \varphi_2(\theta, \kappa, \beta); \end{aligned}$$

$$\text{б) } \kappa \in [\pi, 3\pi/2): \quad \beta \geq 1, \\ \varphi_2(\theta, \kappa, \beta) - \varphi_1(\theta, \kappa, \beta) < \varphi < \varphi_2(\theta, \kappa, \beta) + \varphi_1(\theta, \kappa, \beta).$$

Здесь $\varphi_1(\theta, \kappa, \beta) = \arccos[2M\beta \cos \theta \cos \kappa((\beta^2 - 1)^2 + 4\beta^2 \cos^2 \kappa)^{-1/2}]$; $\varphi_2(\theta, \kappa, \beta) = \arccos[\cos \kappa(\beta^2 + 1)((\beta^2 - 1)^2 + 4\beta^2 \cos^2 \kappa)^{-1/2}]$; $\cos \kappa = k_1 |k|^{-1}$; $\sin \kappa = k_2 |k|^{-1}$.

Ветвь $(\mu^2 - k^2)^{1/2}$ выбирается так, что $(\mu^2 - k^2)^{1/2} = 2^{-1}k(\xi - \xi^{-1})$. Система (2.2) интегрируется, ее общее решение имеет вид

$$(2.4) \quad \eta = f(\xi e^{-i\theta}), \quad \sigma = l(\xi e^{i\theta}), \quad L = W[(\mu M - k \cos \theta)/(M \sin \theta)],$$

где f, l, W — произвольные аналитические функции (зависимость от λ в обозначении не указана). Эти функции должны определяться с помощью преобразованных граничных условий (1.6). Из преобразованных соотношений (1.6) можно исключить функцию $\Phi_3(\lambda, \mu)$, связанную с $\Phi(y, t) = \Phi(r(a^2 + 1 - M^2)^{-1/2}, t)$ теми же преобразованиями, которые связы-

вают $U_3(\lambda, \mu, \theta)$ с $U(t, r, \theta)$. Остаются следующие условия:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \theta = 0: \quad \eta - \sigma &= 0; \\ \theta = \theta_0: \quad \eta &= h\sigma + H, \quad L = N\eta + Q\sigma + K. \end{aligned}$$

Коэффициенты h, H, N, Q, K задаются выражениями:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} h &= - \frac{M^2 R (1 + \Delta) X^2 - (a^2 + 1 - M^2)(1 - \Delta) Y^2 + iM(1 - M^2)^{1/2}(a^2 + 1 - M^2)Y(\xi^2 - 1)}{M^2 R (1 + \Delta) X^2 - (a^2 + 1 - M^2)(1 - \Delta) Y^2 - iM(1 - M^2)^{1/2}(a^2 + 1 - M^2)Y(\xi^2 - 1)}, \\ H &= \frac{-kM(\xi - \xi^{-1})}{M^2 R (1 + \Delta) X^2 - (a^2 + 1 - M^2)(1 - \Delta) Y^2 - iM(1 - M^2)^{1/2}(a^2 + 1 - M^2)Y(\xi^2 - 1)} \times \\ &\quad \times \left[\frac{MX^2(1 + \Delta)R}{2} F_{33} + \frac{M(a^2 + 1 - M^2)^{1/2}}{1 + a^2} XYF_{23} + \frac{a^2 + 1 - M^2}{1 + a^2} Y^2 F_{13} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{M^2(1 - R)(M^2 - 1)(a^2 + 1 - M^2)^{1/2}}{1 + a^2} X\xi Z(\lambda) \right], \\ N &= \frac{(M \operatorname{ch}(v - i\theta_0) - 1)(M \operatorname{ch}(v + i\theta_0) - 1)}{M \operatorname{sh} v (\operatorname{ch} v - M \cos \theta_0)} \times \\ &\quad \times \left[\frac{ia(1 - M^2)^{1/2} \operatorname{sh}(v - i\theta_0) - \operatorname{ch}(v - i\theta_0) + M}{M \operatorname{ch}(v - i\theta_0) - 1} + \frac{(1 + a^2)(1 - \Delta)}{2M} \right], \\ Q &= \frac{(M \operatorname{ch}(v - i\theta_0) - 1)(M \operatorname{ch}(v + i\theta_0) - 1)}{M \operatorname{sh} v (\operatorname{ch} v - M \cos \theta_0)} \times \\ &\quad \times \left[\frac{-ia(1 - M^2)^{1/2} \operatorname{sh}(v + i\theta_0) - \operatorname{ch}(v + i\theta_0) + M}{M \operatorname{ch}(v + i\theta_0) - 1} + \frac{(1 + a^2)(1 - \Delta)}{2M} \right], \\ K &= \frac{k(M \operatorname{ch}(v + i\theta_0) - 1)(M \operatorname{ch}(v - i\theta_0) - 1)}{M (\operatorname{ch} v - M \cos \theta_0)} F_{13}, \quad Z(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} x(t) dt. \end{aligned}$$

Здесь $X = 2^{-1}(a^2 + 1 - M^2)^{1/2}(\xi^2 + 1) - aM\xi$; $Y = 2^{-1}aM(\xi^2 + 1) - \xi(a^2 + 1 - M^2)^{1/2}$; F_{13} получены из $f_i(y, t) = f_i(r(a^2 + 1 - M^2)^{-1/2}, t)$ теми же преобразованиями, что U_3 из U ; комплексная переменная v связана с μ соотношением $\mu = k \operatorname{ch} v$. Задача сводится к построению функций f, l, W , удовлетворяющих условиям (2.5). Дополнительные соотношения и ограничения на эти функции, связанные с выбором решений исходной задачи из определенного класса, сформулированы ниже. При построении образов Лапласа решения задачи о возмущениях используются методы решения краевых задач теории функций комплексного переменного. В качестве вспомогательной задачи здесь возникает задача Римана [12], затем решение задачи Римана аналитически продолжается в более широкую область. При вычислении индекса задачи Римана и при выяснении условий существования аналитического продолжения решается вопрос о существовании решения исходной задачи.

После построения функций u, v, p функция $\Phi(y, t)$, задающая положение возмущенного отраженного фронта, однозначно находится с помощью условий (1.6).

Из (2.5) следует, что $f(\xi) = l(\xi)$ и

$$(2.7) \quad f(\xi e^{-i\theta_0}) = h(\xi) f(\xi e^{i\theta_0}) + H(\xi)$$

(λ в обозначениях опущена). Функция W в силу (2.5) выражается через f . Таким образом, достаточно построить функцию f . Аналитическая функция P_3 восстанавливается через f по формуле

$$(2.8) \quad P_3 = \frac{f(\xi e^{i\theta}) + f(\xi e^{-i\theta})}{(\mu^2 - k^2)^{1/2}} = \frac{2(f(\xi e^{i\theta}) + f(\xi e^{-i\theta}))}{k(\xi - \xi^{-1})},$$

а функции U_3, V_3 — по формулам, следующим из (2.1). Отметим, что при $\operatorname{Re} \lambda > 0$ точка ветвления $\mu = -k$ отображения $(\mu^2 - k^2)^{1/2}$ попадает

в область $\text{Re } \mu > k_1 M \cos \theta$, поэтому для аналитичности $P_3(\lambda, \mu, \theta)$ в указанной области необходимо, чтобы $f(\xi)$ удовлетворяла соотношению

$$(2.9) \quad f(\xi) = -f(\xi^{-1}), \quad |\xi| = 1$$

на участке границы $\beta = 1$ области D_θ , соответствующему разрезу в плоскости μ , соединяющему две точки ветвления $\mu = \pm k$. Из представления (2.8) также вытекает, что для аналитичности P_3 в D_θ необходима аналитичность f в области $D_\theta^1 = D_\theta \cup D_\theta^+ \cup D_\theta^-$, где $D_\theta^{\pm} = \{\xi: \xi = \xi_0 e^{\pm i\theta}, \xi_0 \in D_\theta\}$. Нас интересуют решения $p(t, r, \theta)$, ограниченные при $r = 0$. Согласно известным свойствам преобразования Лапласа,

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty, \text{arg } \mu < \pi/2} (\mu P_2) = p|_{r=0},$$

поэтому решение уравнений (2.7), (2.9) следует искать в классе функций, аналитических в D_θ^1 и ограниченных при $|\xi| \rightarrow \infty$.

Построение функции $f(\xi)$, удовлетворяющей соотношениям (2.7), (2.9) в D_θ^1 , можно свести к решению задачи Римана. Достаточно заметить, что если f известна в секторе $S_{\theta_0} = \{\xi: \pi - \theta_0 \leq \varphi \leq \pi + \theta_0, \beta \geq 1\}$ ($S_{\theta_0} \subset D_\theta^1$), то за пределы сектора эта функция аналитически продолжается с помощью (2.7). Действительно, для $\pi - 3\theta_0 \leq \varphi \leq \pi - \theta_0$ продолжение осуществляется по формуле

$$(2.10) \quad f(\xi) = h(\xi e^{i\theta_0}) f(\xi e^{i2\theta_0}) + H(\xi e^{i\theta_0}),$$

а для $\pi + 3\theta_0 < \varphi < \pi + \theta_0$ — по формуле

$$(2.11) \quad f(\xi) = (f(\xi e^{-2i\theta_0}) - H(\xi e^{-i\theta_0})) (h(\xi e^{-i\theta_0}))^{-1}.$$

Последовательное продолжение с помощью (2.10), (2.11) позволяет доопределить $f(\xi)$ всюду в D_θ^1 , если известны значения f в S_{θ_0} . Для построения f в секторе отобразим конформно S_{θ_0} на плоскость с разрезом по положительной действительной полуоси. Отображение имеет вид

$$\zeta = 2^{-1} - 4^{-1} \left(e^{-i\pi^2/\theta_0} \xi^{\pi/\theta_0} + e^{i\pi^2/\theta_0} \xi^{-\pi/\theta_0} \right) \\ \left(\xi^{\pi/\theta_0} = \rho^{\pi/\theta_0} e^{i\pi\varphi/\theta_0} \text{ для } \xi = \beta e^{i\varphi}, \quad \pi - \theta_0 \leq \varphi \leq \pi + \theta_0 \right).$$

В плоскости ζ возникает задача Римана: требуется найти функцию f , аналитическую на плоскости с разрезом $\text{Im } \zeta = 0, 0 < \text{Re } \zeta = \zeta_1 < \infty$, ограниченную на бесконечности и удовлетворяющую условию сопряжения при $\text{Im } \zeta = 0$:

$$f^+(\zeta_1) = G(\zeta_1) f^-(\zeta_1) + m(\zeta_1) \quad (0 < \zeta_1 < \infty), \\ G(\zeta_1) = \begin{cases} -1, & 0 < \zeta_1 < 1, \\ h(-(\zeta_1^{1/2} + (\zeta_1 - 1)^{1/2})^{2\theta_0/\pi}), & 1 < \zeta_1 < \infty, \end{cases} \\ m(\zeta_1) = \begin{cases} 0, & 0 < \zeta_1 < 1, \\ H(-(\zeta_1^{1/2} + (\zeta_1 - 1)^{1/2})^{2\theta_0/\pi}), & 1 < \zeta_1 < \infty \end{cases}$$

f^\pm — предельные значения f из верхней и нижней полуплоскости). Согласно (2.6), при $1 < \zeta_1 < \infty$ $G(\zeta_1) = (A - iB)(A + iB)^{-1}$, причем $A(1) = 0$, $B(1) = (R(1 + \Delta)(a^2 + 1 - M^2)^{-1} - (1 - \Delta)M^{-2})(aM + (a^2 + 1 - M^2)^{1/2})^2$, $A(\infty) = 2^{-1}a(1 - M^2)^{-1/2}$, $B(\infty) = 4^{-1}(R(1 + \Delta) - a^2(1 - \Delta))$. Если рассматривается основное течение со слабым отраженным скачком, то $B(\infty) < 0$, $B(1) < 0$. Для течения с сильным отраженным скачком $B(\infty) > 0$, при этом если на скачке выполнены условия (1.3), то $B(1) < 0$, а если параметры основного течения удовлетворяют условиям нейтральной устойчивости, то $B(1) > 0$. Контур, на котором задано условие сопряжения, удобно дополнить до действительной оси I , полагая $G = 1$, $m = 0$ при $-\infty < \zeta_1 < 0$.

Вопрос о разрешимости полученной задачи Римана с разрывными коэффициентами решается после вычисления ее индекса. Индекс задачи в классе функций, ограниченных в точках разрыва коэффициентов, можно вычислить по формуле [12]

$$\kappa = (2\pi)^{-1} \Delta \arg G(\xi_1)|_I, \quad 0 < (2\pi)^{-1} \arg (G(c_i - 0)/G(c_i + 0)) < 1$$

(c_i — точки разрыва $G(\xi_1)$). Подсчет по этой формуле осуществляется достаточно просто, так как изменения A и B вдоль контура в зависимости от параметров задачи известны. В результате имеем: а) $\kappa = -1$ для основного течения со слабым отраженным скачком; б) $\kappa = -2$ для основного течения с сильным отраженным скачком, на котором выполнены условия сильной устойчивости; в) $\kappa = -1$ для основного течения с сильным отраженным скачком уплотнения, на котором выполнены условия нейтральной устойчивости. Согласно общей теории, задача Римана однозначно разрешима в случаях а, в. В случае б решение существует лишь тогда, когда правая часть $m(\xi_1)$ удовлетворяет условию разрешимости вида

$$\int_1^{\infty} m(\xi_1) N(\xi_1) d\xi_1 = 0$$

($N(\xi_1)$ — функция, которая вычисляется по коэффициентам задачи [12]). Следовательно, в случае б задача о возмущениях при общих данных неразрешима. Явные формулы, по которым можно вычислить f через G , m в случаях а, в, приведены в [12].

В последних двух случаях необходимо продолжить f из сектора в область $D_{\theta_n}^1$. Продолжение будет аналитическим, если функция $h(\xi)$ не имеет полюсов при $\text{Im } \xi > 0$, а функция $(h(\xi))^{-1}$ не имеет полюсов при $\text{Im } \xi < 0$. Согласно (2.6), $h(\xi)$ является рациональной функцией — отношением двух полиномов четвертой степени. Кроме того, из (2.6) следует, что $h(\xi) = (h(\xi^{-1}))^{-1}$. Поэтому, если $\xi = a$ — корень полинома в знаменателе, то $\xi = a^{-1}$ — корень полинома в числителе. Полюсы функции $h(\xi)$ определяются как корни уравнения

$$(2.12) \quad M^2 R(1 + \Delta) X^2 - (a^2 + 1 - M^2) Y^2 (1 - \Delta) - iM(1 - M^2)^{1/2} (a^2 + 1 - M^2) Y(\xi^2 - 1) = 0.$$

Лемма. Если параметры основного течения удовлетворяют условиям сильной устойчивости (1.3), то полином (2.12) не имеет корней в области $\text{Im } \xi > 0$. Если для основного течения на отраженном скачке выполнены условия нейтральной устойчивости (1.4), то полином (2.12) на границе области D_{θ_n} имеет корень $a = e^{i\gamma_1}$, $\theta_1 < \gamma_1 < \pi$ ($\cos \theta_1 = M \cos \theta_0$, $\sin \theta_1 = (a^2 + 1)^{1/2} \sin \theta_0$).

Доказательство. С помощью дробно-линейной подстановки

$$(2.13) \quad T = (\xi - \alpha)(\alpha\xi - 1)^{-1}, \quad \alpha = e^{-i\theta_1}$$

уравнение (2.12) сводится к биквадратному

$$(2.14) \quad \left(1 + \frac{1 - \Delta}{2M_n}\right) T^4 + \frac{1 - \Delta}{M_n} \left(1 - \frac{2M_n^2 R}{1 - M_n^2} \frac{1 + \Delta}{1 - \Delta}\right) T^2 - 1 + \frac{1 - \Delta}{2M_n} = 0,$$

аналогичному уравнению (3.5) в [9]. Из результатов [9] следует, что при выполнении условий (1.3) корни T_i (2.14) удовлетворяют неравенствам $|T_i| < 1$. В силу (2.13) соответствующие корни a_i (2.12) удовлетворяют неравенствам $\text{Im } a_i < 0$.

Если же для основного потока выполнены неравенства (1.4), то, как показано в [9], уравнение (2.14) имеет два корня внутри единичного круга (для соответствующих a_i $\text{Im } a_i < 0$) и два действительных корня, отличающихся знаком, вне единичного круга. В силу (2.13) действительном

корню $T_1 > 1$ отвечает корень полинома (2.12) $a = e^{i\gamma_1}$, $\theta_1 < \gamma_1 < \pi$, принадлежащий участку границы $\beta = 1$ области D_{θ_0} . Лемма доказана.

Из леммы вытекает, что для основного течения со слабым скачком $f(\xi)$ можно доопределить всюду в $D_{\theta_0}^1$, так как при аналитическом продолжении с помощью соотношений (2.10), (2.11) новых особенностей не появляется. Для основного течения с сильным отраженным скачком уплотнения, на котором выполнены условия нейтральной устойчивости, из леммы следует, что продолжение $f(\xi)$ обязательно имеет полюсы на границе области $D_{\theta_0}^1$: $\beta = 1$, что приводит к появлению полюсов функции $\bar{F}_s(\lambda, \mu, \theta_0)$ в области $\operatorname{Re} \mu > k_1 M \cos \theta_0$. Это означает, что в данном случае задача построения образов Лапласа решения задачи о возмущениях неразрешима в классе функций, аналитических в области $\operatorname{Re} \mu > k_1 M \cos \theta$. В частности, это ведет к отсутствию решений, интегрируемых с квадратом по переменной r .

Основные функции, описывающие возмущенное течение, восстанавливаются по найденному образу Лапласа применением обратного преобразования. С использованием представления решения задачи Римана можно выписать явные выражения для указанных функций. Оценки возмущений через данные задачи получаются с помощью оценок решения задачи Римана и равенства Парсеваля.

Единственность решения в довольно широком классе функций (функций, для которых имеют смысл примененные интегральные преобразования) следует из однозначности алгоритма построения образов Лапласа.

В итоге установлены корректность линейной задачи о возмущениях стационарного течения со слабым отраженным скачком уплотнения и некорректность соответствующей задачи для основного течения с сильным отраженным скачком. В силу аналогии постановок задач о возмущениях такие же выводы получены и для задачи обтекания бесконечного клина установившимся сверхзвуковым потоком газа при наличии присоединенных скачков уплотнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики.— М.: Наука, 1981.
2. Carrier G. F. On the stability of the supersonic flows past a wedge // *Quart. Appl. Math.*— 1949.— V. 6, N 4.
3. Henderson L. F., Atkinson J. D. Multi-valued solutions of steady-state supersonic flow. Pt 1. Linear analysis // *J. Fluid Mech.*— 1976.— V. 78, pt 4.
4. Блохин А. М., Роменский Е. И. Устойчивость предельного стационарного решения при обтекании кругового конуса // *Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук.*— 1978.— № 13, вып. 3.
5. Русанов В. В., Шаракшане А. А. Об устойчивости течений около бесконечного клина или конуса, помещенных в сверхзвуковой поток газа // *Современные проблемы математической физики и вычислительной математики.*— М.: Наука, 1982.
6. Salas M. D., Morgan V. D. Stability of shock waves attached to wedges and cones // *AIAA J.*— 1983.— V. 21, N 12.
7. Тешуков В. М. Об ударных полях в газе с общими уравнениями состояния // *ПММ.*— 1986.— Т. 50, вып. 1.
8. Дьяков С. П. Об устойчивости ударных волн // *ЖЭТФ.*— 1954.— Т. 27, № 3.
9. Иорданский С. В. Об устойчивости плоской стационарной ударной волны // *ПММ.*— 1957.— Т. 21, вып. 4.
10. Тешуков В. М. Об условиях устойчивости ударных волн // *Динамика сплошной среды.*— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1986.— Вып. 76.
11. Блохин А. М. Интегралы энергии и их приложения к задачам газовой динамики.— Новосибирск: Наука, 1986.
12. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения.— М.: Наука, 1968.

Поступила 1/VIII 1988 г.