УДК 532.529:518.5

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СЛАБЫХ УДАРНЫХ ВОЛН СО СЛОЕМ ПОРОШКООБРАЗНОЙ СРЕДЫ

А. Г. Кутушев, С. П. Родионов*

Тюменская государственная архитектурно-строительная академия, 625001 Тюмень
* Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики СО РАН, 625000 Тюмень

Приведены результаты аналитического и численного исследования взаимодействия линейных и слабонелинейных воздушных ударных волн с бесконечным насыпным слоем порошкообразной среды и слоем конечной толщины. Получены приближенные аналитические выражения для распределений давлений фаз в порошкообразной среде. Установлено, что для линейных волн давление газа на границе «газ — порошок» непрерывно, а для нелинейных волн — испытывает скачок. Выполнено сопоставление зависимостей давлений фаз на экранируемой твердой стенке, полученных на основе решения общей нелинейной системы уравнений движения порошкообразной среды и на основе приближенного аналитического решения линейных уравнений.

Вопросы импульсного воздействия ударных волн на твердые преграды, экранируемые слоем сыпучего материала, представляют большой практический и научный интерес. Это связано с тем, что согласно данным экспериментальных исследований [1–3] возможно как усиление, так и ослабление давления на стенке преграды в зависимости от параметров набегающей ударной волны (УВ) и экранирующего слоя насыпной среды. Попытки теоретического объяснения указанных эффектов в рамках простейшей модели [1] и на основе модели слоя с неподвижным скелетом порошка [2, 3] не привели к полному пониманию механизма усиления УВ.

В [4–6] применительно к условиям экспериментов [1] осуществлено численное моделирование задачи о взаимодействии УВ со слоем насыпного порошка, экранирующим твердую стенку. При этом использовалась двухскоростная, двухтемпературная, с двумя давлениями модель смеси газа и твердых частиц. Состояние скелета дисперсной фазы определялось нелинейно-упругим уравнением. Результаты моделирования удовлетворительно согласуются с данными опытов. Расчетным путем установлено [4–6], что межфазный теплообмен слабо влияет на динамику распространения УВ в слое порошка. Аналогичное [4] численное исследование, но с использованием модели вязкоупругого поведения скелета порошка выполнено в [7]. В [6–8] численно исследовано влияние параметров слоя сыпучей среды на усиление УВ на стенке. В [9] в рамках модели упругопластической пористой среды численно изучено распространение УВ в связанных (спеченных) порошках. В [10] выполнен анализ структуры сильных УВ в гетерогенных смесях твердых тел с учетом сжимаемости всех фаз.

В настоящей работе, являющейся продолжением [4–6], численно и аналитически исследуется воздействие слабой УВ на слой порошкообразной среды.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В случае слабых возмущений система уравнений движения газовой и дисперсной фаз порошкообразной среды [4–6] без учета процессов теплообмена приводится к следующему виду:

$$\frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \rho_{g,0}\,\frac{\partial v_g}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \rho_{s,0}\,\frac{\partial v_s}{\partial x} = 0,$$

$$\rho_{g,0}\,\frac{\partial v_g}{\partial t} + \alpha_{g,0}\,\frac{\partial p_g}{\partial x} = -\rho_{g,0}\,\frac{v_g - v_s}{\tau_{v,g}},$$

$$\rho_{s,0}\,\frac{\partial v_s}{\partial t} + \alpha_{s,0}\,\frac{\partial p_g}{\partial x} + \frac{\partial p_f}{\partial x} = \rho_{s,0}\,\frac{v_g - v_s}{\tau_{v,s}},$$

$$p_g = c_g^2(\rho_g^0 - \rho_{g,0}^0),$$

$$p_f = c_s^2(\rho_s - \rho_{s,0}), \quad \rho_s^0 = \text{const}, \qquad (1)$$

$$\rho_g = \rho^0_{g,0}(\alpha_g - \alpha_{g,0}) + \alpha_{g,0}(\rho^0_g - \rho^0_{g,0}),$$

$$\rho_s = \alpha_s\rho^0_s, \quad \rho_{s,0} = \alpha_{s,0}\rho^0_s,$$

$$\tau_{v,g} = \rho^0_{g,0}\,\frac{d^2}{150\mu_g}\Big(\frac{\alpha_{g,0}}{\alpha_{s,0}}\Big)^2,$$

$$\tau_{v,s} = \tau_{v,g}\,\frac{\rho_{s,0}}{\rho_{g,0}} = \tau_{v,g}\,\frac{\alpha_{s,0}}{\alpha_{g,0}\delta},$$

$$\alpha_{g,0} + \alpha_{s,0} = 1, \quad \delta = \frac{\rho^0_{g,0}}{\rho^0_s}.$$

Здесь ρ^0_i, α_i, v_i — соответственно истинная плотность, объемное содержание и массовая скорость i-й фазы порошкообразной среды ($i = g$ — газ и $i = s$ — дисперсные частицы); ρ_g — возмущение приведенной плотности газовой фазы; ρ_s — приведенная плотность фазы дисперсных частиц; p_g, p_f — возмущения давления в газе и межгранулярного давления частиц в порошкообразной среде; c_g, c_s — скорости звука в газе и порошке; μ_g — динамическая вязкость газа; d — диаметр частиц; $\tau_{v,g}$, $\tau_{v,s}$ — характерные времена релаксации скоростей газа и частиц соответственно; δ — отношение истинных плотностей фаз в насыпной среде; индексом нуль снизу отмечены параметры фаз в невозмущенном состоянии.

При $\delta \ll 1$ система линейных дифференциальных уравнений (1) приводится к следующему виду:

$$\frac{\partial^2 p_g}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau_{v,g}}\,\frac{\partial p_g}{\partial t} = c^2_g\,\frac{\partial^2 p_g}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 p_f}{\partial t^2} = c^2_s\,\frac{\partial^2 p_f}{\partial x^2} + F_f(x,t), \tag{2}$$

$$F_f(x,t) = c^2_s\alpha_{s,0}\,\frac{\partial^2 p_g}{\partial x^2} + \frac{\alpha_{g,0}}{C^2}\,\frac{1}{\tau_{v,g}}\,\frac{\partial p_g}{\partial t}, \quad C = \frac{c_g}{c_s}.$$

Из (2) видно, что уравнение для давления газа в порошке не зависит от межгранулярного давления p_f. Уравнение для p_f представляет собой уравнение вынужденных колебаний струны с источником $F_f(x,t)$. Первое слагаемое в выражении для источника $F_f(x,t)$ пропорционально производной по координате от силы Архимеда, которая зависит от распределения давления газа в слое порошка. Второе слагаемое характеризует силу межфазного трения, действующую на скелет порошкообразной среды.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УВ С БЕСКОНЕЧНЫМ СЛОЕМ ПОРОШКООБРАЗНОЙ СРЕДЫ

Рассмотрим (рис. 1) взаимодействие воздушной УВ ступенчатого вида с бесконечным слоем порошкообразной среды ($\alpha_{g,0} = 1$ при $x < 0$ и $0 < \alpha_{g,0} < 1$ при $x \geqslant 0$). Начальные и граничные условия для системы уравнений (2) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
x < 0:\ & p_g(-0,t) = p^{(-)}_b(t), \quad p_g(x,0) = p^{(i)},\\
& \frac{\partial p_g}{\partial t}(x,0) = 0;\\
x > 0:\ & p_g(+0,t) = p^{(+)}_b(t), \quad p_g(x,0) = 0,\\
& \frac{\partial p_g}{\partial t}(x,0) = 0,\\
& p_f(0,t) = 0, \qquad\qquad p_f(x,0) = 0,\\
& \frac{\partial p_f}{\partial t}(x,0) = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь и далее знаками (+) и (−) сверху отмечены величины, соответствующие положительным и отрицательным значениям пространственной координаты; $p_b(t)$ — возмущение давления на контактной границе «газ — порошок»; $p^{(i)}$ — возмущение давления в падающей УВ по отношению к невозмущенному атмосферному давлению p_0.

Для удобства за пространственные масштабы примем координаты точек, движущихся со скоростями звука в газе и порошке, и введем переменные

$$\xi_g = \frac{x}{c_g t}, \quad \xi_s = \frac{x}{c_s t} \quad (\xi_s = C\xi_g).$$

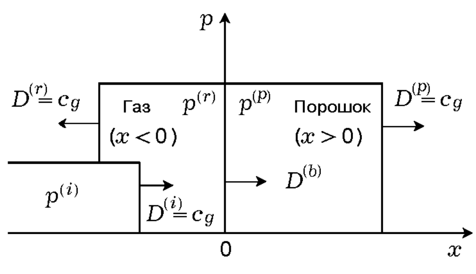

Рис. 1. Схематическое представление задачи о взаимодействии слабой УВ с насыпным слоем порошкообразной среды: $p^{(j)}$ — возмущения давлений за падающей, проходящей и отраженной ударными волнами, распространяющимися со скоростями $D^{(j)}$ ($j = i, p, r$); $D^{(b)}$ — скорость границы слоя порошкообразной среды

С использованием этих переменных в рамках Фурье-метода решение системы (2) с начальными и граничными условиями (3) имеет следующий вид [11, 12]:

$$p_g(\xi_g,t)=p_b(t)-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty u_g(\omega_g,t)\frac{\sin(\xi_g\omega_g t)}{\omega_g}\,d\omega_g,$$

$$u_g(\omega_g,t)=\int\limits_0^t\Phi(\omega_g,t-\tau)\frac{\partial p_b}{\partial\tau}\,d\tau,$$

$$p_f(\xi_s,t)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty u_f(\omega_s,t)\frac{\sin(\xi_s\omega_s t)}{\omega_s}\,d\omega_s,$$

$$u_f(\omega_s,t)=\frac{1}{\omega_s}\int\limits_0^t u_g'(\omega_s,\tau)\sin[\omega_s(t-\tau)]\,d\tau,$$

$$u_g'(\omega_s,t)=\omega_s^2\alpha_{s,0}u_g(\omega_{g,t})+ +\frac{\alpha_{g,0}}{C^2}\frac{1}{\tau_{v,g}}\frac{\partial}{\partial t}(p_b(t)-u_g(\omega_g,t)), \quad (4)$$

$$\Phi(\omega_g,t)=\begin{cases}\Phi^{(+)}(\omega_g,t), & \xi_g c_g t>0,\\ \Phi^{(-)}(\omega_g,t), & \xi_g c_g t<0,\end{cases}$$

$$\Phi^{(+)}(\omega_g,t)=\exp\Big(-\frac{t}{\tau_v}\Big)\times \times\Big[\mathrm{ch}\Big(f(\omega_g)\frac{t}{\tau_v}\Big)+\frac{1}{f(\omega_g)}\mathrm{sh}\Big(f(\omega_g)\frac{t}{\tau_v}\Big)\Big],$$

$$\Phi^{(-)}(\omega_g,t)=\cos(\omega_g t)$$

$$(f(\omega_g)=\sqrt{1-(\omega_g\tau_v)^2},\quad \tau_v=2\tau_{v,g}),$$

где ω_g и $\omega_s=\omega_g/C$ — частоты волновых возмущений в газе и скелете порошка, $\Phi(\omega_g,t)$ — решение, соответствующее случаю $p_b(t)=1$. Здесь, следуя уравнениям (2), принимается непрерывность давления газа по обе стороны границы порошкообразной среды:

$$p_b(t)=p_b^{(-)}(t)=p_b^{(+)}(t). \quad (5)$$

Изменение давления на контактной поверхности учитывается по экспоненциальному закону

$$p_b(t)=p_{b,0}+(p_e-p_{b,0})\Big[1-\exp\Big(-\frac{t}{\tau_b}\Big)\Big], \quad (6)$$

$$\tau_b\approx\tau_{v,g},$$

$$p_{b,0}=\frac{2p^{(i)}}{1+\alpha_{g,0}},\quad p_e=2p^{(i)},$$

где p_e — давление отражения от твердой стенки ($\alpha_{g,0}=0$), τ_b — характерное время изменения давления на границе «газ — порошок».

С учетом (6) решения уравнений для давлений фаз (4) принимают вид:
$\xi_s<0$:

$$p_g(\xi_s,t)=\begin{cases}p_{b,0}+(p_e-p_{b,0})\times\\ \quad\times[1-\exp(-(1+\xi_s)t/\tau_b)], \\ \qquad\qquad -C\leqslant\xi_s\leqslant 0,\\ p^{(i)}, \qquad \xi_s<-C;\end{cases}$$

$\xi_g,\xi_s>0$:

$$p_g(\xi_g,t)=p_b(t)-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty u_g(\omega_g,t)\frac{\sin(\xi_g\omega_g t)}{\omega_g}\,d\omega_g,$$

$$u_g(\omega_g,t)=p_{b,0}u_{g,0}(\omega_g,t)+ +(p_e-p_{b,0})u_{g,b}(\omega_g,t),\, u_{g,0}(\omega_g,t)=\Phi^{(+)}(\omega_g,t), \quad (7)$$

$$p_f(\xi_s,t)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty u_f(\omega_s,t)\frac{\sin(\xi_s\omega_s t)}{\omega_s}\,d\omega_s,$$

$$u_f(\omega_s,t)=p_{b,0}u_{f,0}(\omega_s,t)+(p_e-p_{b,0})u_{f,b}(\omega_s,t).$$

Здесь функции $u_{f,0}(\omega_s,t)$ и $u_{g,0}(\omega_g,t)$ соответствуют решениям при $p_b(t)=1$, а функции $u_{g,b}(\omega_g,t)$ и $u_{f,b}(\omega_s,t)$ характеризуют вклад в решение, который дает изменяемость давления на контактной поверхности. При $p_b(t)=\mathrm{const}$ эти функции равны нулю. Выражения для $u_{f,0}(\omega_s,t)$, $u_{g,b}(\omega_g,t)$ и $u_{f,b}(\omega_s,t)$ из-за громоздкости не приводятся.

Ввиду того, что $\tau_b\approx\tau_{v,g}$, рассмотрим поведение решений в области $\xi_s>0$ в предельных случаях $t/\tau_{v,g}$ и $t/\tau_{v,g}\to\infty$.

При $t/\tau_{v,g}\to 0$, когда межфазное трение незначительно, решение уравнений (2) за фронтом проходящей УВ в газе ($\xi_s=C$), а также в скелете порошкообразной среды определяется ступенчатыми функциями:

$$p_g(\xi_s,t)=\begin{cases}p_{b,0}, & 0<\xi_s\leqslant C,\\ 0, & \xi_s>C;\end{cases}$$

$$p_f(\xi_s, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant \xi_s < 1, \\ p_{b,0}\dfrac{\alpha_{s,0}}{C^2 - 1}, & 1 \leqslant \xi_s \leqslant C, \quad C > 1; \\ 0, & \xi_s > C, \end{cases} \qquad (8)$$

$$p_f(\xi_s, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant \xi_s \leqslant 1, \\ p_{b,0}\dfrac{\alpha_{s,0}}{1 - C^2}, & C \leqslant \xi_s \leqslant 1, \quad C < 1; \\ 0, & \xi_s > 1. \end{cases}$$

Из выражений (8) следует, что отношение перепадов давлений в ударных волнах, распространяющихся по газу и скелету порошка, равно

$$\frac{p_f}{p_{b,0}} = \frac{\alpha_{s,0}}{|1 - C^2|}.$$

Видно, что давление в скелете порошка увеличивается при близких значениях скоростей звука в газе и порошке, а при $C \to 1$ обращается в бесконечность. Это происходит из-за совпадения частоты вынуждающей силы, обусловленной действием сжатого газа, и собственной частоты колебаний скелета порошкообразной среды, т. е. резонанса.

В случае $t/\tau_{v,g} \to \infty$, когда межфазное трение играет основную роль (фильтрационный режим), при $\xi_s > 0$ получим следующее решение:

$$p_g = p_e \operatorname{erfc}\Big(\frac{\xi_s}{2C}\sqrt{\frac{t}{\tau_{v,g}}}\Big),$$

$$p_f = \begin{cases} p_e \operatorname{erf}\Big(\dfrac{\xi_s}{2C}\sqrt{\dfrac{t}{\tau_{v,g}}}\Big), & 0 < \xi_s \leqslant 1, \\ 0, & \xi_s > 1, \end{cases} \qquad (9)$$

$$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z), \quad \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \exp(-\xi^2)d\xi.$$

В решениях (9) вклад силы Архимеда в p_f пропорционален $\alpha_{s,0}$, а силы вязкого трения — $\alpha_{g,0}$. Суммарное действие этих сил приводит к значению $p_f \approx p_e$ на фронте волны в скелете. Таким образом, согласно (8) и (9) амплитуда $\bar{p}_{f,\max}$ безразмерного межгранулярного давления $\bar{p}_f = p_f/p_e$ изменяется во времени от начального значения

$$\bar{p}_{f,0} = \frac{\alpha_{s,0}}{|1 - C^2|}\frac{p_{b,0}}{p_e} = \frac{\alpha_{s,0}}{|1 - C^2|}\frac{1}{1 + \alpha_{g,0}}$$

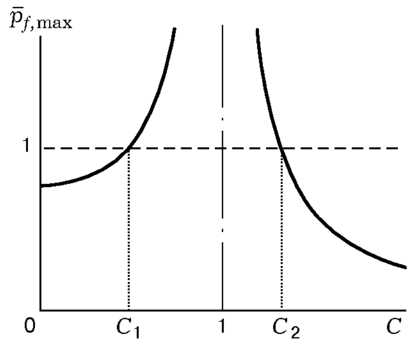

Рис. 2. Зависимости начальной (сплошные линии) и конечной (штриховая линия) амплитуд безразмерного межгранулярного давления $\bar{p}_{f,\max}$ от параметра C

до конечного $\bar{p}_{f,\infty} = 1$ (рис. 2). Видно, что при $C_1 < C < C_2$, где

$$C_1 = \sqrt{\frac{2\alpha_{g,0}}{1 + \alpha_{g,0}}}, \quad C_2 = \sqrt{\frac{2}{1 + \alpha_{g,0}}},$$

начальное значение амплитуды $\bar{p}_f$ больше конечного, а при $0 < C < C_1$ и $C_2 < C < \infty$ — меньше. Следовательно, величина $\bar{p}_f$ при данном значении C может увеличиваться или уменьшаться со временем в зависимости от интервала значений C. Таким образом, при $t/\tau_{v,g} = +0$ волновые структуры в фазах определяют параметры C и $\alpha_{s,0}$, а при $t/\tau_{v,g} \gg 1$ — величину C.

Рассмотрим эволюцию УВ в газе (рис. 3). Из рис. 3 следует, что начальная ступенчатая волна (кривая *1*) постепенно затухает и переходит в фильтрационную волну, описываемую функцией $\operatorname{erfc}(x)$ (кривая *3*). Процесс выхода

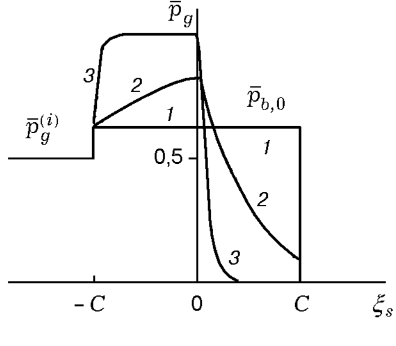

Рис. 3. Характерные зависимости безразмерного давления газовой фазы $\bar{p}_g = p_g/p_e$ от переменной ξ_s в различные моменты времени $t/\tau_{v,g}$:
1 — $t/\tau_{v,g} \ll 1$, *2* — $t/\tau_{v,g} \approx 1$, *3* — $t/\tau_{v,g} \gg 1$

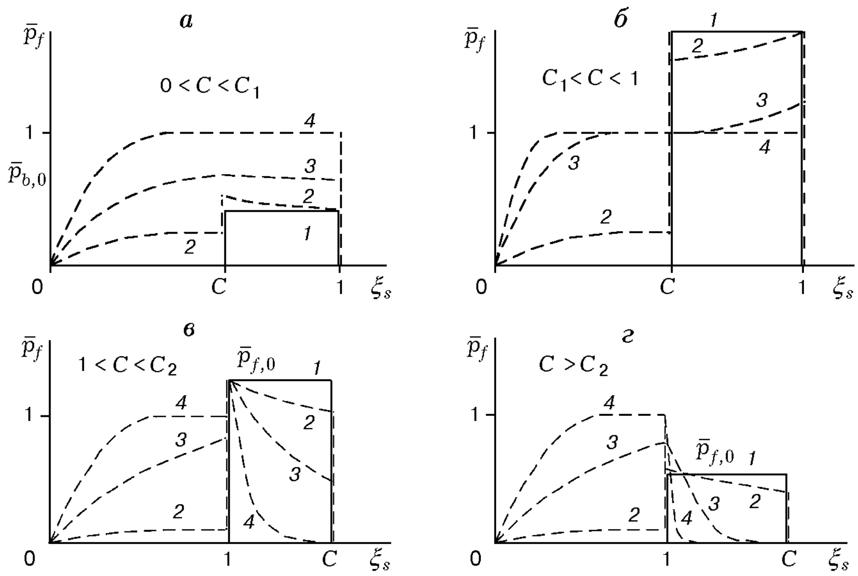

Рис. 4. Характерные зависимости межгранулярного давления от параметра ξ_s в различные моменты времени $t/\tau_{v,g}$:
$t/\tau_{v,g} = 0$ (*1*); 0,1 (*2*); 0,2 (*3*); 0,5 (*4*)

УВ в газе на фильтрационный режим распространения происходит за время $\approx 10\tau_{v,g}$.

Эволюцию волны сжатия в скелете порошкообразной среды при различных значениях параметра C иллюстрирует рис. 4. Из рис. 4,*а* видно, что при $C < 1$ межгранулярное давление из-за действия силы межфазного трения постепенно увеличивается во всей области $0 < \xi_s < 1$ и стремится к асимптотическому решению (9). Рис.4,*а* характеризует наиболее типичную волновую картину, возникающую в порошкообразной среде. Из рис. 4,*б* следует, что в отличие от рис. 4,*а*, на котором начальная амплитуда безразмерного межгранулярного давления меньше 1, здесь межгранулярное давление в области $C < \xi_s < 1$ уменьшается до значения $\bar{p}_f = 1$. Согласно рис. 4,*в* при $C > 1$ межгранулярное давление в области $0 < \xi_s < 1$ вследствие действия на скелет силы межфазного трения постепенно увеличивается, а в области $1 < \xi_s < C$ из-за затухания волны в газе — уменьшается. Из рис. 4,*г* видно, что в области $1 < \xi_s < C$ вблизи точки $\xi_s = 1$ значение $\bar{p}_f$ увеличивается, а в остальных точках — уменьшается до нуля. В области $0 < \xi_s < 1$ межгранулярное давление возрастает.

Для выявления отличительных особенностей распространения линейных и нелинейных УВ в порошкообразной среде методом [13, 14] были проведены численные расчеты процесса эволюции волн умеренной интенсивности с использованием системы нелинейных уравнений движения фаз [4–6]. Рис. 5 иллюстрирует процесс формирования волн давления в порошкообразной среде без учета силового и теплового взаимодействия фаз. Видно, что структуры нелинейных ударных волн в скелете и в газе, приведенные на рис. 5, качественно соответствуют ступенчатым распределениям p_g и p_f (8), полученным на основе линейных уравнений движения фаз. Особенности решений, соответствующих нелинейным уравнениям движения, состоят в образовании скачка полного напряжения смеси на границе «газ — порошок», а также в образовании небольшого перепада межгранулярного давления за контактной границей. Оба нелинейных эффекта обусловлены действием инерционных сил.

Рис. 6 иллюстрирует влияние силы межфазного трения на эволюцию ударных волн в фазах для условий, соответствующих рис. 5,*а*. Видно, что давление газа по обе стороны от контактной поверхности постепенно увеличивается, а разность этих давлений уменьшается. Воздушная УВ в межзеренном пространстве затухает, а волна в скелете принимает конфигурацию, подобную изображенной на рис. 4,*а*. Давление на фронте отраженной волны увеличивается. Отметим, что силовые эффекты значительно преобладают над тепловыми. Про-

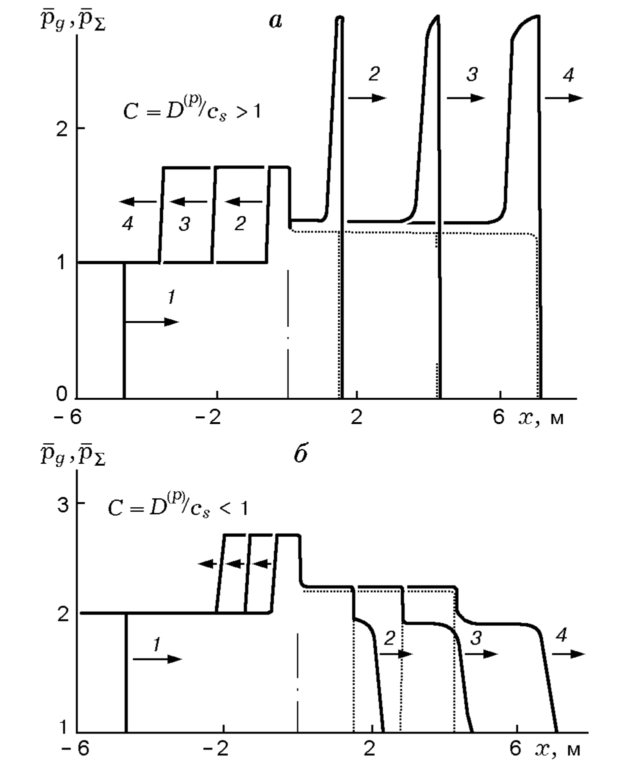

Рис. 5. Профили избыточного давления газовой фазы ($\bar p_g$, пунктирные линии) и избыточного давления смеси ($\bar p_\Sigma = \bar p_g + \bar p_f$, сплошные линии) в порошкообразной среде с $\alpha_{s,0}$ = 0,48, c_s = 420 м/с (*а*) и c_s = 800 м/с (*б*):

кривая *1* соответствует набегающей волне ($p^{(i)}/p_0$ = 1,0, p_e/p_0 = 2,75), кривые *2–4* — значениям времени 4, 8 и 12 мс; штрихпунктирная линия — начальная координата границы «газ — порошок» $x = 0$

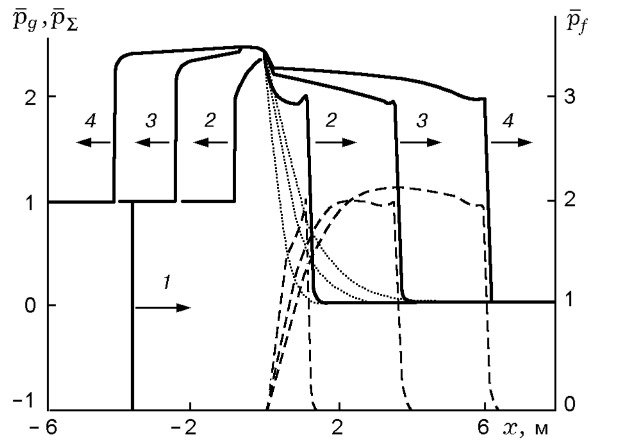

Рис. 6. Профили избыточного давления газовой фазы (пунктирные линии) и избыточного давления смеси (сплошные линии) в порошкообразной среде с $\alpha_{s,0}$ = 0,48, c_s = 420 м/с с учетом силового взаимодействия фаз порошкообразной среды с диаметром частиц d = 40 мм:

штриховые линии соответствуют безразмерному межгранулярному давлению частиц ($\bar p_f = p_f/p_0$)

цесс распространения УВ в скелете порошкообразной среды для данного варианта расчета можно считать близким к линейному.

В работах [15–18] показано, что в двухфазной среде с двумя значениями давления происходит распространение двух волн — «быстрой» и «медленной». Как следует из приведенных на рис. 3 и 4 результатов, первоначально быстрая волна в газе переходит в медленную (фильтрационную) и генерирует новую волну в скелете, которая становится быстрой.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УВ СО СЛОЕМ ПОРОШКООБРАЗНОЙ СРЕДЫ КОНЕЧНОЙ ПРОТЯЖЕННОСТИ

Применительно к сформулированной выше задаче рассмотрим линейные решения уравнений (2) для случая конечного слоя порошкообразной среды протяженностью l_s, который экранирует неподвижную твердую стенку. Начальные и граничные условия в области $0 \leqslant x \leqslant l_s$ для давлений газовой и дисперсной фаз имеют вид

$$\begin{gathered} p_g(x,0)=0, \quad p_g(0,t)=p_b(t), \\ \frac{\partial p_g}{\partial t}(x,0)=0, \quad \frac{\partial p_g}{\partial x}(l_s,t)=0, \\ p_f(x,0)=0, \quad p_f(0,t)=0, \\ \frac{\partial p_f}{\partial t}(x,0)=0, \quad \frac{\partial p_f}{\partial x}(l_s,t)=0. \end{gathered} \tag{10}$$

Обычно в экспериментах с конечными слоями порошкообразной среды регистрируется давление на твердой стенке. В этой связи решение задачи методом Фурье для давлений фаз на преграде ($x = l_s$) представим в следующем виде:

$$\begin{gathered} p_g(l_s,t)=p_{g,w}(t)=p_b(t)- \\ -\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{2n+1}u_g(\omega_{g,n},t), \\ p_f(l_s,t)=p_{f,w}(t)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{2n+1}u_f(\omega_{s,n},t), \end{gathered} \tag{11}$$

$$\omega_{s,n} = \frac{1}{\tau_{w,s}}\pi\Big(n+\frac{1}{2}\Big), \quad \omega_{g,n} = C\omega_{s,n},$$

$$\tau_{w,s} = \frac{l_s}{c_s}, \quad \tau_{w,g} = \frac{l_s}{c_g}, \quad \tau_{w,g} = \frac{\tau_{w,s}}{C}.$$

Здесь $\tau_{w,g}$ и $\tau_{w,s}$ — времена, за которые во́лны сжатия в газе и скелете порошка проходят расстояние, равное толщине слоя; $u_g(\omega_g,t)$, $u_f(\omega_s,t)$ и $p_b(t)$ определяются согласно (4), (6). Решение (11) зависит от безразмерных параметров $\tau_f/\tau_{w,s}$, C, $\alpha_{s,0}$ ($\tau_f = l_s^2/\tau_{v,g}c_g^2 = l_s^2/\varkappa_g$, здесь $\varkappa_g$ — коэффициент пьезопроводности газа). Параметр $\tau_f/\tau_{w,s}$ представляет собой отношение характерного времени релаксации давления газовой фазы в слое к времени, за которое волна сжатия в скелете порошка проходит расстояние l_s.

Обратимся к некоторым результатам расчетов «осциллограмм» давления фаз на основе линейных решений (11). На рис. 7,*а* представлены зависимости давления газа и давления смеси $p_\Sigma(t) = p_{g,w}(t) + p_{f,w}(t)$ на преграде. Видно, что давление газа монотонно возрастает, а давление смеси испытывает колебания, которые не затухают со временем. Увеличение p_Σ после скачка на первом максимуме можно объяснить плавным повышением давления газа на контактной границе. В случае односкоростной среды, соответствующей $\tau_{v,g} \to 0$, $p_{g,w}/p_e = 0$ (бесконечно большая сила трения на границе), наблюдается аналогичное колебательное поведение давления смеси на преграде (см. рис. 7,*а*), но с большей амплитудой. Большие значения амплитуды максимумов для односкоростной среды по сравнению с двухскоростной объясняются тем, что передача импульса газа слою на границе «газ — порошок» происходит в области, гораздо меньшей длины слоя. В случае двухскоростной среды наблюдается «размазывание» зоны передачи импульса, что и приводит к меньшим значениям давления p_Σ. При $l_s \to \infty$ значения амплитуд максимумов для односкоростной и двухскоростной моделей совпадают.

Как было отмечено выше, колебания давления на экранируемой стенке не затухают со временем. Однако результаты экспериментов [1–3] и численных расчетов [4–8] показывают, что колебания давления смеси на стенке быстро затухают и практически исчезают при выравнивании давления газа в насыпном слое, что соответствует прекращению действия вынуждающей силы $F_f(x,t)$. Отсутствие затухания колебаний на рис. 7,*а* можно объяснить тем, что не рассматривалось влияние дисперсной фазы на газ (которое составляет величину порядка δ), а также тепловых эффектов, приводящих к диссипации энергии колебаний. Влияние дисперсной фазы на газ позволит, в частности, учесть излучение волн от границы «газ — порошок» в газовое пространство, что приведет к уменьшению амплитуды колебаний в скелете порошка. Однако все эти факторы в силу своей малости не позволяют объяснить весьма интенсивное затухание максимумов давления на преграде. Отсутствие такого затухания связано с тем, что в приведенных выше решениях для p_f использовалось уравнение состояния линейно-упругого тела (1). Последнее справедливо, например, при наличии сцепления между частицами порошкообразной среды, когда ее деформации обратимы и энергия упругого сжа-

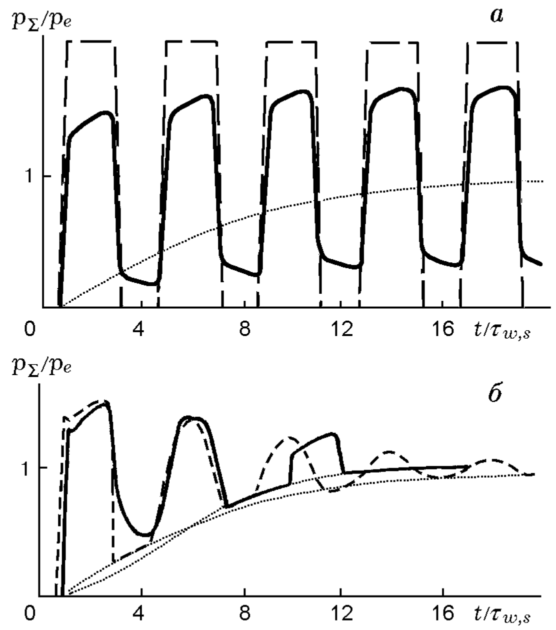

Рис. 7. Расчетные «осциллограммы» давления смеси (сплошные и штриховые линии) и давления газа (пунктирные линии) на преграде при $\alpha_{s,0} = 0{,}48$, $c_s = 420$ м/с, $d = 200$ мкм, $l_s = 10$ мм, $p^{(i)}/p_0 = 1{,}0$ ($p_e/p_0 = 2{,}75$):

а — сопоставление решений, соответствующих линейным уравнениям движения фаз с линейным уравнением состояния скелета по двухскоростной (сплошная и пунктирная линии) и односкоростной (штриховая линия) моделям; *б* — сравнение решений, полученных с использованием нелинейных [6] (сплошная линия) и линейных (штриховая) уравнений движения фаз (12) с нелинейно-упругим уравнением состояния скелета порошка тия — растяжения сохраняется. Эффект сильного затухания максимумов давления на преграде можно объяснить тем, что скелет порошкообразной среды подчиняется уравнению состояния нелинейно-упругого тела

$$p_f = \begin{cases} c_s^2(\rho_s - \rho_{s,0}), & \rho_s > \rho_{s,0}, \\ 0, & \rho_s \leqslant \rho_{s,0}, \end{cases}$$

которое учитывает необратимость деформаций в дисперсной фазе, т. е. диссипацию упругой энергии слоя. Отметим, что в случае односкоростной среды с точностью порядка δ колебания давления не затухают даже для уравнения состояния нелинейно-упругого тела. Это объясняется непрерывностью действия вынуждающей силы на контактной границе.

Как следует из приведенных выше зависимостей $p_{f,w}(t)$, изменение давления порошкообразной среды на экранируемой стенке со временем имеет периодический характер с периодом $T \approx 4\tau_{w,s}$. На основе полученных в [4–6] численных результатов можно предположить, что в случае уравнения состояния нелинейно-упругого тела, согласно которому межгранулярное давление не может быть отрицательным, зависимость $p_{f,w}(t)$ представляет собой совокупность максимумов, повторяющихся через период $T = 4\tau_{w,s}$.

Для получения зависимостей межгранулярного давления на стенке от времени для уравнения состояния нелинейно-упругого тела предполагается, что по прошествии времени $t = T$ давление в порошке, как и в начальный момент, становится равным нулю. Однако, за это время распределение давления газа в слое изменится, поэтому в начальное условие для вынуждающей силы, действующей со стороны газа на скелет порошка (источник $F_f(x,t)$), должны входить значения p_g не в момент $t = 0$, а в момент $t = T$. Рассуждая аналогично, можно вычислить амплитуды последующих максимумов.

Для достаточно больших значений l_s ($l_s \gg c_s\tau_{v,g}$), на которых формирование фильтрационной волны в газовой фазе завершилось, выражение для функции $\Phi^{(+)}(\omega_g,t)$ упрощается: $\Phi^{(+)}(\omega_g,t) = \exp(-\beta t)$, $\beta = C^2\omega_s^2\tau_{v,g} = \omega_g^2\tau_{v,g}$. Зависимости $p_{g,w}$ и $p_{f,w}$ от времени в этом случае принимают вид:

$$p_{g,w} = p_b(t) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{2n+1} u_g(\omega_{g,n}, t),$$

$$p_{f,w} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{2n+1} u_f^{(n)}(\omega_{s,n}, t'(t)),$$

$$u_g(\omega_g,t) = p_{b,0}\exp(-\beta t) + {}$$

$$+ (p_e - p_{b,0})\frac{\exp(-t/\tau_b) - \exp(-\beta t)}{\beta\tau_b - 1},$$

$$u_f^{(0)}(\omega_s,t) = J(\beta,\omega_s,t),$$

$$u_f^{(b)}(\omega_s,t) = \frac{J(1/\tau_b,\omega_s,t) - J(\beta,\omega_s,t)}{\beta\tau_b - 1},$$

$$u_f(\omega_s,t) = p_{b,0}u_f^{(0)}(\omega_s,t) + (p_e - p_{b,0})u_f^{(b)}(\omega_s,t), \tag{12}$$

$$u_f^{(n)}(\omega_s,t) = u_f(\omega_s,t'(t))A^{(0)}(\omega_s,t) + {}$$

$$+ (p_e - p_{b,0})J(1/\tau_b,\omega_s,t'(t))A^{(b)}(\omega_s,t),$$

$$A^{(0)}(\omega_s,t) = \exp(-\beta T_m),$$

$$A^{(b)}(\omega_s,t) = \frac{\exp(-T_m/\tau_b) - A^{(0)}(\omega_s,t)}{\beta\tau_b - 1},$$

$$J(\gamma,\omega,t) = \frac{\exp(-\gamma t) - \cos(\omega t) + \gamma\sin(\omega t)}{\omega^2+\gamma^2}\omega^2$$

$$\Big(\gamma = \frac{1}{\tau_b}, \beta\Big),$$

$$t'(t) = t - (m(t)-1)T, \quad T_m = (m(t)-1)T.$$

Здесь $t'(t)$ — время из интервала $(m-1)T < t' < mT$; m — номер максимума давления, который можно выразить через t следующим образом:

$$m(t) = 1 + \Big[\frac{t}{T}\Big],$$

в квадратных скобках указана целая часть отношения t/T. Из (12) следует, что амплитуды максимумов уменьшаются с увеличением их номера m приблизительно как $\exp(-\beta T_m)$. Решения для первого максимума на основе линейно-упругого и нелинейно-упругого уравнений состояния совпадают. Характерное количество максимумов пропорционально отношению времени релаксации давления газа в слое к времени циркуляции волны сжатия в порошке:

$$m - 1 \simeq \frac{1}{\omega_{s,0}^2 C^2 \tau_{v,g} T} = \frac{1}{\pi^2} \frac{\tau_f}{\tau_{w,s}}.$$

На рис. 7,*б* приведено сопоставление решений, полученных с использованием общих нелинейных [4–6] и линейных уравнений движения фаз (12). Из рисунка видно удовлетворительное согласование линейных и нелинейных решений, что свидетельствует о правильности сделанных допущений о механизме поведения слоя порошкообразной среды при ударно-волновом нагружении.

Формальный учет влияния нелинейности в линейных решениях для p_g и p_f (12), изображенных на рис. 7,*б*, проводился путем включения числа Рейнольдса в выражение для времени релаксации скорости газа [5, 6]:

$$\tau_{v,g} = \tau_{v,g}^0 \Big(1 + \frac{1{,}75}{150} \frac{\alpha_{g,0}}{\alpha_{s,0}} \mathrm{Re}\Big)^{-1},$$

$$\tau_{v,g}^0 = \rho_{g,0}^0 \frac{d^2}{150\mu_g} \Big(\frac{\alpha_{g,0}}{\alpha_{s,0}}\Big)^2,$$

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho_{g,0}^0 v_g d}{\mu_g}, \quad \rho_{g,0}^0 v_g = \tau_{v,g}^0 \frac{\partial p_g}{\partial x} \simeq \tau_{v,g}^0 \frac{p_e}{l_s},$$

$$\mathrm{Re} \simeq \frac{\tau_{v,g}^0 d}{\mu_g} \frac{p_e}{l_s}.$$

Все расчеты линейных решений выполнены с использованием программы «Mathcad». Время расчетов составляло в среднем 15 мин, что значительно меньше времени аналогичных расчетов (≈ 10 ч), выполненных при численном решении полной системы уравнений двухскоростного двухтемпературного движения фаз.

ВЫВОДЫ

Установлено, что на начальной стадии взаимодействия ударной волны со слоем порошкообразной среды (при $t/\tau_{v,g} \ll 1$) влияние силы вязкого трения на параметры образующихся волн существенно меньше, чем влияние силы Архимеда. Параметры волн сжатия зависят от отношения скоростей звука в газе и скелете порошка. На конечной стадии процесса (при $t/\tau_{v,g} \gg 1$) влияние силы вязкого трения возрастает и становится сравнимым с влиянием силы Архимеда.

Показано, что давление газа на границе «газ — порошок» в случае слабых (линейных) волн меняется непрерывно, а в случае нелинейных волн испытывает скачок. В обоих случаях с течением времени давление на границе порошкообразного слоя асимптотически стремится к давлению газа за ударной волной, отраженной от твердой непроницаемой стенки.

Затухание циркулирующих волн сжатия и разрежения в слое пористой среды существенно зависит от уравнения состояния порошка. В случае уравнений состояния линейно-упругого и нелинейно-упругого тел для порошка колебания полного давления смеси на твердой стенке имеют соответственно незатухающий (с точностью до δ) и затухающий характер.

Установлено, что процесс экранирования ударной волны слоем порошкообразной среды характеризуется следующими безразмерными параметрами: отношением скоростей распространения волн в газе и в порошке, начальным объемным содержанием дисперсных частиц и отношением характерного времени выравнивания давления в слое к времени циркуляции деформационной волны в слое. С использованием этих параметров получен критерий для оценки количества максимумов полного давления смеси на преграде.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гельфанд Б. Е., Медведев С. П., Поленов А. Н. и др.** Передача ударно-волновой нагрузки насыпными средами // ПМТФ. 1988. № 2. С. 115–121.
2. **Britan A., Ben-Dor G., Igra O., Jang J. P.** Mechanism of compressive stress formation during weak shock waves impact with granular materials // Experiments in Fluids. 1997. V. 22. P. 507–518.
3. **Britan A., Ben-Dor G., Elperin T. et al.** Gas filtration during the impact of weak shock waves on granular layers // Intern. J. Multiphase Flow. 1997. V. 23, N 3. P. 473–491.
4. **Кутушев А. Г., Рудаков Д. А.** Численное исследование воздействия ударной волны на преграду, экранируемую слоем порошкообразной среды // ПМТФ. 1993. Т. 34, № 5. С. 25–31.
5. **Kutushev A. G., Rodionov S. P.** Numerical investigation of influence of layer powdery media and incident shock wave parameters on process of variation of pressure on wall // Intern. Conf. on the Methods of Aerophysical Research: Proccedings. Pt II. Novosibirsk, 1998. P. 128–132.
6. **Кутушев А. Г., Родионов С. П.** Численное исследование влияния параметров слоя насыпной среды и падающей ударной волны на давление на экранируемой плоской стенке // Физика горения и взрыва. 1999. Т. 35, № 2. С. 105–113.

7. **Губайдуллин А. А., Урманчеев С. Ф.** Численное исследование прохождения воздушной ударной волны в насыщенную среду и отражения от жесткой стенки // Итоги исследований. Тюмень: ИММС СО РАН, 1992. Вып. 3. С. 12–15.
8. **Губайдуллин А. А., Дудко Д. Н.** Численное исследование отражения воздушных ударных волн от преград, покрытых пористым слоем // Итоги исследований. Тюмень: ИММС СО РАН, 1995. Вып. 6. С. 30–37.
9. **Фомин В. М., Ческидов П. А.** Упругопластическая модель пористой среды, насыщенной газом // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1982. С. 33–39.
10. **Федоров А. В., Федорова Н. Н.** Структура комбинированного разрыва в газовзвесях при наличии хаотического давления частиц // ПМТФ. 1992. № 4. С. 10–18.
11. **Смирнов В. И.** Курс высшей математики. М.: Наука, 1974. Т. 2.
12. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике. М.: Наука, 1970.
13. **Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М.** Метод крупных частиц в газовой динамике. М.: Наука, 1982.
14. **Кутушев А. Г., Рудаков Д. А.** Математическое моделирование динамического нагружения слоя пористой порошкообразной среды сжатым газом // Мат. моделирование. 1991. Т. 3, № 11. С. 65–75.
15. **Френкель Я. И.** К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // Изв. АН СССР. Сер. географии и геофизики. 1944. Т. 8, № 4. С. 133–150.
16. **Biot M. A.** Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid 1. Low frequence range // J. Acoust. Soc. Amer. 1956. V. 28, N 2. P. 169–178.
17. **Biot M. A.** Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid 2. Higher frequence range // J. Acoust. Soc. Amer. 1956. V. 28, N 2. P. 179–191.
18. **Nigmatulin R. I., Gubaidullin A. A.** Linear waves in saturated porous media // Transport in Porous Media. 1992. N 9. P. 135–142.

Поступила в редакцию 19/IV 1999 г.,
в окончательном варианте — 4/XI 1999 г.