

УДК 519.632.4

Неявный многослойный параллельный алгоритм для многомерного волнового уравнения*

С.Д. Алгазин

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук, просп. Вернадского, 101, корп. 1, Москва, 119526

E-mail: algszinsd@mail.ru

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 3, Vol. 15, 2022.

Алгазин С.Д. Неявный многослойный параллельный алгоритм для многомерного волнового уравнения // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2022. — Т. 25, № 3. — С. 241–247.

Рассматривается численный алгоритм без насыщения для волнового уравнения. Предполагается, что оператор Лапласа имеет дискретный действительный спектр, а соответствующая матрица дискретного оператора Лапласа имеет полную систему собственных векторов. Методика объясняется на примере одномерного уравнения, но в процессе изложения показано, что размерность здесь несущественна.

DOI: 10.15372/SJNM20220302

Ключевые слова: волновое уравнение, численный алгоритм без насыщения, вычислительный эксперимент.

Algazin S.D. An implicit multilayer parallel algorithm for multidimensional wave equation // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2022. — Vol. 25, № 3. — P. 241–247.

The numerical algorithm without saturation for wave equation is considered. It is supposed that Laplace's operator has the discrete, valid range, and the corresponding matrix of the discrete operator Laplace has the complete set of eigenvectors. The technique speaks the example of the one-dimensional equation, but during statement is shown that the dimension is insignificant here.

Keywords: wave equation, numerical algorithm without saturation, computing experiment.

Введение

В [1] рассмотрены численные алгоритмы без насыщения для решения стационарных задач математической физики. В настоящей работе эти результаты обобщаются на нестационарные задачи. Численные алгоритмы без насыщения предложены К.И. Бабенко [2] в начале 70-х годов прошлого века. Многолетнее применение этих методов к задачам математической физики автором настоящей работы доказало их высокую эффективность. Однако до сих пор рассматривались только стационарные задачи и уравнение теплопроводности. В настоящей работе этот пробел восполняется. Для примера рассмотрено одномерное волновое уравнение, но по ходу изложения будет показано, что размерность здесь несущественна. Поясним, как построен численный алгоритм без насыщения для рассматриваемого волнового уравнения:

*Работа выполнена по теме гос. задания (проект № АААА-А20-120011690132-4).

1. Для дискретизации по времени на отрезке $[0, 1]$ применяется интерполяционная формула Лагранжа, удовлетворяющая на левом конце однородным начальным условиям (узлы интерполяционной формулы указаны ниже, эти узлы получаются из нулей многочлена Чебышева степени k , определённого на отрезке $[-1, 1]$, соответствующей линейной заменой). Рассмотрение по времени отрезка $[0, 1]$ не нарушает общности, т. к. имеется в виду, что в реальной задаче при приведении задачи к безразмерному виду за характерное время выбран правый конец рассматриваемого диапазона по времени. Вторая производная по времени получается дифференцированием этой интерполяционной формулы. В результате получаем, что приближённо вектор вторых производных по времени в узлах сетки получается умножением некоторой матрицы B на вектор значений решения по времени в узлах сетки.
2. Дискретизация по пространственной переменной x аналогична. Только теперь интерполяционный многочлен степени m должен удовлетворять однородным краевым условиям на концах отрезка $[0, 1]$.
3. В результате получаем линейную дискретную задачу с матрицей размера $mk \times mk$. Для решения этой дискретной задачи нужно обратить построенную матрицу большого размера. В этом и состоит задача как вычислительная. Ниже построен параллельный алгоритм для эффективного обращения этой матрицы. Отметим, что решение получается сразу на всех слоях по времени (в узлах интерполяции по t , в остальных точках решение может быть вычислено по приведённой ниже интерполяционной формуле). В этом состоит отличие от классических разностных методов, в которых решение определяется шагами по времени.
4. Отметим, что применяемая дискретизация многочленами по времени и пространственной переменной реагирует на гладкость отыскиваемого решения, и её точность тем выше, чем большим условиям гладкости удовлетворяет отыскиваемое решение (по x и по t). Причём “а priori” эту гладкость знать не нужно, метод сам настроится на неё [3, с. 235]. Такие численные методы К.И. Бабенко предложил называть численными алгоритмами без насыщения [2]. Последний из опубликованных обзоров по численным алгоритмам без насыщения М.Б. Гаврикова смотри в [4]. Нестационарная задача рассмотрена численным алгоритмом без насыщения В.Н. Белых [5].

1. Постановка задачи

В прямоугольнике $D = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}$ рассмотрим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (x, t) \in D; \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x); \quad u'_t|_{t=0} = u_1(x); \quad (2)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0. \quad (3)$$

Очевидно, что, не нарушая общности, можно положить $u_0(x), u_1(x) \equiv 0$.

2. Дискретизация

По x приблизим искомую функцию $u(x, t)$ многочленом, для этого по x выберем сетку, состоящую из m узлов:

$$x_\mu = \frac{1}{2}(z_\mu + 1), \quad z_\mu = \cos \chi_\mu, \quad \chi_\mu = \frac{(2\mu - 1)\pi}{2m}, \quad \mu = 1, 2, \dots, m,$$

и применим интерполяционную формулу

$$q(x) = \sum_{\mu=1}^m \frac{T_m(x)(x-1)xq_\mu}{m \frac{(-1)^{\mu-1}}{\sin \chi_\mu} (x_\mu - 1)x_\mu(z - z_\mu)}, \quad q_\mu = q(x_\mu), \quad z = 2x - 1. \quad (4)$$

Вторую производную по x , входящую в уравнение (1), найдём дифференцированием интерполяционной формулы (4).

По t выберем сетку, состоящую из k узлов:

$$t_\nu = \frac{1}{2}(z_\nu + 1), \quad z_\nu = \cos \chi_\nu, \quad \chi_\nu = \frac{(2\nu - 1)\pi}{2k}, \quad \nu = 1, 2, \dots, k,$$

и также применим интерполяцию многочленом:

$$q(z) = \sum_{\nu=1}^k \frac{T_k(z)(z+1)q_\nu}{T'_k(z_\nu)(z_\nu + 1)(z - z_\nu)}, \quad t = \frac{1}{2}(z + 1), \quad z \in [-1, +1]; \quad (5)$$

$$Q(z) = q(z) - c(z + 1)T_k(z).$$

Величины, входящие в формулу (5), определены выше. Константу c выбираем из начального условия $Q'(-1) = 0$. Значения второй производной от $u(x, t)$ по t , входящие в левую часть соотношений (1), получим дифференцированием интерполяционной формулы (5).

Пусть A — матрица дискретного оператора $-\frac{d^2}{dx^2}$, тогда, обозначив $u_{\mu\nu} = u(x_\mu, t_\nu)$, $\mu = 1, 2, \dots, m$, $\nu = 1, 2, \dots, k$, получим

$$\frac{\partial^2 u(x_\mu, t)}{\partial t^2} + \sum_{p=1}^m A_{\mu p} u(x_p, t) = f(x_\mu, t).$$

Пусть B — матрица второго численного дифференцирования по t на $[0, 1]$. В результате получим

$$\sum_{q=1}^k B_{\nu q} u_{\mu q} + \sum_{p=1}^m A_{\mu p} u_{p\nu} = f_{\mu\nu}. \quad (6)$$

Занумеруем узлы сетки одним индексом по строкам (т.е. быстрее всего меняется первый индекс $I \rightarrow (\mu, \nu) = (\nu - 1)m + \mu$). Тогда получаем дискретную задачу

$$(B \otimes I_m + I_k \otimes A)u = f, \quad (7)$$

где B — матрица размера $k \times k$ — дифференцирование по t ; A — матрица размера $m \times m$ — второе дифференцирование по x ; I_m, I_k — единичные матрицы; знак $\otimes$ обозначает кронекерово произведение матриц (см. [6, с. 19]).

Представим A в следующем виде (см. [1]):

$$A = \sum_p \lambda_p h_p, \quad h_p^2 = h_p, \quad h_p h_l = 0, \quad p \neq l \Rightarrow \sum_p h_p = I_m \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
B \otimes \sum_p h_p + I_k \otimes \left(\sum_p \lambda_p h_p \right) &= \sum_p (B + \lambda_p I_k) \otimes h_p \Rightarrow \\
(B \otimes I_m + I_k \otimes A)^{-1} &= \sum_p (B + \lambda_p I_k)^{-1} \otimes h_p.
\end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом, решение дискретной задачи (6) получим умножением матрицы (8) на вектор правой части. Заметим, что для построения обратной к (8) матрицы достаточно обратить m матриц размера $k \times k$, где k — число узлов интерполяции по времени. Отметим также, что нигде не использовалась специфика матрицы A , т. е. A может быть матрицей двумерной, трёхмерной и любой другой размерности. Необходимо только, чтобы матрица имела полную систему собственных векторов и собственные значения были действительны.

3. Численные примеры

а. В качестве первого численного примера рассмотрим задачу (1)–(3) с правой частью

$$f(x, t) = -\sin(t) \sin(\pi x) + \pi^2 \sin(t) \sin(\pi x) - t \pi^2 \sin(\pi x),$$

тогда решение имеет вид

$$u(x, t) = \sin(t) \sin(\pi x) - t \sin(\pi x).$$

Результаты расчётов на сетках 5×10 и 10×10 представлены ниже.

$m = 5$, $k = 10$:

Точное решение

-0.11960 E-01	-0.93927 E-01	-0.15572 E+00	-0.93927 E-01	-0.11960 E-01
-0.10346 E-01	-0.81258 E-01	-0.13471 E+00	-0.81258 E-01	-0.10346 E-01
-0.76753 E-02	-0.60279 E-01	-0.99933 E-01	-0.60279 E-01	-0.76753 E-02
-0.47901 E-02	-0.37620 E-01	-0.62368 E-01	-0.37620 E-01	-0.47901 E-02
-0.24336 E-02	-0.19113 E-01	-0.31685 E-01	-0.19113 E-01	-0.24336 E-02
-0.95200 E-03	-0.74767 E-02	-0.12395 E-01	-0.74767 E-02	-0.95200 E-03
-0.25949 E-03	-0.20380 E-02	-0.33786 E-02	-0.20380 E-02	-0.25949 E-03
-0.40161 E-04	-0.31541 E-03	-0.52290 E-03	-0.31541 E-03	-0.40161 E-04
-0.20715 E-05	-0.16269 E-04	-0.26971 E-04	-0.16269 E-04	-0.20715 E-05
-0.29860 E-08	-0.23451 E-07	-0.38878 E-07	-0.23451 E-07	-0.29860 E-08

Приближённое решение

-0.11958 E-01	-0.93927 E-01	-0.15572 E+00	-0.93927 E-01	-0.11958 E-01
-0.10345 E-01	-0.81258 E-01	-0.13472 E+00	-0.81258 E-01	-0.10345 E-01
-0.76740 E-02	-0.60279 E-01	-0.99937 E-01	-0.60279 E-01	-0.76740 E-02
-0.47893 E-02	-0.37620 E-01	-0.62370 E-01	-0.37620 E-01	-0.47893 E-02
-0.24332 E-02	-0.19112 E-01	-0.31686 E-01	-0.19112 E-01	-0.24332 E-02
-0.95186 E-03	-0.74766 E-02	-0.12395 E-01	-0.74766 E-02	-0.95186 E-03
-0.25946 E-03	-0.20380 E-02	-0.33787 E-02	-0.20380 E-02	-0.25946 E-03
-0.40158 E-04	-0.31541 E-03	-0.52290 E-03	-0.31541 E-03	-0.40158 E-04
-0.20715 E-05	-0.16269 E-04	-0.26971 E-04	-0.16269 E-04	-0.20715 E-05
-0.29844 E-08	-0.23452 E-07	-0.38878 E-07	-0.23452 E-07	-0.29844 E-08

- чебышёвская норма матрицы, обратной к матрице дискретной задачи, BNORM = 0.26.
- чебышёвская норма разности точного и приближённого решений RNORM = $8.72 \cdot 10^{-6}$.

$m = 10, k = 10$:

- чебышёвская норма матрицы, обратной к матрице дискретной задачи, BNORM = 0.26.
- чебышёвская норма разности точного и приближённого решений RNORM = $2.74 \cdot 10^{-11}$.

Примечание. Оценка погрешности здесь тривиальна. Отметим только качественные особенности. Выше применялась интерполяция решения многочленами. Известно [2], что так построенный алгоритм не имеет насыщения, т.е. автоматически настраивается на гладкость решения задачи. Рассмотрение устойчивости при переходе со слоя на слой по времени, как в классическом разностном методе, здесь не нужно. Решение определяется сразу на всех слоях по времени. Для исследования абсолютной погрешности метода важно только следить за величиной нормы обратной к матрице дискретной задачи (BNORM); в приведённых примерах эта норма порядка единицы. Для исследования относительной погрешности метода нужно следить за числом обусловленности $\text{Cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$.

б. В качестве второго примера рассмотрим колебания круглой мембраны единичного радиуса:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^2(r, \vartheta, t)}{\partial t^2} &= \Delta u(r, \vartheta, t) + f(r, \vartheta, t), \quad r \leq 1; \\ \Delta u(r, \vartheta, t) &= \frac{\partial^2 u(r, \vartheta, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u(r, \vartheta, t)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u(r, \vartheta, t)}{\partial \vartheta^2}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$u|_{t=0} = 0; \quad u'_t|_{t=0} = 0; \quad (10)$$

$$u|_{r=1} = 0. \quad (11)$$

Функция $u(r, \vartheta, t) = \sin(t) r^2(r-1) \cos(\vartheta) - t r^2(r-1) \cos(\vartheta)$ является решением задачи (9)–(11) с соответствующей правой частью. Результаты расчётов на сетке $3 \times 3 \times 3$ для $m = 9, k = 3$:

- чебышёвская норма матрицы, обратной к матрице дискретной задачи, BNORM = 1.83.
- чебышёвская норма разности точного и приближённого решений RNORM = $5.36 \cdot 10^{-2}$.

Дискретизация по пространственным переменным проводилась программой Lap123 [6]¹.

в. В качестве третьего примера рассмотрим колебания квадратной мембраны $[0,1] \times [0,1]$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^2(x, y, t)}{\partial t^2} &= \Delta u(x, y, t) + f, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1; \\ \Delta u(x, y, t) &= \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2}; \end{aligned} \quad (12)$$

$$u|_{t=0} = 0; \quad u'_t|_{t=0} = 0; \quad (13)$$

$$u|_{x=0,1} = u|_{y=0,1} = 0. \quad (14)$$

¹Вычисление собственных чисел и собственных функций оператора Лапласа (Lap123). Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ и БД № 2012617739.

Функция $u(x, y, t) = \sin(t) x(x-1)y(y-1) - t x(x-1)y(y-1)$ является решением задачи (12)–(14) с соответствующей правой частью. Результаты расчётов на сетке $3 \times 3 \times 3$ для $m = 9, k = 3$:

- чебышёвская норма матрицы, обратной к матрице дискретной задачи, $\text{BNORM} = 0.21$.
- чебышёвская норма разности точного и приближённого решений $\text{RNORM} = 6.8 \cdot 10^{-2}$.

Дискретизация оператора Лапласа в прямоугольнике описана в BOXBIG^2 . Отметим, что возможна также разностная дискретизация по пространственным переменным HSEQ1D02^3 аналогично [7].

Заключение

Решение дискретной задачи (6) получим умножением матрицы (8) на вектор правой части. Заметим, что для построения обратной к (7) матрицы достаточно обратить m матриц размера $k \times k$, где k — число узлов интерполяции по времени. Это можно делать параллельно. В результате получаем приближённое решение на всех k слоях по времени. Отметим также, что нигде не использовалась специфика матрицы A , т. е. A может быть матрицей двумерной, трёхмерной и любой другой размерности. Необходимо только, чтобы матрица имела полную систему собственных векторов и её собственные значения были действительны. Отметим, что в статье рассматриваются только однородные краевые условия, общий случай краевых условий более сложен и выше не рассматривался.

Обозначения

k — число узлов по времени.

m — число узлов по пространственным переменным.

BNORM — чебышёвская норма матрицы, обратной к матрице дискретной задачи.

RNORM — чебышёвская норма разности точного и приближённого решений.

Литература

1. **Алгазин С.Д.** Численные алгоритмы без насыщения в классических задачах математической физики. 4-е изд. перераб. — М.: URSS, 2019.
2. **Бабенко К.И.** Основы численного анализа. — М.: Наука, 1986.
3. **Гончаров В.Л.** Теория интерполирования и приближения функций. — М.: Гостехтеориздат, 1954.
4. **Гавриков М.Б.** Методы без насыщения в вычислительной математике. — Москва, 2019. — (Препринт / ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР; 75).
5. **Белых В.Н.** Численные алгоритмы без насыщения в нестационарных задачах гидродинамики идеальной жидкости со свободными границами // Тр. Ин-та математики. — 1988. — Т. 11. — С. 3–67.
6. **Маркус М., Минк Х.** Обзор по теории матриц и матричных неравенств. — М.: Наука, 1972.

²Вычисление частот свободных колебаний пластины прямоугольной формы в плане (BOXBIG). Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ и БД № 2016662292.

³Трёхмерное уравнение теплопроводности в параллелепипеде (HSEQ1D02). Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ и БД № 2016664024.

7. **Алгазин С.Д.** Многослойный, неявный, параллельный алгоритм для уравнения теплопроводности в параллелепипеде // Инженерно-физический журнал. — Минск, 2015. — Т. 88, № 5. — С. 1096–1099.

Поступила в редакцию 8 июля 2021 г.

После исправления 26 ноября 2021 г.

Принята к печати 24 апреля 2022 г.

Литература в транслитерации

1. **Algazin S.D.** Chislennye algoritmy bez nasyscheniya v klassicheskikh zadachah matematicheskoi fiziki. 4-e izd. pererab. — M.: URSS, 2019.
2. **Babenko K.I.** Osnovy chislennogo analiza. — M.: Nauka, 1986.
3. **Goncharov V.L.** Teoriya interpolirovaniya i priblizheniya funktsii. — M.: Gostekhteorizdat, 1954.
4. **Gavrikov M.B.** Metody bez nasyscheniya v vychislitel'noi matematike. — Moskva, 2019. — (Preprint / IPM im. M.V. Keldysha AN SSSR; 75).
5. **Belyh V.N.** Chislennye algoritmy bez nasyscheniya v nestatsionarnykh zadachah gidrodinamiki ideal'noi zhidkosti so svobodnymi granitsami // Tr. In-ta matematiki. — 1988. — Т. 11. — С. 3–67.
6. **Markus M., Mink H.** Obzor po teorii matrits i matrichnykh neravenstv. — M.: Nauka, 1972.
7. **Algazin S.D.** Mnogosloynyi, neyavnyi, parallel'nyi algoritm dlya uravneniya teploprovodnosti v parallelepipedе // Inzhenerno-fizicheskii zhurnal. — Minsk, 2015. — Т. 88, № 5. — С. 1096–1099.

