

УДК 519.626.1

Вырожденное решение задачи минимизации расхода ресурса*

В.М. Александров

Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. В.А. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090

E-mails: vladalex@math.nsc.ru, alexhome@yandex.ru

Александров В.М. Вырожденное решение задачи минимизации расхода ресурса // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2016. — Т. 19, № 1. — С. 5–18.

Разработан итерационный метод решения вырожденной задачи минимизации расхода ресурсов. Метод основан на информации о структуре финитного управления. Получено условие возникновения вырожденного решения задачи. Найдено граничное значение времени перевода между нормальным и вырожденным решениями. Установлена связь между отклонениями моментов переключений управления и отклонениями начальных условий сопряженной системы. Получена система линейных алгебраических уравнений, связывающая отклонения начальных условий сопряженной системы с отклонениями фазовых координат от заданного конечного состояния системы. Приведены вычислительный алгоритм, результаты моделирования и численных расчетов.

DOI: 10.15372/SJNM20160101

Ключевые слова: оптимальное управление, финитное управление, быстрдействие, время перевода, расход ресурсов, момент включения управления, момент выключения, итерационный процесс, сопряженная система, фазовая траектория.

Aleksandrov V.M. A singular solution to the problem of minimizing resource consumption // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2016. — Vol. 19, № 1. — P. 5–18.

An iterative method of finding a singular solution to the problem of minimizing resource consumption has been developed. This method is based on the information about the finite control structure. A condition for existence of a singular solution is obtained. The limit value for transferring the time between the normal and the singular solutions is found. A relation between the variations of the control switching moments and the variations of the initial conditions of the adjoint system is determined. A system of linear algebraic equations relating the variations of the initial conditions of the adjoint system to the variations of the phase coordinates from a given final state of the system is obtained. The computational algorithm, the modeling results and the numerical calculations are presented.

Keywords: optimal control, finite control, speed, transfer time, resource consumption, control start moment, control stop moment, iterative process, adjoint system, phase trajectory.

1. Введение

Оптимальное управление представляет значительный теоретический и практический интерес [1, 2]. Особое место занимает задача минимизации расхода ресурсов. Сформулированная первоначально как задача оптимального управления по расходу топлива она рассматривалась многими как отечественными, так и зарубежными авторами [3–9]. Так

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 13-01-00329).

как аналитическое решение задачи в общем случае невозможно, то отечественными и зарубежными специалистами предложены различные численные методы, каждый из которых обладает определенными достоинствами и недостатками [10–15]. Одним из недостатков является фиксированное задание времени перевода для любых начальных условий системы. Для существования решения задачи время перевода должно быть больше (либо равно) времени оптимального по быстродействию управления. Но время оптимального по быстродействию перевода системы заранее не известно и зависит от начального условия. Произвольное задание времени перевода, во-первых, ограничивает область начальных условий, для которых такой перевод возможен, а во-вторых, делает неравномерным расход ресурсов от начальных условий. Ввиду сложности получения решения широко использовалось лишь нормальное решение и недостаточно внимания уделялось вырожденному решению задачи. Изучению условий возникновения вырожденного решения и разработке метода решения вырожденной задачи и посвящена данная работа.

В работе предложен метод решения вырожденной задачи, основанный на использовании структуры финитного управления. Принципиальная трудность в случае вырожденного решения заключается в неопределенности знаков управляющих воздействий и отсутствии их связи с решением сопряженной системы. Вырожденное решение задачи минимизации расхода ресурсов возникает при противоположных знаках финитного и оптимального по быстродействию управления. Финитное управление есть оптимальное по быстродействию управление с такими величинами управляющих воздействий, при которых время перевода в конечное состояние совпадает с заданным временем. В случае расположения изображающей точки в окрестности многообразий переключений при последовательном увеличении времени перевода системы при некотором критическом значении происходит переключение знаков кусочно-постоянных воздействий финитного управления. Это характерный признак возникновения вырожденного решения задачи минимизации расхода ресурсов.

2. Постановка задачи

Пусть управляемый объект описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(t_0) = x_0, \quad x_0 \in D, \quad D \subset V, \quad (2.1)$$

где x — n -мерный вектор фазового состояния; $A(t)$ и $B(t)$ — непрерывные матрицы размера $n \times n$ и $n \times m$ соответственно; u — m -мерный вектор управления, компоненты которого принадлежат классу кусочно-непрерывных функций и подчинены ограничениям:

$$|u_j| \leq M_j, \quad M_j > 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (2.2)$$

Предполагается, что система (2.1) покомпонентно полностью управляема, т. е.

$$\text{rank} \left[\int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) B_j^*(\tau) \Phi^*(t_k, \tau) d\tau \right] = n, \quad j = \overline{1, m}, \quad (2.3)$$

и переводима в начало координат из ограниченной области начальных условий D ; V — область управляемости; $\Phi(t, t_0)$ — фундаментальная матрица решений однородного дифференциального уравнения; $*$ — знак транспонирования.

Задача. Найти допустимое управление $u^0(t)$, переводящее за фиксированное время $T = t_k - t_0$ (где $T \geq T_0$) систему (2.1) из начального состояния $x(t_0) = x_0$ в конечное состояние $x(t_k) = 0$ и минимизирующее функционал

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_k} \sum_{j=1}^m |u_j(\tau)| d\tau. \quad (2.4)$$

Здесь T_0 — время оптимального по быстродействию перевода системы.

Замечание 1. В случае $T = T_0$ оптимальное по расходу ресурсов управление совпадает с оптимальным по быстродействию управлением.

Замечание 2. Условие покомпонентной полной управляемости (2.3) для рассматриваемых прямоугольных параллелепипедных ограничений (2.2) адекватно “условию общности положения” [1].

3. Вычислительный метод решения задачи

3.1. Перевод системы за фиксированное время

В постановке задачи предполагается, что заданное время больше времени оптимального по быстродействию перевода системы, т. е. $T \geq T_0$. Поэтому прежде всего необходимо проверить, выполняется ли это *необходимое* условие. С этой целью следует решить промежуточную задачу: найти финитное управление $u^F(t)$, переводящее систему (2.1) из начального состояния $x(t_0) = x_0$ в нулевое конечное состояние $x(t_k) = 0$ за фиксированное время $T = t_k - t_0$.

Оптимальное по быстродействию управление формируется по алгоритму

$$u_j(t) = M_j \operatorname{sign}[B_j(t)]^* \psi(t), \quad j = \overline{1, m}. \quad (3.1)$$

Здесь $[B_j(t)]^*$ — транспонированный j -й вектор-столбец матрицы $B(t)$; $\psi(t)$ — решение сопряженной системы $\dot{\psi} = -A^*(t)\psi$. Финитное управление $u^F(t)$, переводящее систему (2.1) из $x(t_0) = x_0$ в $x(t_k) = 0$ за фиксированное время $T = t_k - t_0$, определяется так:

$$u_j^F(t) = \eta M_j \operatorname{sign}[B_j(t)]^* \psi(t), \quad j = \overline{1, m}, \quad (3.2)$$

где параметр $\eta > 0$ показывает во сколько раз следует изменить величины компонент вектора управления, чтобы обеспечить перевод системы (2.1) из $x(t_0) = x_0$ в $x(t_k) = 0$ не за минимальное, а за заданное время T . Финитное управление есть оптимальное по быстродействию управление, если вместо ограничения (2.2) ограничить компоненты вектора управления по условию $|u_j^F| \leq \eta M_j$, $j = \overline{1, m}$. В [16] рассмотрена итерационная процедура нахождения оптимального по быстродействию управления. Задавая различные значения параметра η , находим различные значения времени перевода: T_0, T_1, T_2, \dots, T . Запоминаем T_i , $i = 0, 1, 2, \dots$, моменты переключений, начальные условия сопряженной системы и в дальнейшем принимаем их в качестве начальных приближений в итерационном процессе вычисления оптимального по расходу ресурсов управления.

Если искомый параметр $\eta \leq 1$, то решение задачи на минимум расхода ресурсов существует. Если $\eta > 1$, то решения не существует.

Нахождение финитного управления $u^F(t)$ дает информацию, необходимую для решения задачи на минимум расхода ресурсов:

1. Получаем последовательность управляющих воздействий и число (r_j) интервалов знакопостоянства для каждой компоненты. Действительно, при $\eta = 1$, когда $T = T_0$, решение задачи на минимум расхода ресурсов совпадает с решением задачи оптимального

быстродействия. При $\eta < 1$ ($T > T_0$) появляются участки “выключения” управления, за счет которых и происходит экономия ресурсов. При этом структура финитного управления отличается от структуры управления, минимизирующего расход ресурсов, однако последовательность кусочно-постоянных воздействий и число перемен знака для каждой компоненты сохраняется.

2. Если $\eta > 1$, то решения задачи минимизации расхода ресурсов не существует. Для существования решения необходимо увеличить M_j либо T . Увеличение M_j , $j = \overline{1, m}$, всегда приводит к решению задачи (если система (2.1) полностью управляема, т. е. выполняется условие (2.3)), но сопряжено с увеличением управляющих воздействий. Увеличение T для неустойчивых систем не приводит к решению задачи, если $x_0 \notin V$. Действительно, для неустойчивых систем с ограниченным управлением переход в начало координат возможен лишь из области управляемости V . Если $x_0 \notin V$, то даже за бесконечное время невозможен перевод системы в начало координат. Однако на практике время T задается зачастую произвольно, без учета возможностей системы. Поэтому увеличение T позволяет во многих случаях получить решение задачи. Отношение $\mu = T/T_0$ (при $T/T_0 > 1$) характеризует запас по времени и определяет экономию ресурсов. Чем больше μ , тем меньше расход ресурсов. Однако скорость, с которой происходит уменьшение расхода ресурсов, уменьшается с ростом μ .

3. Моменты переключений финитного управления используются для задания начального приближения моментов переключений оптимального по расходу ресурсов управления.

3.2. Вычисление оптимального по расходу ресурсов управления

Для нахождения оптимального по расходу ресурсов управления при ограничении (2.2) образуем функцию Понтрягина $H(\psi(t), x(t), u(t), t)$ и выпишем сопряженную систему $\dot{\psi}(t)$:

$$\begin{aligned} H(\psi(t), x(t), u(t), t) &= - \sum_{j=1}^m |u_j| + \psi^* A(t)x + \psi^* B(t)u, \\ \dot{\psi} &= -A^*(t)\psi. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для оптимальности управления $u(t)$ и траектории $x(t)$ необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции $\psi(t)$, соответствующей функциям $x(t)$ и $u(t)$, что для любого $t \in [t_0, t_k]$ функция $H(\psi(t), x(t), u(t), t)$ переменного $u \in U$ достигает в точке $u = u(t)$ максимума

$$H(\psi(t), x(t), u(t), t) = \sup_{u \in U} H(\psi(t), x(t), u, t).$$

Функция $H(\psi(t), x(t), u(t), t)$ максимальна, если компоненты вектора управления удовлетворяют следующим условиям:

$$u_j^R(t) = \begin{cases} \pm M_j & \text{при } -1 \leq [B_j(t)]^* \psi(t) \leq 1, \\ 0 & \text{при } 1 > [B_j(t)]^* \psi(t) > -1, \end{cases} \quad j = \overline{1, m}. \quad (3.4)$$

В зависимости от положения начальной точки в фазовом пространстве и величины заданного времени T возможны два решения: 1) нормальное решение; 2) вырожденное решение задачи минимизации расхода ресурсов. Нормальное решение характеризуется тем, что структура (т. е. последовательность знаков) оптимального по быстродействию

управления совпадает со структурой финитного управления. Для нормального решения выражение (3.4) может быть представлено следующим образом:

$$u_j^R(t) = \begin{cases} M_j & \text{при } [B_j(t)]^* \psi(t) \geq 1, \\ 0 & \text{при } 1 > [B_j(t)]^* \psi(t) > -1, \\ -M_j & \text{при } [B_j(t)]^* \psi(t) \leq -1, \end{cases} \quad j = \overline{1, m}. \quad (3.5)$$

Нормальное решение задачи минимизации расхода ресурсов подробно рассмотрено в [9].

В настоящей работе рассматривается вырожденное решение задачи минимизации расхода ресурсов. *Вырожденное решение характеризуется тем, что для заданного начального условия $x(t_0) = x_0$ и заданного времени перевода T последовательности знаков оптимального по быстродействию и финитного управления противоположны.* Структура оптимального по расходу ресурсов управления может быть представлена так:

$$\begin{aligned} u_j^R(t) &= \pm M_j, \quad t \in [t_j^{2(p-1)}, t_j^{2p-1}], \quad p = \overline{1, r_j}, \\ u_j^R(t) &\equiv 0, \quad t \in [t_j^{2p-1}, t_j^{2p}], \quad p = \overline{1, r_j - 1}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $t_j^0 = t_0$; $t_j^{2r_j-1} = t_k$; r_j — максимальное число интервалов знакопостоянства j -й компоненты вектора оптимального по быстродействию управления; t_j^α — α -момент переключения (включения или выключения) j -й компоненты вектора оптимального по расходу ресурсов управления. Моменты переключений задаются функцией переключений $[B_j(t)]^* \psi(t)$. Для j -й компоненты вектора управления функция переключений принимает значения ± 1 в моменты $t = t_j^\alpha$, т.е. справедливо соотношение $[B_j(t_j^\alpha)]^* \psi(t_j^\alpha) = \pm 1$. Зная знак ($R_j(p)$) управления на p -м интервале знакопостоянства j -й компоненты, можно записать

$$[B_j(t_j^\alpha)]^* \psi(t_j^\alpha) = R_j(p)1. \quad (3.7)$$

Выразим решение сопряженной системы $\dot{\psi} = -A^*(t)\psi$ через фундаментальную матрицу прямой системы

$$\psi(t) = [\Phi^{-1}(t, t_0)]^* \psi(t_0) \quad (3.8)$$

и подставим (3.8) в (3.7). Задав произвольно n моментов переключений t_j^α ($\alpha = \overline{1, l_j}$, $\sum_{j=1}^m l_j = n$; $j = \overline{1, m}$), получим для вычисления начальных условий сопряженной системы $\psi_i(t_0)$, $i = \overline{1, n}$, следующую систему из n линейных алгебраических уравнений:

$$[B_j(t_j^\alpha)]^* [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \psi(t_0) - R_j(p)1 = 0. \quad (3.9)$$

Вычислив начальное условие $\psi(t_0)$, с помощью решения на интервале $[t_0, t_k]$ сопряженной системы (3.8) находим все t_j^α , для которых выполняются (3.9). Параметры p и α связаны соотношением $p = E(\alpha/2 + 1)$, $\alpha = 1, 2, 3, \dots$, где $E(\cdot)$ — целая часть числа. Таким образом, задав произвольно n моментов переключений, находим с помощью функций переключений соответствующие n заданным все остальные моменты переключений на интервале $[t_0, t_k]$.

Важно отметить, что двум симметричным функциям переключений соответствуют одни и те же значения моментов переключений t_j^α , $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$.

На рис. 1 приведены две симметричные функции переключений, которым соответствуют одинаковые значения моментов переключений. *Это обстоятельство позволяет разнести проблемы и решать отдельно:* 1) проблему определения (вычисления) моментов переключений; 2) проблему выбора знаков управляющих воздействий.

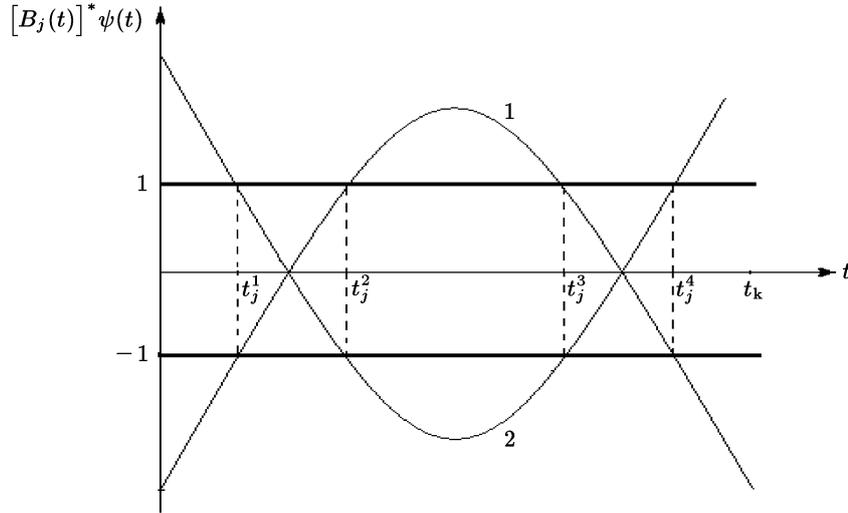


Рис. 1. Симметричные функции переключений

Оптимальное по расходу ресурсов управление совпадает по знаку с финитным управлением *только* на первом интервале знакопостоянства $[t_0, t_j^1]$:

$$u_j^R(t) = M_j \operatorname{sign} u_j^F(t_0), \quad t \in [t_0, t_j^1], \quad j = \overline{1, m}. \quad (3.10)$$

На остальных интервалах знакопостоянства оптимальное по расходу ресурсов управление формируется по алгоритму

$$u_j^R(t) = M_j \operatorname{sign} \left\{ [B_j(t)]^* \psi(t) [1 - \operatorname{sign}(1 - |[B_j(t)]^* \psi(t)|)] \right\}, \quad t \in [t_j^1, t_k], \quad j = \overline{1, m}, \quad (3.11)$$

и чередование знаков совпадает с чередованием знаков у оптимального по быстродействию управления.

3.3. Отклонение фазовой траектории от начала координат

Пусть заданы все *приближенные* значения моментов переключений t_j^α , $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$, $j = \overline{1, m}$. Управляемая система (2.1) переводится в некоторую точку фазового пространства, которая отклоняется от начала координат на величину

$$\begin{aligned} \Delta \hat{x}(t_k) = & \Phi(t_k, t_0) x(t_0) + \sum_{j=1}^m \int_{t_j^0}^{t_j^1} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) M_j \operatorname{sign} u_j^F(t_0) d\tau + \\ & \sum_{j=1}^m \sum_{p=2}^{r_j} \int_{t_j^{2(p-1)}}^{t_j^{2p-1}} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) M_j S_j(p) d\tau, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где $S_j(p)$ — знак управления на p -м интервале знакопостоянства j -й компоненты вектора управления $S_j(p+1) = -S_j(p)$. Это отклонение должно быть скомпенсировано соответствующим изменением моментов переключений управления.

3.4. Вариация моментов переключений управления

Изменение t_j^α на величину Δt_j^α , $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$, вызывает следующее отклонение фазовых координат в конечный момент времени $t = t_k$ для кусочно-постоянного управления $u_j^p(t)$, компоненты которого переключаются в моменты времени $t = t_j^\alpha$, $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$, $j = \overline{1, m}$, и принимают значения $u_j^p(t) = M_j S_j(p)$, $t \in [t_j^{2(p-1)}, t_j^{2p-1}]$, $p = \overline{1, r_j}$:

$$\Delta \tilde{x}(t_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \int_{t_j^\alpha}^{t_j^\alpha + \Delta t_j^\alpha} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) d\tau. \quad (3.13)$$

Параметры p и α связаны соотношением $p = E(\alpha/2 + 1)$, $\alpha = 1, 2, 3, \dots$, где $E(\cdot)$ — целая часть числа.

Если Δt_j^α достаточно малы (а это, как показано ниже, всегда достижимо), то получаем приближенное соотношение, которое тем точнее, чем меньше по модулю Δt_j^α :

$$\Delta \tilde{x}(t_k) \approx \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \Phi(t_k, t_j^\alpha) B_j(t_j^\alpha) (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) \Delta t_j^\alpha. \quad (3.14)$$

3.5. Уравнение баланса отклонений

Отклонения фазовых координат (3.12), порождаемые неточным заданием моментов переключений, должны быть скомпенсированы соответствующим изменением моментов переключений, т.е. должно выполняться уравнение баланса отклонений $\Delta \tilde{x}(t_k) + \Delta \hat{x}(t_k) = 0$. Подставив в это уравнение выражения (3.12) и (3.14), получим систему из n линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \Phi(t_k, t_j^\alpha) B_j(t_j^\alpha) (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) \Delta t_j^\alpha + \\ & \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{t_j^{2(p-1)}}^{t_j^{2p-1}} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) M_j S_j(p) d\tau + \\ & \sum_{j=1}^m \int_{t_j^0}^{t_j^1} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) M_j \text{sign } u_j^F(t_0) d\tau + \Phi(t_k, t_0) x(t_0) = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Число неизвестных Δt_j^α , $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$, $j = \overline{1, m}$, в (3.15) может быть больше числа уравнений, однако только n из них являются независимыми переменными. Выше отмечалось, что с помощью сопряженной системы заданием n моментов переключений однозначно задаются все остальные моменты переключений на интервале $[t_0, t_k]$. Поэтому для нахождения оптимального управления (а не просто допустимого управления) необходимо перейти к определению моментов переключений с помощью сопряженной системы. С этой целью установим связь между отклонениями Δt_j^α , $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$, $j = \overline{1, m}$, моментов переключений и отклонениями $\Delta \psi_i(t_0)$, $i = \overline{1, n}$, начальных условий сопряженной системы. Число последних равно n . В результате получим систему из n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $\Delta \psi_i(t_0)$, $i = \overline{1, n}$.

3.6. Связь между отклонениями моментов переключений управления и отклонениями начальных условий сопряженной системы

Изменим $\psi(t_0)$ на $\Delta\psi(t_0)$. Это порождает изменение t_j^α на Δt_j^α :

$$\begin{aligned} [B_j(t_j^\alpha + \Delta t_j^\alpha)]^* [\Phi^{-1}(t_j^\alpha + \Delta t_j^\alpha, t_0)]^* (\psi(t_0) + \Delta\psi(t_0)) - R_j(p)1 = 0, \\ \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}, j = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Разложим полученное выражение в ряд Тейлора и ограничимся лишь линейными членами:

$$\begin{aligned} \left[B_j(t_j^\alpha) + \overline{\Delta t_j^\alpha} \frac{dB_j(t_j^\alpha)}{dt} \right]^* \left[\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0) + \overline{\Delta t_j^\alpha} \frac{d\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)}{dt} \right]^* (\psi(t_0) + \Delta\psi(t_0)) - R_j(p)1 = 0, \\ \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}, j = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Здесь $\overline{\Delta t_j^\alpha}$ — диагональная матрица ($n \times n$) с элементом Δt_j^α на диагонали. Отметим, что $\Phi^{-1}(t, t_0) = [\widehat{\Phi}(t, t_0)]^*$, где $\widehat{\Phi}(t, t_0)$ — фундаментальная матрица решения сопряженного уравнения $\dot{\psi} = -A^*(t)\psi$, которая находится из решения матричного дифференциального уравнения

$$\frac{d\widehat{\Phi}(t, t_0)}{dt} = -A^*(t)\widehat{\Phi}(t, t_0), \quad \widehat{\Phi}(t_0, t_0) = I. \quad (3.18)$$

Запишем (3.17), учитывая (3.18), в следующем виде:

$$\begin{aligned} [B_j(t_j^\alpha)]^* [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \psi(t_0) + [\dot{B}_j(t_j^\alpha)]^* [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \psi(t_0) \Delta t_j^\alpha - \\ [B_j(t_j^\alpha)]^* A^*(t_j^\alpha) [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \psi(t_0) \Delta t_j^\alpha - [\dot{B}_j(t_j^\alpha)]^* A^*(t_j^\alpha) [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \psi(t_0) (\Delta t_j^\alpha)^2 + \\ [B_j(t_j^\alpha)]^* [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \Delta\psi(t_0) + [\dot{B}_j(t_j^\alpha)]^* [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \Delta\psi(t_0) \Delta t_j^\alpha - \\ [B_j(t_j^\alpha)]^* A^*(t_j^\alpha) [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \Delta\psi(t_0) \Delta t_j^\alpha - \\ [\dot{B}_j(t_j^\alpha)]^* A^*(t_j^\alpha) [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \Delta\psi(t_0) (\Delta t_j^\alpha)^2 - R_j(p)1 = 0, \quad \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}, j = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Пренебрегая величинами второго и более высокого порядка малости и учитывая (3.16), получим приближенное уравнение, связывающее Δt_j^α и $\Delta\psi(t_0)$:

$$\begin{aligned} \left\{ [\dot{B}_j(t_j^\alpha)]^* [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \psi(t_0) - [B_j(t_j^\alpha)]^* A^*(t_j^\alpha) [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \psi(t_0) \right\} \Delta t_j^\alpha + \\ [B_j(t_j^\alpha)]^* [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \Delta\psi(t_0) \approx 0, \quad \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}, j = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Из (3.19) находим приближенное соотношение, посредством которого каждое Δt_j^α , $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$, $j = \overline{1, m}$, выражается через $\Delta\psi(t_0)$:

$$\begin{aligned} \Delta t_j^\alpha \approx \left\{ \left\{ [B_j(t_j^\alpha)]^* A^*(t_j^\alpha) - [\dot{B}_j(t_j^\alpha)]^* \right\} [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \psi(t_0) \right\}^{-1} \times \\ [B_j(t_j^\alpha)]^* [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \Delta\psi(t_0), \quad \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}, j = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Запишем соотношение (3.20) в компактном виде

$$\Delta t_j^\alpha \approx \mathcal{L}(t_j^\alpha) \Delta \psi(t_0), \quad \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (3.20)'$$

Следует отметить, что несмотря на кажущуюся сложность, выражение (3.20) имеет простой вид благодаря матрицам размера $(1 \times n)$ и $(n \times 1)$, входящим в это выражение.

3.7. Основное уравнение

Подставив (3.20)' в (3.15), получим основную систему из n линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных $\Delta \psi_i(t_0)$, $i = \overline{1, n}$:

$$\sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \Phi(t_k, t_j^\alpha) B_j(t_j^\alpha) (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) \mathcal{L}(t_j^\alpha) \Delta \psi(t_0) + \Phi(t_k, t_0) x(t_0) + \sum_{j=1}^m \int_{t_j^0}^{t_j^1} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) M_j \operatorname{sign} u_j^F(t_0) d\tau + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{t_j^{2(p-1)}}^{t_j^{2p-1}} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) M_j S_j(p) d\tau = 0. \quad (3.21)$$

Решив (3.21), находим $\Delta \psi(t_0)$. По формуле (3.20) вычисляем отклонения Δt_j^α , на которые следует изменить каждый из моментов переключений, чтобы уменьшить в конечный момент отклонение от начала координат фазовой траектории движения системы (2.1). Приближенность выражений (3.14) и (3.20) приводит к итерационной процедуре нахождения оптимального управления. Для уменьшения отклонений $\Delta \hat{x}(t_k)$ последовательно увеличиваем заданное время T_i , $i = 0, 1, 2, \dots$, и принимаем каждый раз в качестве начального приближения полученные на предыдущей итерации значения моментов переключений и начальных условий сопряженной системы.

Отклонение $\Delta \hat{x}(t_k)$ может быть значительным и для его компенсации необходимы большие отклонения моментов переключений Δt_j^α , $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$, $j = \overline{1, m}$. В силу линеаризации и приближенности полученных соотношений возможна расходимость вычислительного процесса. Оценить “малы” или “велики” отклонения $\Delta \psi_i(t_0)$, $i = \overline{1, n}$, и гарантируется ли сходимость вычислительного процесса весьма сложно. Более просто судить о сходимости вычислительного процесса по величине максимального отклонения момента переключения по сравнению с заданным временем управления. Если $\max_{j,\alpha} |\Delta t_j^\alpha| \leq \gamma T$, где γ задано ($0 < \gamma \ll 1$), то отклонения моментов переключений достаточно малы и гарантируется сходимость вычислительного процесса. В противном случае компенсируем отклонение $\Delta \hat{x}(t_k)$ не сразу полностью, а по частям, беря лишь ξ -ю часть отклонения $\Delta \hat{x}(t_k)$, полагая

$$\xi = \frac{\gamma T}{\max_{j,\alpha} |\Delta t_j^\alpha|}. \quad (3.22)$$

Таким образом, если окажется, что $\max_{j,\alpha} |\Delta t_j^\alpha| > \gamma T$, то ограничиваем максимальное отклонение предельным значением, т. е. принимаем $\max_{j,\alpha} |\Delta \tilde{t}_j^\alpha| = \gamma T$, а остальные отклонения пропорционально уменьшаем в ξ раз, т. е. полагаем

$$\Delta \tilde{t}_j^\alpha = \xi \Delta t_j^\alpha, \quad \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}, \quad j = \overline{1, m}; \quad \Delta \tilde{\psi}(t_0) = \xi \Delta \psi(t_0). \quad (3.23)$$

Здесь $\Delta\psi(t_0)$, Δt_j^α — вычисленные значения из уравнений (3.21) и (3.20) соответственно; $\Delta\tilde{\psi}(t_0)$, $\Delta\tilde{t}_j^\alpha$ — значения отклонений, которые реально принимаются для последующих расчетов. Такой подход обеспечивает сходимость итерационного вычислительного процесса для любых начальных условий из области управляемости. Доказательство сходимости такого вычислительного процесса аналогично [9].

4. Моделирование и численное исследование

Рассмотрим простую систему второго порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & x_1(t_0) &= x_{10}, \\ \dot{x}_2 &= bu, & x_2(t_0) &= x_{20}, \quad |u| \leq M. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Ставится задача: найти допустимое управление $u(t)$, переводящее систему (4.1) из начального состояния $x(t_0) = x_0$ в начало координат $x(t_k) = 0$ за заданное фиксированное время $T = t_k - t_0$ (где $T \geq T_0$, T_0 — время оптимального по быстродействию управления) и минимизирующее расход ресурсов.

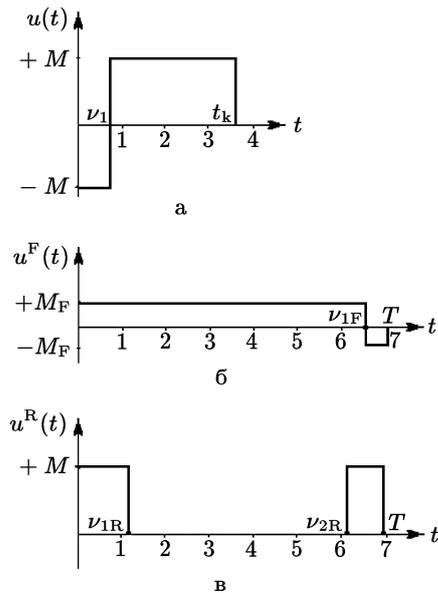


Рис. 2. Оптимальное по быстродействию (а), финитное (б) и оптимальное по расходу ресурсов (в) управления

Пусть $b = 1$, $M = 5$, $x(t_0) = (30, -10)$, $T = 7$. Находим, что время оптимального по быстродействию управления $T_0 = 2(8^{1/2} - 1) \approx 3.656854$, момент переключения $\nu_1 = 2(2^{1/2} - 1) \approx 0.828427$, структура оптимального управления $[-M, +M]$. Амплитуда финитного управления, переводящего систему (4.1) из начального состояния $x(t_0) = (30, -10)$ в начало координат $x(t_k) = 0$ за время $T = t_k - t_0 = 7$, равна $M_F = 1.64713$. Момент переключения финитного управления $\nu_{1F} \approx 6.535957$, а структура финитного управления по знакам противоположна структуре оптимального по быстродействию управления $[+M_F, -M_F]$. Поэтому оптимальное по расходу ресурсов управление имеет структуру $[+M, 0, +M]$. Момент выключения управления $\nu_{1R} = 1.2$, момент включения управления $\nu_{2R} = 6.2$. На рис. 2 приведены оптимальное по быстродействию (а), финитное (б) и оптимальное по расходу ресурсов (в) управления.

На рис. 3 показаны фазовые траектории движения системы (4.1) из начальной точки $x(t_0) = (30, -10)$ в начало координат $x(t_k) = 0$ при оптимальном по быстродействию управлении (пунктирная линия) и оптимальном по расходу ресурсов управлении (сплошная линия). Расход ресурсов $J(u) = 10$. Следует отметить, что это значение расхода ресурсов является *минимальным* и не уменьшается при изменении заданного (фиксированного) времени T (увеличении или уменьшении до некоторого критического значения $T_{кр} = 4$). Действительно, при $T = 4$ оптимальное по расходу ресурсов управление имеет структуру $[0, +M]$, т. е. управление до момента времени $\nu_{1R} = 2$ равно нулю, в момент времени $t = \nu_{1R}$ включается и на интервале $t \in [2, 4]$ равно $u^R(t) = +M$.

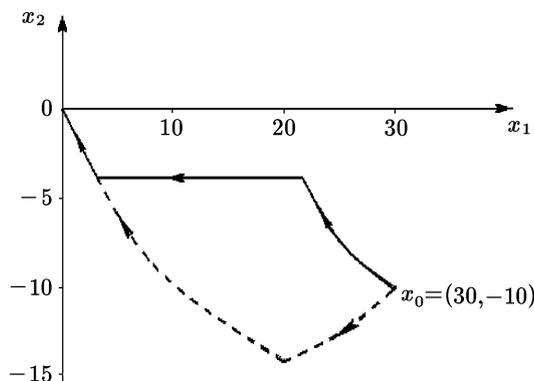


Рис. 3. Фазовые траектории при оптимальном по быстродействию (пунктирная линия) и оптимальном по расходу ресурсов (сплошная линия) управлениях

На рис. 4 приведено оптимальное по расходу ресурсов управление для различных значений T .

Расход ресурсов определяется суммарным временем действия включенного управления $J(u) = M(\tau_1 + \tau_3)$. При изменении параметра T изменяется вид оптимального по расходу управления, однако суммарное значение $(\tau_1 + \tau_3) = 2$ остается постоянным. Это минимальное время движения с включенным управлением, за которое возможен перевод системы (4.1) в начало координат.

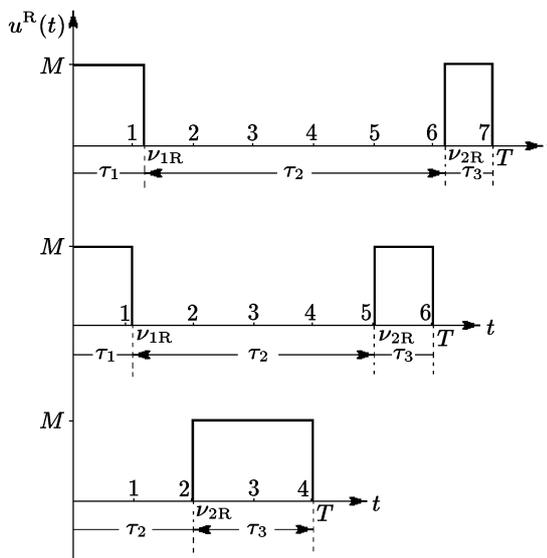


Рис. 4. Оптимальные по расходу ресурсов управления при различных значениях T

На рис. 5а приведена фазовая траектория (кривая 1) движения из начальной точки $x(t_0) = (30, -10)$ в начало координат $x(t_k) = 0$ с оптимальным по расходу ресурсов управлением при $T_{кр} = 4$. Если $T_0 \leq T < T_{кр}$, то решение задачи минимизации расхода ресурсов является нормальным [9] и движение происходит по кривой 2. Если $T > T_{кр}$, то решение задачи минимизации расхода ресурсов является уже вырожденным и движение происходит по кривой 3. Изменение расхода ресурсов в зависимости от заданного времени перевода T показано на рис. 5б. Если $T \geq T_{кр} = 4$, то $J(u) = 10$ и дальнейшее увеличение времени T не приводит к уменьшению расхода ресурсов и поэтому не целесообразно. Если $T < T_0$, то решения задачи минимизации расхода ресурсов не существует.

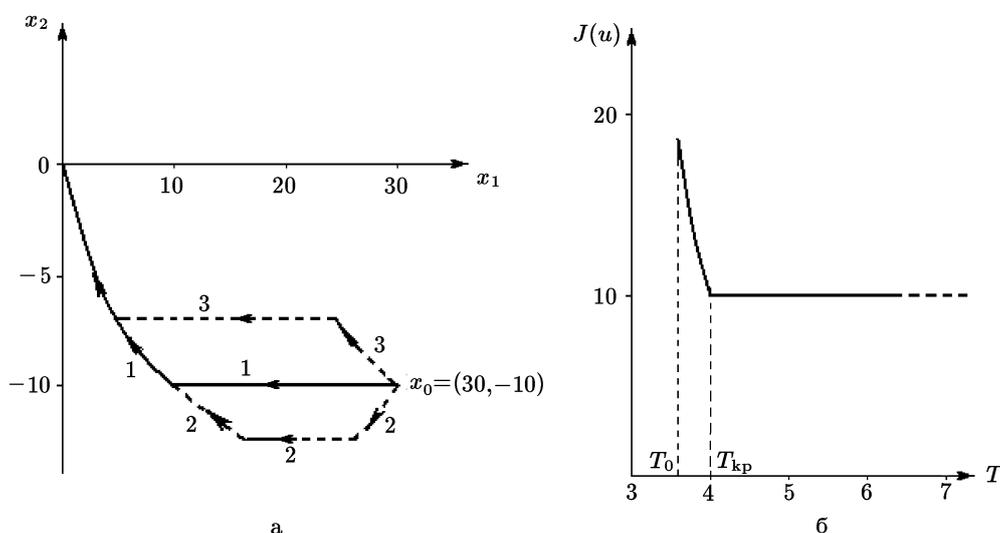


Рис. 5.

5. Заключение

Разработан итерационный метод решения вырожденной задачи минимизации расхода ресурсов. Метод основан на последовательном увеличении времени перевода и вычислении финитного управления, переводящего управляемую систему из начального состояния в нулевое конечное состояние за фиксированное время T . Характерным признаком вырожденного решения задачи минимизации расхода ресурсов является различие структур (последовательностей знаков) финитного и оптимального по быстрдействию управлений. Граничным временем между нормальным и вырожденным решениями задачи минимизации расхода ресурсов является такое время $T_{кр}$, при котором происходит движение с нулевым управлением на первом интервале знакопостоянства. Если заданное время перевода $T > T_{кр}$, то имеем вырожденное решение задачи минимизации расхода ресурсов. Если $T_0 \leq T \leq T_{кр}$, то имеем нормальное решение.

Литература

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1976.
2. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. — М.: Наука, 1969.
3. Singh T. Fuel/time optimal control of the benchmark problem // J. Guid. Control Dyn. — 1995. — Vol. 18, № 6. — P. 1225–1231.
4. Иванов В.А., Кожевников С.А. Одна задача синтеза оптимального по “расходу топлива” управления линейными объектами второго порядка с производными управления // Известия РАН. Теория и системы управления. — 1996. — № 4. — С. 77–83.
5. Dewell L.D., Speyer J.L. Fuel-optimal periodic control and regulation in constrained hypersonic flight // J. Guid. Control Dyn. — 1997. — Vol. 20, № 5. — P. 923–932.
6. Liu S.W., Singh T. Fuel/time optimal control of spacecraft maneuvers // J. Guid. Control Dyn. — 1997. — Vol. 20, № 2. — P. 394–397.

7. **Александров В.М.** Приближенное решение линейной задачи на минимум расхода ресурсов // Журн. вычис. матем. и мат. физики. — 1999. — Т. 39, № 3. — С. 418–430.
8. **Шевченко Г.В.** Метод нахождения оптимального по минимуму расхода ресурсов управления для объектов специального вида // Автотметрия. — 2006. — Т. 42, № 2. — С. 49–67.
9. **Александров В.М.** Оптимальное по расходу ресурсов управление линейными системами // Журн. вычис. матем. и мат. физики. — 2011. — Т. 51, № 4. — С. 562–579.
10. **Федоренко Р.П.** Приближенное решение задач оптимального управления. — М.: Наука, 1978.
11. **Любушин А.А.** О применении модификаций метода последовательных приближений для решения задач оптимального управления // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1982. — Т. 22, № 1. — С. 30–35.
12. **Грачев Н.И., Евтушенко Ю.Г.** Библиотека программ для решения задач оптимального управления // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1979. — Т. 19, № 2. — С. 367–387.
13. **Габасов Р., Кириллова Ф.М.** Конструктивные методы оптимизации. Ч. 2. Задачи управления. — Минск: Изд-во “Университетское”, 1984.
14. **Срочко В.А.** Итерационные методы решения задач оптимального управления. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000.
15. **Осипов Ю.С.** Пакеты программ: подход к решению задач позиционного управления с неполной информацией // Успехи мат. наук. — 2006. — Т. 61, вып. 4. — С. 25–76.
16. **Александров В.М.** Итерационный метод вычисления в реальном времени оптимального по быстрдействию управления // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2007. — Т. 10, № 1. — С. 1–28.

Поступила в редакцию 23 апреля 2015 г.

Литература в транслитерации

1. **Pontryagin L.S., Boltyanskiy V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F.** Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov. — М.: Nauka, 1976.
2. **Boltyanskiy V.G.** Matematicheskie metody optimal'nogo upravleniya. — М.: Nauka, 1969.
3. **Singh T.** Fuel/time optimal control of the benchmark problem // J. Guid. Control Dyn. — 1995. — Vol. 18, № 6. — P. 1225–1231.
4. **Ivanov V.A., Kozhevnikov S.A.** Odnа zadacha sinteza optimal'nogo po “raskhodu topliva” upravleniya lineynymi ob"ektami vtorogo poryadka s proizvodnymi upravleniya // Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya. — 1996. — № 4. — С. 77–83.
5. **Dewell L.D., Speyer J.L.** Fuel-optimal periodic control and regulation in constrained hypersonic flight // J. Guid. Control Dyn. — 1997. — Vol. 20, № 5. — P. 923–932.
6. **Liu S.W., Singh T.** Fuel/time optimal control of spacecraft maneuvers // J. Guid. Control Dyn. — 1997. — Vol. 20, № 2. — P. 394–397.
7. **Aleksandrov V.M.** Priblizhennoe reshenie lineynoy zadachi na minimum raskhoda resursov // Zhurn. vychis. matem. i mat. fiziki. — 1999. — Т. 39, № 3. — С. 418–430.
8. **Shevchenko G.V.** Metod nakhozheniya optimal'nogo po minimumu raskhoda resursov upravleniya dlya ob"ektov spetsial'nogo vida // Avtometriya. — 2006. — Т. 42, № 2. — С. 49–67.
9. **Aleksandrov V.M.** Optimal'noe po raskhodu resursov upravlenie lineynymi sistemami // Zhurn. vychis. matem. i mat. fiziki. — 2011. — Т. 51, № 4. — С. 562–579.
10. **Fedorenko R.P.** Priblizhennoe reshenie zadach optimal'nogo upravleniya. — М.: Nauka, 1978.

11. **Lyubushin A.A.** O primeneniі modifikatsiy metoda posledovatel'nykh priblizheniy dlya resheniya zadach optimal'nogo upravleniya // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1982. — Т. 22, № 1. — S. 30–35.
12. **Grachev N.I., Evtushenko Yu.G.** Biblioteka programm dlya resheniya zadach optimal'nogo upravleniya // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1979. — Т. 19, № 2. — S. 367–387.
13. **Gabasov R., Kirillova F.M.** Konstruktivnye metody optimizatsii. Ch. 2. Zadachi upravleniya. — Minsk: Izd-vo “Universitetskoe”, 1984.
14. **Srochko V.A.** Iteratsionnye metody resheniya zadach optimal'nogo upravleniya. — M.: FIZMATLIT, 2000.
15. **Osipov Yu.S.** Pakety programm: podkhod k resheniyu zadach pozitsionnogo upravleniya s nepolnoy informatsiyey // Uspekhi mat. nauk. — 2006. — Т. 61, vyp. 4. — S. 25–76.
16. **Aleksandrov V.M.** Iteratsionnyy metod vychisleniya v real'nom vremeni optimal'nogo po bystrodeystviyu upravleniya // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2007. — Т. 10, № 1. — S. 1–28.