УДК 519.6

О блоке фильтров в сплайн-вейвлетном преобразовании на неравномерной сетке*

А.А. Макаров[1], С.В. Макарова[2]

[1]Санкт-Петербургский государственный университет, Университетская набережная, 7/9, Санкт-Петербург, 199034

[2]Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, ул. Большая Морская, 67, Санкт-Петербург, 199034

E-mails: a.a.makarov@spbu.ru (Макаров А.А.), sdrobot@mail.ru (Макарова С.В.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале "Numerical Analysis and Applications" № 3, Vol. 14, 2021.

Макаров А.А., Макарова С.В. О блоке фильтров в сплайн-вейвлетном преобразовании на неравномерной сетке // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние.— Новосибирск, 2021.— Т. 24, № 3.— С. 299–311.

В работе получено явное представление блока фильтров для построения вейвлетных преобразований пространств линейных минимальных сплайнов на неравномерных сетках на отрезке. Построены операторы декомпозиции и реконструкции, доказана их взаимная обратность. Найдены соотношения, связывающие соответствующие фильтры. Установлен факт разреженности матриц декомпозиции и реконструкции. Применяемый в работе подход к построению сплайн-вейвлетных разложений использует аппроксимационные соотношения в качестве исходной структуры для построения пространств минимальных сплайнов и калибровочные соотношения для доказательства вложенности соответствующих пространств. Преимуществами предлагаемого подхода, за счет отказа от формализма гильбертовых пространств, являются возможность применения неравномерных сеток и достаточно произвольных неполиномиальных сплайн-вейвлетов.

DOI: 10.15372/SJNM20210306

Ключевые слова: *B-сплайн, минимальные сплайны, вейвлеты, сплайн-вейвлеты, вейвлетное разложение, блок фильтров.*

Makarov A.A., Makarova S.V. On filter banks in spline wavelet transform on a non-uniform grid // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci.— Novosibirsk, 2021.— Vol. 24, № 3.— P. 299–311.

An explicit representation of filter banks for constructing the wavelet transform of spaces of linear minimal splines on non-uniform grids on a segment is obtained. The decomposition and reconstruction operators are constructed, their mutual inverse is proved. The relations connecting the corresponding filters are established. The approach to constructing the spline wavelet decompositions used in this paper is based on approximation relations as the initial structure for constructing spaces of minimal splines and calibration relations to prove the embedding of the corresponding spaces. The advantages of the approach proposed, due to rejecting the formalism of the Hilbert spaces, are in the possibility of using non-uniform grids and fairly arbitrary non-polynomial spline wavelets.

Keywords: *B-spline, minimal spline, spline wavelet, wavelet transform, filter banks.*

---

*Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ (проект № МД-2242.2019.9).

1. Введение

Сплайны и вейвлеты нашли широкое применение в теории информации. Вейвлетные разложения связаны с составлением эффективных алгоритмов обработки (сжатия или уточнения) больших потоков цифровых данных, сигналов различной природы. Они нашли применение во многих технических областях, в том числе и в теории кодирования.

Известно, что для классических сплайн-вейвлетов не существует явных конечных формул разложения. Поэтому используются или приближенные соотношения для главных коэффициентов разложения [1], или решаются разреженные системы линейных алгебраических уравнений, для которых, однако, не гарантирована их хорошая обусловленность [2]. Например, такую систему можно расщепить на системы со строгим диагональным преобладанием [3], а затем решить методом прогонки с гарантией корректности и устойчивости. Еще одним способом является построение матрицы продолжения, элементами которой являются значения расширенной системы биортогональных функционалов на исходном базисе [4, 5]. Однако в упомянутых работах не строится явное представление фильтров декомпозиции и реконструкции, которое подходило бы для построения, например, помехоустойчивых кодов.

Исследуя построение последовательности непрерывных кусочно-линейных функций, которые поточечно сходятся к непрерывной нигде не дифференцируемой функции, Г. Фабер [6] ввел иерархическое представление функций в виде ряда, основанное на кусочно-линейной интерполяции на вложенных двоичных сетках, явно выписав представление первого “ленивого” вейвлета (с компактным носителем). С точки зрения сжатия данных разложение Фабера полезно благодаря устойчивости линейных B-сплайнов. Оно дает хорошее и быстрое сжатие без особых усилий, однако развитие теории вейвлетов началось с работы А. Хаара [7], в которой изучение частных сумм ряда Фурье привело к построению первого классического ортогонального вейвлета с компактным носителем. Основные теоретические подходы, использовавшиеся при исследовании вейвлетов, связаны с построением ортогонального базиса вейвлетов в гильбертовом пространстве и с использованием сдвигов и сжатий (растяжений) аргумента фиксированной функции, называемой *масштабирующей* функцией. Требование вложенности пространств на двукратно измельчающейся бесконечной равномерной сетке на вещественной оси приводит к таким кратномасштабным соотношениям, что каждая базисная функция на прореженной сетке может быть выражена в виде линейной комбинации базисных функций на густой сетке. В частности, такими соотношениями обладают сплайны. К сожалению, в общем виде решение масштабирующих уравнений затруднительно. Более подходящим способом для неравномерных сеток является построение калибровочных соотношений, обобщающих классические масштабирующие уравнения для равномерных сеток. Это позволяет строить системы вложенных пространств сплайнов при произвольном измельчении/укрупнении неравномерной сетки и ведет к соответствующим адаптивным вейвлетным разложениям на неравномерных сетках на отрезке, т. е. к построению вейвлетных разложений конечных пространств.

Важной задачей при построении сплайн-вейвлетного разложения является выбор метода построения вложенных сеток. В работах [8–10] сплайн-вейвлетные разложения строились при последовательном удалении или добавлении узлов неравномерной сетки, используя замену требования ортогональности вейвлетного базиса на процедуру построения биортогональной (к вейвлетному базису) системы функционалов. В работе [11] при однократном локальном укрупнении неравномерной сетки с узлами, образующими диадическую систему индексов, получались разложения, ведущие к построению либо “ленивых” вейвлетов, либо вейвлетов со смещенным носителем. В работах [12, 13] набор сеток расширен, рассмотрено однократное локальное измельчение неравномерной сетки, однако явное представление фильтров декомпозиции и реконструкции не построено. В данной работе используется тот же подход (в общем случае ведущий к построению биортогональных вейвлетов или лифтинговых схем) к построению сплайн-вейвлетных разложений при однократном локальном измельчении неравномерной сетки. Он применяется для построения сплайн-вейвлетных разложений на отрезке, использующих аппроксимационные соотношения в качестве исходной структуры для построения пространств линейных минимальных сплайнов и калибровочные соотношения для доказательства вложенности соответствующих пространств. В работе построены операторы декомпозиции и реконструкции, доказана их взаимная обратность. Найдено явное представление блока фильтров для построения соответствующих вейвлетных преобразований. Установлен факт разреженности матриц декомпозиции и реконструкции. Преимуществами используемого подхода, за счет отказа от формализма гильбертовых пространств, являются возможность применения неравномерных сеток и достаточно произвольных неполиномиальных сплайн-вейвлетов.

2. Пространство координатных сплайнов

Пусть $\mathbb{Z}, \mathbb{R}$ — множества целых, вещественных чисел соответственно; $C^r[a,b]$ — множество r раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций, полагая $C^0[a,b] = C[a,b]$.

На отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}^1$ рассмотрим сетку X с двумя дополнительными узлами вне отрезка $[a,b]$:

$$X : x_{-1} < a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b < x_{n+1}. \tag{1}$$

Введем обозначение

$$J_{i,k} \stackrel{\text{def}}{=} \{i, i+1, \ldots, k\}, \quad i,k \in \mathbb{Z},\ i < k.$$

Пусть $\{\mathbf{a}_j\}_{j \in J_{-1,n-1}}$ — упорядоченное множество векторов $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^2$. Для удобства компоненты векторов будем обозначать квадратными скобками и нумеровать цифрами. Например, $\mathbf{a}_j = \big([\mathbf{a}_j]_0, [\mathbf{a}_j]_1\big)^T$, где через T обозначено транспонирование.

Будем полагать, что квадратные матрицы $(\mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j)$, составленные из пары векторов $\mathbf{a}_{j-1}$, $\mathbf{a}_j$, являются невырожденными:

$$\det(\mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j) \neq 0 \quad \forall\, j \in J_{-1,n-1}. \tag{2}$$

Объединение всех элементарных сеточных интервалов обозначим через $M \stackrel{\text{def}}{=} \cup_{j \in J_{-1,n}} (x_j, x_{j+1})$. Пусть $\mathbb{X}(M)$ — линейное пространство вещественнозначных функций, заданных на множестве M.

Рассмотрим *порождающую* вектор-функцию $\boldsymbol{\varphi} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ с компонентами из пространства $C^1[a,b]$ и ненулевым вронскианом:

$$|\det(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}')(t)| \geq \text{const} > 0 \quad \forall\, t \in [a,b].$$

Предположим, что функции $\omega_j \in \mathbb{X}(M)$, $j \in J_{-1,n-1}$, удовлетворяют *аппроксимационным соотношениям*:

$$\begin{aligned} \sum_{j'=k-1}^{k} \mathbf{a}_{j'}\,\omega_{j'}(t) \equiv \quad & \boldsymbol{\varphi}(t) \quad \forall\, t \in (x_k, x_{k+1}),\ \forall\, k \in J_{-1,n-1}, \\ \omega_j(t) \equiv \quad & 0 \qquad\ \ \forall\, t \notin [x_j, x_{j+2}] \bigcap M. \end{aligned} \tag{3}$$

Для каждого фиксированного $t \in (x_k, x_{k+1})$ соотношения (3) могут быть рассмотрены как система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\omega_j(t)$. Благодаря предположению (2) система (3) однозначно разрешима, при этом $\operatorname{supp}\omega_j(t) \subset [x_j, x_{j+2}]$.

По формулам Крамера из системы линейных алгебраических уравнений (3) находим

$$\omega_j(t) = \begin{cases} \dfrac{\det(\mathbf{a}_{j-1}, \boldsymbol{\varphi}(t))}{\det(\mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_j)}, & t \in [x_j, x_{j+1}), \\ \dfrac{\det(\boldsymbol{\varphi}(t), \mathbf{a}_{j+1})}{\det(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_{j+1})}, & t \in [x_{j+1}, x_{j+2}). \end{cases} \tag{4}$$

Известно [14], что если векторы $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^2$, $j \in J_{-1,n-1}$, задать формулой

$$\mathbf{a}_j \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\varphi}_{j+1},$$

где $\boldsymbol{\varphi}_j \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\varphi}(x_j)$, то функции $\omega_j \in C[a,b]$. Более того, если $[\boldsymbol{\varphi}(t)]_0 \equiv 1$, т. е. $\boldsymbol{\varphi}(t) = (1, \rho(t))^T$, где $\rho \in C^1[a,b]$, то справедливо свойство *разбиения единицы*:

$$\sum_{j=-1}^{n-1} \omega_j(t) \equiv 1 \quad \forall\, t \in [a,b],$$

при этом формулы (4) принимают вид

$$\omega_j(t) = \begin{cases} \dfrac{\det(\boldsymbol{\varphi}_j, \boldsymbol{\varphi}(t))}{\det(\boldsymbol{\varphi}_j, \boldsymbol{\varphi}_{j+1})} = \dfrac{\rho(t) - \rho_j}{\rho_{j+1} - \rho_j}, & t \in [x_j, x_{j+1}), \\ \dfrac{\det(\boldsymbol{\varphi}(t), \boldsymbol{\varphi}_{j+2})}{\det(\boldsymbol{\varphi}_{j+1}, \boldsymbol{\varphi}_{j+2})} = \dfrac{\rho_{j+2} - \rho(t)}{\rho_{j+2} - \rho_{j+1}}, & t \in [x_{j+1}, x_{j+2}), \end{cases} \tag{5}$$

где $\rho_j \stackrel{\text{def}}{=} \rho(x_j)$.

Пространство

$$\mathbb{S}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ u \mid u = \sum_{j=-1}^{n-1} c_j\,\omega_j \quad \forall\, c_j \in \mathbb{R}^1 \right\}$$

называется *пространством линейных минимальных $B_{\boldsymbol{\varphi}}$-сплайнов (второго порядка)* на сетке X. Сами сплайны будем называть *координатными минимальными сплайнами максимальной гладкости.* В случае полиномиальных компонент порождающей вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}$ можно говорить о степени сплайна, тогда (полиномиальные) сплайны максимальной гладкости являются сплайнами первой степени. Разность между степенью сплайна и порядком его наивысшей непрерывной производной называется *дефектом* сплайна. Таким образом, сплайны максимальной гладкости являются сплайнами с минимальным дефектом (равным 1).

Ясно, что

$$\omega_j(x_i) = \delta_{j,i-1},$$

где $\delta_{j,i}$ — символ Кронекера.

Более того, если функция $\rho(t)$ — строго монотонна на множестве M, то сплайн

$$\omega_j(t) > 0 \quad \forall\, t \in (x_j, x_{j+2}).$$

При $\boldsymbol{\varphi}(t) = (1,t)^T$, т. е. $\rho(t) = t$, функции ω_j совпадают с известными полиномиальными B-сплайнами первой степени (второго порядка), т. е. с одномерными функциями Куранта:

$$\omega_j^B(t) = \begin{cases} \dfrac{t - x_j}{x_{j+1} - x_j}, & t \in [x_j, x_{j+1}), \\ \dfrac{x_{j+2} - t}{x_{j+2} - x_{j+1}}, & t \in [x_{j+1}, x_{j+2}). \end{cases}$$

3. Фильтры декомпозиции и реконструкции в сплайн-вейвлетном разложении

Сетку вида (1), в которой $n = 2^L m$, где $L, m \in \mathbb{Z}$, $L \geq 0$, $m \geq 1$, обозначим через Δ^L. Для нумерации сплайнов может использоваться как левый узел носителя (5), так и центральный узел. Для сплайнов с нумерацией по центральному узлу носителя будем использовать обозначение $\phi_j(t) \stackrel{\text{def}}{=} \omega_{j-1}(t)$.

Объекты, рассматриваемые на сетке Δ^L, далее будем снабжать верхним индексом L. Например, сплайны $\phi_j(t)$, построенные на сетке Δ^L, обозначим через $\phi_j^L(t)$, $j \in J_{0,2^L m}$. Пространство таких сплайнов на отрезке $[a,b]$ обозначим через

$$V^L \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{S}(\Delta^L) = \left\{ s^L \mid s^L(t) = \sum_{j=0}^{2^L m} c_j^L\, \phi_j^L(t) \quad \forall\, c_j^L \in \mathbb{R}^1,\ t \in [a,b] \right\}, \tag{6}$$

$$\dim V^L = 2^L m + 1.$$

Составим из базисных функций ϕ_j^L вектор-строку

$$\boldsymbol{\phi}^L \stackrel{\text{def}}{=} \left(\phi_0^L, \phi_1^L, \ldots, \phi_{2^L m}^L\right).$$

Вводя обозначения для вектора, состоящего из коэффициентов аппроксимации,

$$\boldsymbol{c}^L \stackrel{\text{def}}{=} \left(c_0^L, c_1^L, \ldots, c_{2^L m}^L\right)^T,$$

запишем (6) в векторном виде

$$s^L(t) = \boldsymbol{\phi}^L(t)\, \boldsymbol{c}^L.$$

Пусть сетка Δ^{L+1} получена двукратным измельчением сетки Δ^L путем добавления новых узлов $\xi_j^L \in (x_j^L, x_{j+1}^L)$, $j \in J_{0,2^L m-1}$, т. е.

$$x_j^{L+1} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x_{-1}^L, & j = -1, \\ x_{j/2}^L, & j = 2k,\ k \in J_{0,2^L m}, \\ \xi_{(j-1)/2}^L, & j = 2k-1,\ k \in J_{1,2^L m}, \\ x_{2^L m+1}^L, & j = 2^{L+1} m + 1. \end{cases}$$

Тогда существует матрица *уточняющей реконструкции масштабирующих функций* (или матрица *последовательного деления*) $\boldsymbol{P}^{L+1}$ размера $(2^{L+1} m + 1) \times (2^L m + 1)$ такая, что

$$\boldsymbol{\phi}^L = \boldsymbol{\phi}^{L+1}\, \boldsymbol{P}^{L+1}, \tag{7}$$

где элементы столбцов составлены из коэффициентов *калибровочных соотношений* [12]:

$$\phi_j^L(t) = \begin{cases} \phi_0^{L+1}(t) + p_{-1,2}^{L+1}\, \phi_1^{L+1}(t), & j = 0, \\ p_{j-1,0}^{L+1}\, \phi_{2j-1}^{L+1}(t) + p_{j-1,1}^{L+1}\, \phi_{2j}^{L+1}(t) + p_{j-1,2}^{L+1}\, \phi_{2j+1}^{L+1}(t), & j \in J_{1,2^L m-1}, \\ p_{2^L m-1,0}^{L+1}\, \phi_{2^{L+1}m-1}^{L+1}(t) + \phi_{2^{L+1}m}^{L+1}(t), & j = 2^L m, \end{cases} \tag{8}$$

а коэффициенты $p_{j,i}^{L+1} \in \mathbb{R}^1$, $i = 0, 1, 2$, вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} p_{j,0}^{L+1} &= \frac{\det(\boldsymbol{\varphi}_{2j}^{L+1}, \boldsymbol{\varphi}_{2j+1}^{L+1})}{\det(\boldsymbol{\varphi}_{2j}^{L+1}, \boldsymbol{\varphi}_{2j+2}^{L+1})} = \frac{\rho_{2j+1}^{L+1} - \rho_{2j}^{L+1}}{\rho_{2j+2}^{L+1} - \rho_{2j}^{L+1}}, && j \in J_{0,2^L m-1}, \\ p_{j,1}^{L+1} &= 1, && j \in J_{-1,2^L m-1}, \\ p_{j,2}^{L+1} &= \frac{\det(\boldsymbol{\varphi}_{2j+3}^{L+1}, \boldsymbol{\varphi}_{2j+4}^{L+1})}{\det(\boldsymbol{\varphi}_{2j+2}^{L+1}, \boldsymbol{\varphi}_{2j+4}^{L+1})} = \frac{\rho_{2j+4}^{L+1} - \rho_{2j+3}^{L+1}}{\rho_{2j+4}^{L+1} - \rho_{2j+2}^{L+1}}, && j \in J_{-1,2^L m-2}. \end{aligned}$$

Матрица $\boldsymbol{P}^{L+1}$ имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{P}^{L+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p_{-1,2}^{L+1} & p_{0,0}^{L+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_{0,2}^{L+1} & p_{1,0}^{L+1} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1,2}^{L+1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{2^L m-2,0}^{L+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{2^L m-2,2}^{L+1} & p_{2^L m-1,0}^{L+1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Благодаря калибровочным соотношениям (8) справедливо вложение пространств

$$V^L \subset V^{L+1}.$$

Следовательно, верно вейвлетное разложение

$$V^{L+1} = V^L \dot{+} W^L, \tag{9}$$

где через $\dot{+}$ обозначена прямая сумма пространств V^L и W^L.

Пространство вейвлетов W^L можно определить как дополнение пространства V^L до пространства V^{L+1} таким образом, что любая функция из пространства V^{L+1} может быть записана в виде суммы некоторой функции из пространства V^L и некоторой функции из пространства W^L. При этом существуют различные возможности построения базисных функций в пространстве W^L.

Например, в качестве базисных функций в пространстве W^L можно использовать базисные функции из пространства V^{L+1} с центрами в нечетных узлах. Так получаются "ленивые" вейвлеты, которые не требуют дополнительных вычислений, являясь подмножеством масштабирующих функций. Ясно, что

$$\dim W^L = 2^L m.$$

Тогда выполняется условие дополнения размерностей рассматриваемых пространств, т. е.

$$\dim V^{L+1} = \dim V^L + \dim W^L.$$

Базисные вейвлет-функции обозначим через

$$\psi_i^L(t) \stackrel{\text{def}}{=} \phi_{2i+1}^{L+1}(t), \quad i = 0, 1, \ldots, 2^L m - 1,$$

и введем вектор-строку

$$\boldsymbol{\psi}^L \stackrel{\text{def}}{=} \left(\psi_0^L, \psi_1^L, \ldots, \psi_{2^L m-1}^L\right).$$

Соответствующие вейвлет-коэффициенты аппроксимации обозначим через d_i^L, $i = 0, 1, \ldots, 2^L m - 1$, и введем вектор

$$\boldsymbol{d}^L \stackrel{\text{def}}{=} \left(d_0^L, d_1^L, \ldots, d_{2^L m-1}^L\right)^T.$$

Поскольку пространство вейвлетов W^L по определению является подпространством V^{L+1}, можно представить вейвлет-функции ψ_i^L в виде линейной комбинации масштабирующих функций ϕ_j^{L+1}. Таким образом, существует матрица *уточняющей реконструкции вейвлет-функций* $\boldsymbol{Q}^{L+1}$ размера $(2^{L+1}m + 1) \times 2^L m$ такая, что

$$\boldsymbol{\psi}^L = \boldsymbol{\phi}^{L+1}\boldsymbol{Q}^{L+1}, \tag{10}$$

где все элементы столбцов матрицы $\boldsymbol{Q}^{L+1}$ — нули, за исключением единственной единицы, так как каждый "ленивый" вейвлет — это одна "узкая" базисная функция.

Матрица $\boldsymbol{Q}^{L+1}$ имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{Q}^{L+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

Используя обозначения для блочных матриц, представления (7) и (10) можно записать в виде единого калибровочного соотношения для масштабирующих функций и вейвлетов

$$\left[\boldsymbol{\phi}^L \mid \boldsymbol{\psi}^L\right] = \boldsymbol{\phi}^{L+1}\left[\boldsymbol{P}^{L+1} \mid \boldsymbol{Q}^{L+1}\right]. \tag{11}$$

Ввиду разложения (9) любая функция из пространства V^{L+1} может быть записана в виде суммы некоторой функции из пространства V^L и некоторой функции из пространства W^L, причем справедлива следующая цепочка равенств:

$$s^{L+1}(t) = \boldsymbol{\phi}^{L+1}(t)\,\boldsymbol{c}^{L+1} = \boldsymbol{\phi}^L(t)\,\boldsymbol{c}^L + \boldsymbol{\psi}^L(t)\,\boldsymbol{d}^L = \boldsymbol{\phi}^{L+1}(t)\,\boldsymbol{P}^{L+1}\,\boldsymbol{c}^L + \boldsymbol{\phi}^{L+1}(t)\,\boldsymbol{Q}^{L+1}\,\boldsymbol{d}^L.$$

Пусть известны коэффициенты $\boldsymbol{c}^L$ и $\boldsymbol{d}^L$. Тогда коэффициенты $\boldsymbol{c}^{L+1}$ могут быть получены из коэффициентов $\boldsymbol{c}^L$ и $\boldsymbol{d}^L$ следующим образом:

$$\boldsymbol{c}^{L+1} = \boldsymbol{P}^{L+1}\,\boldsymbol{c}^{L} + \boldsymbol{Q}^{L+1}\,\boldsymbol{d}^{L} \tag{12}$$

или, используя обозначения для блочных матриц,

$$\boldsymbol{c}^{L+1} = \left[\boldsymbol{P}^{L+1} \mid \boldsymbol{Q}^{L+1}\right] \left[\frac{\boldsymbol{c}^{L}}{\boldsymbol{d}^{L}}\right]. \tag{13}$$

Блочная матрица $\left[\boldsymbol{P}^{L+1} \mid \boldsymbol{Q}^{L+1}\right]$ имеет следующий вид:

$$\left[\boldsymbol{P}^{L+1} \mid \boldsymbol{Q}^{L+1}\right] = \left[\begin{array}{cccccc|ccccc}
1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
p^{L+1}_{-1,2} & p^{L+1}_{0,0} & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & p^{L+1}_{0,2} & p^{L+1}_{1,0} & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\
0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & 0 & p^{L+1}_{1,2} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \dots & p^{L+1}_{2^L m-2,0} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & 0 & 0 & \dots & p^{L+1}_{2^L m-2,2} & p^{L+1}_{2^L m-1,0} & 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0
\end{array}\right]. \tag{14}$$

Теорема 1. *Обратная к* (14) *матрица* $\left[\boldsymbol{P}^{L+1} \mid \boldsymbol{Q}^{L+1}\right]^{-1}$ *существует и имеет следующий вид*:

$$\left[\boldsymbol{P}^{L+1} \mid \boldsymbol{Q}^{L+1}\right]^{-1} = \left[\begin{array}{ccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1\\
\hline
-p^{L+1}_{-1,2} & 1 & -p^{L+1}_{0,0} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -p^{L+1}_{0,2} & 1 & -p^{L+1}_{1,0} & \dots & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -p^{L+1}_{2^L m-2,2} & 1 & -p^{L+1}_{2^L m-1,0}
\end{array}\right]. \tag{15}$$

Доказательство. Рассмотрим трехдиагональную матрицу

$$\left[\boldsymbol{P}^{L+1} \mid \boldsymbol{Q}^{L+1}\right]' \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix}
1 & 0 & & & & & & \\
p^{L+1}_{-1,2} & 1 & p^{L+1}_{0,0} & & & & & \\
 & 0 & 1 & 0 & & & & \\
 & & p^{L+1}_{0,2} & 1 & p^{L+1}_{1,0} & & & \\
 & & & 0 & 1 & \ddots & & \\
 & & & & p^{L+1}_{1,2} & \ddots & & \\
 & & & & & \ddots & p^{L+1}_{2^L m-2,0} & \\
 & & & & & & 1 & 0 & \\
 & & & & & & p^{L+1}_{2^L m-2,2} & 1 & p^{L+1}_{2^L m-1,0}\\
 & & & & & & & 0 & 1
\end{bmatrix}, \tag{16}$$

получаемую перестановкой столбцов матрицы (14) в соответствии с подстановкой

$$\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & 2^L m & 2^L m+1 & 2^L m+2 & \ldots & 2^{L+1}m \\ 0 & 2 & 4 & \ldots & 2^{L+1}m & 1 & 3 & \ldots & 2^{L+1}m-1 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Матрицу, соответствующую перестановке столбцов (17), обозначим через $\boldsymbol{T}$. Тогда верно представление

$$\left[\boldsymbol{P}^{L+1} \mid \boldsymbol{Q}^{L+1}\right]' = \left[\boldsymbol{P}^{L+1} \mid \boldsymbol{Q}^{L+1}\right] \boldsymbol{T}. \tag{18}$$

Очевидно, что определитель трехдиагональной матрицы (16) равен произведению ее диагональных элементов. Таким образом, $\det\left[\boldsymbol{P}^{L+1} \mid \boldsymbol{Q}^{L+1}\right]' = 1$, а следовательно, существует обратная к (16) матрица $\left[\boldsymbol{P}^{L+1} \mid \boldsymbol{Q}^{L+1}\right]'^{-1}$, которая также оказывается трехдиагональной и имеет следующий вид:

$$\left[\boldsymbol{P}^{L+1} \mid \boldsymbol{Q}^{L+1}\right]'^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & & & & \\ -p^{L+1}_{-1,2} & 1 & -p^{L+1}_{0,0} & & & & & & \\ & 0 & 1 & 0 & & & & & \\ & & -p^{L+1}_{0,2} & 1 & -p^{L+1}_{1,0} & & & & \\ & & & 0 & 1 & \ddots & & & \\ & & & & -p^{L+1}_{1,2} & \ddots & & & \\ & & & & & \ddots & -p^{L+1}_{2^L m-2,0} & & \\ & & & & & & 1 & 0 & \\ & & & & & & -p^{L+1}_{2^L m-2,2} & 1 & -p^{L+1}_{2^L m-1,0} \\ & & & & & & & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Из представления (18) находим

$$\left[\boldsymbol{P}^{L+1} \mid \boldsymbol{Q}^{L+1}\right]^{-1} = \boldsymbol{T}\left[\boldsymbol{P}^{L+1} \mid \boldsymbol{Q}^{L+1}\right]'^{-1}.$$

Из предыдущего равенства следует, что для нахождения матрицы $\left[\boldsymbol{P}^{L+1} \mid \boldsymbol{Q}^{L+1}\right]^{-1}$, к строкам матрицы (19) требуется применить перестановку, обратную к (17), т.е. перестановку σ^{-1}, в которой записи образа и прообраза поменяны местами. Отсюда получаем искомое представление (15). $\square$

Рассмотрим пространство $\mathbb{L}_N$, $N \in \mathbb{Z}$, $N \geq 0$, всех числовых последовательностей, представленных вектор-столбцами $\boldsymbol{l} = (l_0, l_1, \ldots, l_N)^T$. Рассмотрим два экземпляра пространства $\mathbb{L}_N$, обозначая их через $\mathcal{C}^L$ и $\mathcal{D}^L$. Элементами пространства $\mathcal{C}^L$ являются векторы $\boldsymbol{c}^L$, а элементами пространства $\mathcal{D}^L$ — векторы $\boldsymbol{d}^L$. Обозначим через $\mathcal{C}^L \times \mathcal{D}^L$ прямое произведение пространств $\mathcal{C}^L$ и $\mathcal{D}^L$, т.е.

$$\mathcal{C}^L \times \mathcal{D}^L \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}^L \\ \boldsymbol{d}^L \end{bmatrix} \;\middle|\; \boldsymbol{c}^L \in \mathcal{C}^L, \boldsymbol{d}^L \in \mathcal{D}^L \right\}.$$

Рассмотрим оператор $\mathfrak{R}:\ \mathcal{C}^L \times \mathcal{D}^L \to \mathcal{C}^{L+1}$, $\quad \mathfrak{R} \stackrel{\text{def}}{=} \left[\boldsymbol{P}^{L+1} \mid \boldsymbol{Q}^{L+1}\right]$, для которого

$$\boldsymbol{c}^{L+1} = \mathfrak{R}\begin{bmatrix} \boldsymbol{c}^L \\ \boldsymbol{d}^L \end{bmatrix} = \left[\boldsymbol{P}^{L+1} \mid \boldsymbol{Q}^{L+1}\right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}^L \\ \boldsymbol{d}^L \end{bmatrix}.$$

Оператор $\mathfrak{R}$ называется оператором *реконструкции* (или *синтеза*), формулы (12), (13) называются формулами *реконструкции*, а матрицы $\boldsymbol{P}^{L+1}$ и $\boldsymbol{Q}^{L+1}$ называются *фильтрами реконструкции*.

Рассмотрим обратный процесс разбиения известных коэффициентов $\boldsymbol{c}^{L+1}$ на более грубую версию $\boldsymbol{c}^L$ и уточняющие коэффициенты $\boldsymbol{d}^L$, который определяется матричными уравнениями:

$$\boldsymbol{c}^L = \boldsymbol{A}^{L+1}\boldsymbol{c}^{L+1}, \tag{20}$$

$$\boldsymbol{d}^L = \boldsymbol{B}^{L+1}\boldsymbol{c}^{L+1}, \tag{21}$$

где матрицы $\boldsymbol{A}^{L+1}$ размера $(2^L m+1)\times(2^{L+1}m+1)$ и $\boldsymbol{B}^{L+1}$ размера $2^L m\times(2^{L+1}m+1)$ определяются из соотношения (11) следующим образом:

$$\left[\boldsymbol{\phi}^L \mid \boldsymbol{\psi}^L\right]\left[\frac{\boldsymbol{A}^{L+1}}{\boldsymbol{B}^{L+1}}\right] = \boldsymbol{\phi}^{L+1}. \tag{22}$$

Рассмотрим оператор $\mathfrak{D}:\ \mathcal{C}^{L+1}\to\mathcal{C}^L\times\mathcal{D}^L,\quad \mathfrak{D}\overset{\text{def}}{=}\left[\frac{\boldsymbol{A}^{L+1}}{\boldsymbol{B}^{L+1}}\right]$, для которого

$$\left[\frac{\boldsymbol{c}^L}{\boldsymbol{d}^L}\right] = \mathfrak{D}\,\boldsymbol{c}^{L+1} = \left[\frac{\boldsymbol{A}^{L+1}}{\boldsymbol{B}^{L+1}}\right]\boldsymbol{c}^{L+1}.$$

Оператор $\mathfrak{D}$ называется оператором *декомпозиции* (или *анализа*), формулы (20), (21) называются формулами *декомпозиции*, а матрицы $\boldsymbol{A}^{L+1}$ и $\boldsymbol{B}^{L+1}$ — *фильтрами декомпозиции.*

Теорема 2. *Операторы $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{R}$ взаимно обратны. Они реализуют линейный изоморфизм пространств $\mathcal{C}^{L+1}$ и $\mathcal{C}^L\times\mathcal{D}^L$.*

Доказательство. Действительно, из соотношений (11) и (22), ввиду существования матрицы $\left[\boldsymbol{P}^{L+1}\mid\boldsymbol{Q}^{L+1}\right]^{-1}$, имеем

$$\left[\frac{\boldsymbol{A}^{L+1}}{\boldsymbol{B}^{L+1}}\right] = \left[\boldsymbol{P}^{L+1}\mid\boldsymbol{Q}^{L+1}\right]^{-1}. \tag{23}$$

Пользуясь представлением (23), из определений операторов $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{D}$ получаем

$$\mathfrak{R}\mathfrak{D} = \left[\boldsymbol{P}^{L+1}\mid\boldsymbol{Q}^{L+1}\right]\left[\frac{\boldsymbol{A}^{L+1}}{\boldsymbol{B}^{L+1}}\right] = \boldsymbol{P}^{L+1}\boldsymbol{A}^{L+1}+\boldsymbol{Q}^{L+1}\boldsymbol{B}^{L+1} = I, \tag{24}$$

где I — единичная матрица соответствующего размера.

С другой стороны, верно представление

$$\mathfrak{D}\mathfrak{R} = \left[\frac{\boldsymbol{A}^{L+1}}{\boldsymbol{B}^{L+1}}\right]\left[\boldsymbol{P}^{L+1}\mid\boldsymbol{Q}^{L+1}\right] = \left[\begin{array}{c|c}\boldsymbol{A}^{L+1}\boldsymbol{P}^{L+1} & \boldsymbol{A}^{L+1}\boldsymbol{Q}^{L+1}\\ \hline \boldsymbol{B}^{L+1}\boldsymbol{P}^{L+1} & \boldsymbol{B}^{L+1}\boldsymbol{Q}^{L+1}\end{array}\right] = I, \tag{25}$$

где I — единичная матрица соответствующего размера. □

Следствие. *Из равенств* (24), (25) *следуют соотношения, связывающие матрицы* $\boldsymbol{A}^{L+1}$, $\boldsymbol{B}^{L+1}$, $\boldsymbol{P}^{L+1}$ *и* $\boldsymbol{Q}^{L+1}$:

$$\boldsymbol{P}^{L+1}\boldsymbol{A}^{L+1}+\boldsymbol{Q}^{L+1}\boldsymbol{B}^{L+1} = I, \tag{26}$$

$$\boldsymbol{A}^{L+1}\boldsymbol{P}^{L+1} = I,\quad \boldsymbol{B}^{L+1}\boldsymbol{Q}^{L+1} = I, \tag{27}$$

$$\boldsymbol{A}^{L+1}\boldsymbol{Q}^{L+1} = O, \quad \boldsymbol{B}^{L+1}\boldsymbol{P}^{L+1} = O, \tag{28}$$

где I — единичные матрицы, O — нулевые матрицы, соответствующих размеров.

Замечание 1. Благодаря соотношениям (27), (28) построенные матрицы можно использовать в качестве порождающих и проверочных матриц при построении схемы помехоустойчивого кодирования, используя условие точного восстановления (26). Подробнее см., например, [15].

Из представления (14) видно, что матрицы $\left[\boldsymbol{P}^{L+1} \mid \boldsymbol{Q}^{L+1}\right]$ разрежены. Однако матрицы, обратные к $\left[\boldsymbol{P}^{L+1} \mid \boldsymbol{Q}^{L+1}\right]$, в общем случае теряют разреженную структуру. Тогда декомпозицию можно осуществить без построения фильтров декомпозиции в явном виде. Для этого приходится решать разреженную систему линейных уравнений (13), разрешимость которой гарантируется линейной независимостью базисных функций. Для того, чтобы ее решить относительно коэффициентов $\boldsymbol{c}^L$ и $\boldsymbol{d}^L$, матрицу системы предлагается сделать ленточной, изменив порядок неизвестных, а затем применить один из специальных методов решения [2]. Еще одним способом является построение матрицы продолжения, элементами которой являются значения расширенной системы биортогональных функционалов на исходном базисе [4].

В нашем случае матрицы $\left[\frac{\boldsymbol{A}^{L+1}}{\boldsymbol{B}^{L+1}}\right]$, обратные к матрицам $\left[\boldsymbol{P}^{L+1} \mid \boldsymbol{Q}^{L+1}\right]$, оказываются разреженными. Из равенства (14) находим явное представление фильтров декомпозиции:

$$\boldsymbol{A}^{L+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}^{L+1} = \begin{bmatrix} -p^{L+1}_{-1,2} & 1 & -p^{L+1}_{0,0} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p^{L+1}_{0,2} & 1 & -p^{L+1}_{1,0} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -p^{L+1}_{2^Lm-2,2} & 1 & -p^{L+1}_{2^Lm-1,0} \end{bmatrix}.$$

Замечание 2. Матрица $\boldsymbol{A}^{L+1}$ является 2-циркулянтной, однако матрица $\boldsymbol{B}^{L+1}$, вообще говоря, циркулянтной не является.

Замечание 3. Отметим, что после построения “ленивых” вейвлетов и соответствующих фильтров, их улучшение ведет к простому пути построения биортогональных вейвлетов и лифтинговых схем (подробнее см. [2, 16, 17]).

Литература

1. **Чуи Ч.** Введение в вейвлеты. Пер. с англ.—М.: Мир, 2001.
2. **Столниц Э., ДеРоуз Т., Салезин Д.** Вейвлеты в компьютерной график. Пер. с англ.—Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2002.

3. **Шумилов Б.М.** Алгоритмы с расщеплением вейвлет-преобразования сплайнов первой степени на неравномерных сетках // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2016. — Т. 56, № 7. — С. 1236–1247. Перевод: Shumilov B.M. Splitting algorithms for the wavelet transform of first-degree splines on nonuniform grids // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2016. — Vol. 56, № 7. — P. 1209–1219.

4. **Демьянович Ю.К.** Сплайн-вейвлеты при однократном локальном укрупнении сетки // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2012. — Т. 405. — С. 97–118. Перевод: Dem'yanovich Yu.K. Spline-wavelets in the case of a single local coarsening of a grid // J. Math. Sci. — 2013. — Vol. 191, № 1. — P. 52–64.

5. **Демьянович Ю.К., Пономарев А.С.** О реализации сплайн-всплескового разложения первого порядка // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2016. — Т. 453. — С. 33–73. Перевод: Dem'yanovich Yu.K., Ponomarev A.S. Realization of the spline-wavelet decomposition of the first order // J. Math. Sci. — 2017. — Vol. 224, № 6. — P. 833–860.

6. **Faber G.** Über stetige functionen // Math. Ann. — 1908. — Vol. 66. — P. 81–94.

7. **Haar A.** Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme // Math. Ann. — 1910. — Vol. 69. — P. 331–371.

8. **Макаров А.А.** О вейвлетном разложении пространств сплайнов первого порядка // Проблемы матем. анализа. — 2008. — Вып. 38. — С. 47–60. Перевод: Makarov A.A. On wavelet decomposition of spaces of first order splines // J. Math. Sci. — 2009. — Vol. 156, № 4. — P. 617–631.

9. **Макаров А.А.** Алгоритмы вейвлетного сжатия пространств линейных сплайнов // Вестн. С.-Петербурского университета. Сер. 1. — 2012. — Вып. 2. — С. 41–51. Перевод: Makarov A.A. Algorithms of wavelet compression of linear spline spaces // Vestn. St. Petersbg. Univ. Math. — 2012. — Vol. 45, № 2. — P. 82–92.

10. **Макаров А.А.** Алгоритмы вейвлетного уточнения пространств сплайнов первого порядка // Тр. СПИИРАН. — 2011. — Вып. 19. — С. 203–220.

11. **Макаров А.А.** О двух алгоритмах вейвлет-разложения пространств линейных сплайнов // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2017. — Т. 463. — С. 277–293. Перевод: Makarov A.A. On two algorithms of wavelet decomposition for spaces of linear splines // J. Math. Sci. — 2018. — Vol. 232, № 6. — P. 926–937.

12. **Makarov A., Makarova S.** On lazy Faber's type decomposition for linear splines // Proc. AIP Conference. — 2019. — Vol. 2164. — P. 110006.

13. **Makarova S., Makarov A.** On linear spline wavelets with shifted supports // Lecture Notes in Computer Science. — 2020. — Vol. 11974. — C. 430–437.

14. **Макаров А.А.** О построении сплайнов максимальной гладкости // Проблемы матем. анализа. — 2011. — Вып. 60. — С. 25–38. Перевод: Makarov A.A. Construction of splines of maximal smoothness // J. Math. Sci. — 2011. — Vol. 178, № 6. — P. 589–604.

15. **Мак-Вильямс Ф.Дж., Слоэн Н.Дж.А.** Теория кодов, исправляющих ошибки. — М.: Связь, 1979.

16. **Sweldens W.** The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets // Appl. Comput. Harmonic Analys. — 1996. — Vol. 3, iss. 2. — P. 186–200.

17. **Малла С.** Вейвлеты в обработке сигналов / Пер. с англ. Я.М. Жилейкина. — М.: Мир, 2005.

Поступила в редакцию 01 июня 2020 г.
После исправления 24 ноября 2020 г.
Принята к печати 14 апреля 2021 г.

Литература в транслитерации

1. **Chui Ch.** Vvedenie v veivlety. Per. s angl. — M.: Mir, 2001.
2. **Stolnits E., DeRouz T., Salezin D.** Veivlety v komp'yuternoi grafik. Per. s angl. — Izhevsk: NITS "Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika", 2002.
3. **Shumilov B.M.** Algoritmy s rasschepleniem veivlet-preobrazovaniya splainov pervoi stepeni na neravnomernyh setkah // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2016. — T. 56, № 7. — S. 1236–1247. Perevod: Shumilov B.M. Splitting algorithms for the wavelet transform of first-degree splines on nonuniform grids // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2016. — Vol. 56, № 7. — P. 1209–1219.
4. **Dem'yanovich Yu.K.** Splain-veivlety pri odnokratnom lokal'nom ukrupnenii setki // Zap. nauchn. sem. POMI. — 2012. — T. 405. — S. 97–118. Perevod: Dem'yanovich Yu.K. Spline-wavelets in the case of a single local coarsening of a grid // J. Math. Sci. — 2013. — Vol. 191, № 1. — P. 52–64.
5. **Dem'yanovich Yu.K., Ponomarev A.S.** O realizatsii splain-vspleskovogo razlozheniya pervogo poryadka // Zap. nauchn. sem. POMI. — 2016. — T. 453. — S. 33–73. Perevod: Dem'yanovich Yu.K., Ponomarev A.S. Realization of the spline-wavelet decomposition of the first order // J. Math. Sci. — 2017. — Vol. 224, № 6. — P. 833–860.
6. **Faber G.** Über stetige functionen // Math. Ann. — 1908. — Vol. 66. — P. 81–94.
7. **Haar A.** Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme // Math. Ann. — 1910. — Vol. 69. — P. 331–371.
8. **Makarov A.A.** O veivletnom razlozhenii prostranstv splainov pervogo poryadka // Problemy matem. analiza. — 2008. — Vyp. 38. — S. 47–60. Perevod: Makarov A.A. On wavelet decomposition of spaces of first order splines // J. Math. Sci. — 2009. — Vol. 156, № 4. — P. 617–631.
9. **Makarov A.A.** Algoritmy veivletnogo szhatiya prostranstv lineinyh splainov // Vestn. S.-Peterburskogo universiteta. Ser. 1. — 2012. — Vyp. 2. — S. 41–51. Perevod: Makarov A.A. Algorithms of wavelet compression of linear spline spaces // Vestn. St. Petersbg. Univ. Math. — 2012. — Vol. 45, № 2. — P. 82–92.
10. **Makarov A.A.** Algoritmy veivletnogo utochneniya prostranstv splainov pervogo poryadka // Tr. SPIIRAN. — 2011. — Vyp. 19. — C. 203–220.
11. **Makarov A.A.** O dvuh algoritmah veivlet-razlozheniya prostranstv lineinyh splainov // Zap. nauchn. sem. POMI. — 2017. — T. 463. — S. 277–293. Perevod: Makarov A.A. On two algorithms of wavelet decomposition for spaces of linear splines // J. Math. Sci. — 2018. — Vol. 232, № 6. — P. 926–937.
12. **Makarov A., Makarova S.** On lazy Faber's type decomposition for linear splines // Proc. AIP Conference. — 2019. — Vol. 2164. — P. 110006.
13. **Makarova S., Makarov A.** On linear spline wavelets with shifted supports // Lecture Notes in Computer Science. — 2020. — Vol. 11974. — C. 430–437.
14. **Makarov A.A.** O postroenii splainov maksimal'noi gladkosti // Problemy matem. analiza. — 2011. — Vyp. 60. — C. 25–38. Perevod: Makarov A.A. Construction of splines of maximal smoothness // J. Math. Sci. — 2011. — Vol. 178, № 6. — P. 589–604.
15. **Mak-Vil'yams F.Dzh., Sloen N.Dzh.A.** Teoriya kodov, ispravlyayuschih oshibki. — M.: Svyaz', 1979.
16. **Sweldens W.** The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets // Appl. Comput. Harmonic Analys. — 1996. — Vol. 3, iss. 2. — P. 186–200.
17. **Malla S.** Veivlety v obrabotke signalov / Per. s angl. Ya.M. Zhileikina. — M.: Mir, 2005.