

## ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн.— Новосибирск: Наука, 1985.
2. Long R. R. Solitary waves in one and two-fluid system // *Tellus*.— 1956.— V. 8, N 4.
3. Koop C. G., Bulter G. An investigation of internal solitary waves in a two-fluid system // *J. Fluid Mech.*— 1981.— V. 112.
4. Mirie R. M. An internal solitary waves with bounded amplitude // *J. Phys. Soc. Jap.*— 1985.— V. 54, N 9.
5. Агеев В. А., Букреев В. И., Гаврилов Н. В. Новый тип плоских стационарных волн в двухслойной жидкости // *Изв. АН СССР. МЖГ.*— 1986.— № 5.
6. Гаврилов Н. В. Уединенные внутренние волны большой амплитуды в двухслойной жидкости // *ПМТФ.*— 1986.— № 5.
7. Гаврилов Н. В. Плавные боры в двухслойной жидкости со сдвигом скорости между слоями // *ПМТФ.*— 1987.— № 3.
8. Гаврилов Н. В. Вязкое затухание уединенных внутренних волн в двухслойной жидкости // *ПМТФ.*— 1988.— № 4.
9. Букреев В. И., Гаврилов Н. В. Экспериментальное изучение возмущений впереди крыла, движущегося в стратифицированной жидкости // *ПМТФ.*— 1990.— № 2.

г. Новосибирск

Поступила 12/II 1993 г.

УДК 532.59

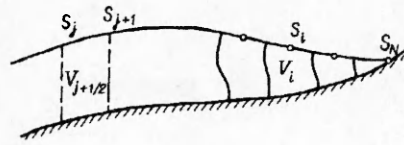
А. М. Франк

### ДИСКРЕТНАЯ НЕЛИНЕЙНО-ДИСПЕРСИОННАЯ МОДЕЛЬ МЕЛКОЙ ВОДЫ

В последнее время получил известное распространение дискретный подход к построению численных моделей механики сплошной среды. После первых работ [1, 2] появились дискретные модели газовой динамики, магнитной гидродинамики, идеальной несжимаемой жидкости, твердого деформируемого тела, обладающие основными законами сохранения при любом числе степеней свободы. В основном такие модели построены для достаточно общих случаев движения среды, скажем, в случае несжимаемой жидкости они являются дискретными аналогами полных уравнений Эйлера. Исключением является работа [3], где построена дискретная нелинейная модель мелкой воды без дисперсии. Для двумерной дискретной модели несжимаемой жидкости, предложенной в [4], при расчете уединенных волн на грубой сетке отмечалось определенное ее сходство с нелинейно-дисперсионными моделями мелкой воды. Исследование дисперсионного соотношения этой модели на задаче о линейных волнах в жидкости конечной глубины показало, что выбором параметров сетки можно в широких пределах управлять дисперсионными свойствами модели, получая как точный закон  $\omega^2 = k \operatorname{th}(k)$  в пределе при шаге сетки  $h \rightarrow 0$ , так и закон, очень близкий к  $\omega^2 = \frac{k^2}{1 + k^2/3}$  при умеренных значениях  $h$ . Таким образом, модель [4] дает пример дискретной математической модели, которая при детальной пространственной дискретизации является конечномерным аналогом полных уравнений Эйлера, а при более грубой — нелинейно-дисперсионных уравнений мелкой воды. Оказывается, однако, что в рамках такого дискретного подхода можно непосредственно построить более простую нелинейно-дисперсионную модель мелкой воды, которая, как и в непрерывном случае, имеет меньшую размерность и поэтому более удобна и экономична при моделировании длинных волн.

1. Уравнения движения. Рассмотрим задачу о движении длинных гравитационных волн в вязкой несжимаемой жидкости над неровным дном. Разобьем слой жидкости на элементарные жидкие объемы  $V_i$  (рис. 1). Со-

гласно обычным представлениям в теории мелкой воды, будем считать, что касательная к дну компонента скорости жидкости слабо меняется по глубине, при этом в силу уравнения неразрывности нормальная к дну компонента скорости изменяется с глубиной от нуля до некоторого значения на поверхности по закону, близкому к линейному. При таком распределении скоростей сдвиговая деформация объемов  $V_i$  невелика, и поэтому можно попробовать описать это течение как движение совокупности объемов  $V_i$ , каждый из которых рассматривается как материальная частица, движущаяся без трения вдоль дна, имеющая массу  $m_i = \rho V_i$  и две степени свободы:  $\xi_i$  — координата вдоль кривой, описывающей рельеф дна, и  $\sigma_i$  — характерная толщина слоя жидкости по нормали к дну. Кинетическую энергию такой системы с учетом сделанных выше предположений приближенно запишем в виде



Р и с. 1

$$(1.1) \quad T = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\xi}_i^2 + \alpha \dot{\sigma}_i^2),$$

где  $\alpha$  — коэффициент, возникающий при интегрировании квадрата нормальной к дну компоненты скорости жидкости по объему  $V_i$ , равный  $1/3$  в случае ее линейного изменения по нормали.

Для отслеживания положения свободной границы удобно ввести специальные нематериальные частицы-маркеры  $S_i$  (рис. 1) с декартовыми координатами  $x_i, y_i$ . Тогда потенциальную энергию дискретной системы аналогично [4] представим как

$$(1.2) \quad \Pi = \int_{\Omega} \rho g y dx dy.$$

Здесь  $\rho$  — плотность жидкости;  $g$  — ускорение свободного падения;  $\Omega$  — область, занятая жидкостью, если под свободной границей понимать ломаную, проведенную через  $S_i$ . Ясно, что  $\Pi$  зависит от координат маркеров и эту зависимость можно легко выписать в явном виде. Так, в случае канала с вертикальными боковыми стенками имеем

$$\Pi = \Pi_0 + \frac{\rho g}{6} \sum_{i=1}^{N-1} (x_{i+1} - x_i) (y_i^2 + y_i y_{i+1} + y_{i+1}^2),$$

где  $\Pi_0$  зависит только от выбора начала декартовой системы координат.

Дискретное условие несжимаемости, гарантирующее точное сохранение объема жидкости, также удобно ввести с помощью маркеров. В приводимых ниже рассуждениях и численных расчетах использовалось условие

$$(1.3) \quad V_{j+1/2} = V_{j+1/2}^0 = \text{const.}$$

Здесь  $V_{j+1/2}$  — объем, вырезаемый из слоя жидкости вертикальными прямыми, проведенными из  $S_j$  и  $S_{j+1}$  (см. рис. 1). Ясно, что в принципе возможны и другие способы разбиения. Соотношения (1.3) представляют собой голономные связи, поэтому лагранжиан рассматриваемой системы приобретает вид

$$(1.4) \quad L = T - \Pi + \sum_s \lambda_{s+1/2} (V_{s+1/2} - V_{s+1/2}^0),$$

где  $\lambda_{s+1/2}$  — множители Лагранжа.

Степенями свободы здесь являются  $\xi_i, \sigma_i, x_i, y_i$ , поэтому необходимо ввести еще некоторые замыкающие соотношения, связывающие движение маркеров с осредненным движением жидкости. В качестве таких соотношений используются неголономные связи вида

$$(1.5) \quad \delta x_i = \delta \xi_i \cos \varphi_i - \delta \sigma_i \sin \varphi_i, \quad \delta y_i = \delta \xi_i \sin \varphi_i + \delta \sigma_i \cos \varphi_i$$

( $\varphi_i$  — угол наклона касательной к дну в точке  $x_i$ ). Пусть  $d(x)$  обозначает глубину невозмущенной жидкости, тогда  $\text{tg } \varphi_i = -d_x(x_i)$ . Связи (1.5) пос-

тулируют, что маркеры движутся как жидкие частицы на свободной границе с учетом приближения мелкой воды.

Соотношения (1.1)–(1.5) полностью определяют движение системы. Выбирая в качестве независимых вариации  $\delta \xi_i$  и  $\delta \sigma_i$ , из принципа Гамильтона легко получить следующие уравнения Лагранжа:

$$(1.6) \quad \begin{aligned} m_i \ddot{\xi}_i &= \frac{\partial F}{\partial x_i} \cos \varphi_i + \frac{\partial F}{\partial y_i} \sin \varphi_i, \\ \alpha m_i \ddot{\sigma}_i &= -\frac{\partial F}{\partial x_i} \sin \varphi_i + \frac{\partial F}{\partial y_i} \cos \varphi_i, \\ F &= \sum_s \lambda_{s+1/2} V_{s+1/2} - \Pi, \quad \dot{x}_i = u_i = \dot{\xi}_i \cos \varphi_i - \dot{\sigma}_i \sin \varphi_i, \\ \dot{y}_i = v_i &= \dot{\xi}_i \sin \varphi_i + \dot{\sigma}_i \cos \varphi_i, \quad V_{s+1/2} = V_{s+1/2}^0. \end{aligned}$$

Приведем еще некоторые формулы. Если выбрать декартову систему координат так, что  $y = 0$  соответствует невозмущенной свободной поверхности, то для маркера общего положения имеем

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial x_k} &= \frac{\rho g}{6} (y_{k-1} - y_{k+1}) (y_{k-1} + y_k + y_{k+1}), \\ \frac{\partial \Pi}{\partial y_k} &= \frac{\rho g}{6} [(x_{k+1} - x_{k-1}) (y_{k-1} + 2y_k) + (x_{k+1} - x_k) (y_{k+1} - y_{k-1})], \\ V_{s+1/2} &= \frac{1}{2} (x_{s+1} - x_s) (y_s + d(x_s) + y_{s+1} + d(x_{s+1})). \end{aligned}$$

В силу известных теорем классической механики система (1.6) обладает законом сохранения полной энергии, а для ровного дна при отсутствии боковых стенок или для локализованного возмущения — также законом сохранения горизонтальной компоненты импульса.

Для системы (1.6) аналогично непрерывному случаю можно исследовать дисперсию линейных гармонических поверхностных волн в бесконечном слое жидкости глубины  $d = \text{const}$ . Введем безразмерные переменные с помощью масштабов длины  $d$  и скорости  $U = \sqrt{gd}$  и распределим частицы на поверхности невозмущенного слоя равномерно с безразмерным шагом  $h$ . Тогда, линеаризуя уравнения (1.6), (1.7) в окрестности покоя, можно точно получить следующий закон дисперсии линейных волн:

$$(1.8) \quad \omega^2 = \frac{2 + \cos kh}{3} \frac{4 \operatorname{tg}^2 \frac{kh}{2}}{4\alpha \operatorname{tg}^2 \frac{kh}{2} + h^2}$$

( $\omega$  и  $k$  — безразмерные частота волны и ее волновое число). В пределе при  $h \rightarrow 0$

$$(1.9) \quad \omega^2 = \frac{k^2}{1 + \alpha k^2}.$$

Для  $\alpha = 1/3$  выражение (1.9) представляет собой известное дисперсионное соотношение, характерное для многих нелинейно-дисперсионных моделей мелкой воды. Слегка изменяя  $\alpha$  в окрестности значения  $1/3$ , можно в определенном интервале волновых чисел добиться от (1.8) даже лучшей аппроксимации точного закона дисперсии для линейных волн  $\omega^2 = k \operatorname{th}(kh)$ . На рис. 2 приведены две дисперсионные кривые (1.8) при  $h = 0,3$  (кривые 2, 4 для  $\alpha = 0,27$  и  $1/3$ ) в сравнении с точным законом (кривая 1) и законом (1.9) при  $\alpha = 1/3$  (кривая 3). Интервал волновых чисел выбран так, что самые короткие волны имеют безразмерную длину  $\lambda = 2\pi/k = 3$ , при этом на одну длину такой волны приходится 10 ячеек сетки дискретной модели. Видно, что выбор  $\alpha = 0,27$  дает гораздо лучшую аппроксимацию точного закона, чем (1.9) при  $\alpha = 1/3$ . Заметим, что уменьшение  $\alpha$  относительно  $1/3$  для коротких волн физически оправдано, так как

вертикальная скорость в них убывает с глубиной быстрее, чем линейная функция.

Покажем теперь, во что переходят сами уравнения (1.6), (1.7) при  $h \rightarrow 0$ . Выкладки для простоты приведем в случае  $d(x) = \text{const}$ , тогда  $\varphi_i = 0$ ,  $x_i = \xi_i$ ,  $y_i = \sigma_i$ . Будем считать, что в покое все частицы распределены равномерно с шагом  $h$ , т. е. все  $m_i$  одинаковы и равны  $m_i = hd$ . Введем лагранжеву координату частиц  $q$ ,  $q_i = ih$ , а также полную глубину  $H = y + d$ . Дифференцируя связи (1.3) по времени, учитывая (1.7), получим

$$(1.10) \quad (y_i + y_{i+1} + 2d)(u_{i+1} - u_i) + (x_{i+1} - x_i)(v_{i+1} + v_i) = 0.$$

При  $h \rightarrow 0$  из (1.3) и (1.10) имеем соответственно

$$(1.11) \quad \frac{\partial x}{\partial q} = \frac{d}{H},$$

$$(1.12) \quad H \frac{\partial u}{\partial q} + v \frac{\partial x}{\partial q} = 0.$$

Первые два уравнения (1.6) дают в пределе

$$(1.13) \quad d\dot{u} = -\frac{\partial}{\partial q} \lambda H + qy \frac{\partial y}{\partial q};$$

$$(1.14) \quad \alpha d\dot{v} = \lambda \frac{\partial x}{\partial q} - gy \frac{\partial x}{\partial q}.$$

Вводя, как обычно, функцию возвышения свободной поверхности  $\eta(t, x(t, q)) = y(t, q)$  и учитывая, что полная производная по времени  $D\eta = \dot{\eta} = \eta_t + u\eta_x = v$ , из (1.11)–(1.14) получаем окончательно

$$(1.15) \quad \eta_t + (Hu)_x = 0,$$

$$Du + g\eta_x = -\frac{\alpha}{H} (H^2 D^2 \eta)_x.$$

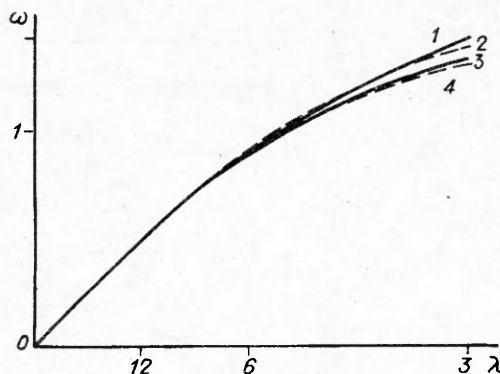
Система (1.15) при  $\alpha = 1/3$  является хорошо известной нелинейно-дисперсионной моделью мелкой воды для волн конечной амплитуды [5], в таком виде она приведена в [6]. Таким образом, в случае ровного дна и при  $\alpha = 1/3$  построенная выше дискретная модель фактически представляет собой полностью консервативную разностную схему в лагранжевых координатах для уравнений, эквивалентных [5]. Приведенный выше вывод этих уравнений представляется более простым. Если же иметь целью численное моделирование, то построение полностью консервативной схемы для уравнений в виде (1.15) — задача нетривиальная. Заметим еще, что обычная для численного моделирования цепочка пройдена здесь в обратном направлении, т. е. сначала выведена дискретная численная модель, а уже затем соответствующая ей континуальная.

В случае неровного дна для достаточно гладкой функции глубины  $d(x)$  предельные уравнения можно привести к аналогичному виду

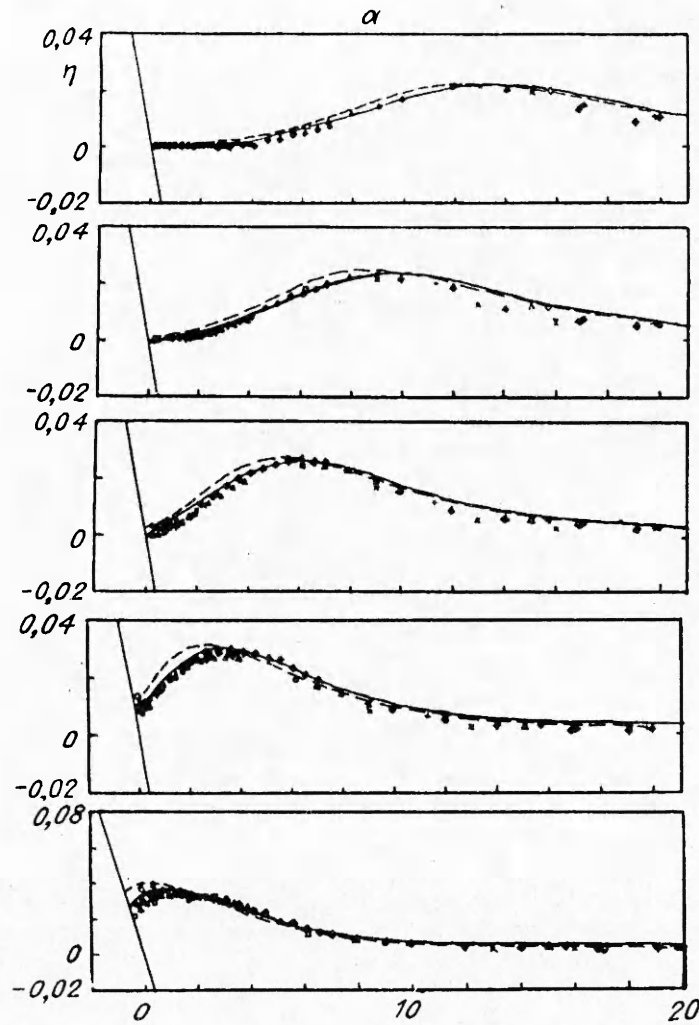
$$(1.16) \quad \eta_t + (Hu)_x = 0,$$

$$Du + g\eta_x = -\frac{\alpha}{H} (H^2 (A + B))_x + \alpha A d_x + B (1 + \alpha d_x),$$

где  $A = D^2 \eta$ ;  $B = Dd_x / (1 + d_x^2)$ ; дисперсионный член в правой части второго уравнения (1.16) уже отличается от приведенного в [5, 6]. Отметим, что здесь также отличаются исходные посылки, так как в [5] и в случае неровного дна предполагается, что горизонтальная скорость  $u$  не зависит от  $y$ . Отметим еще, что в дискретной модели (1.6) в отличие от уравнений (1.16) формаль-



Р и с. 2



Р и с. 3

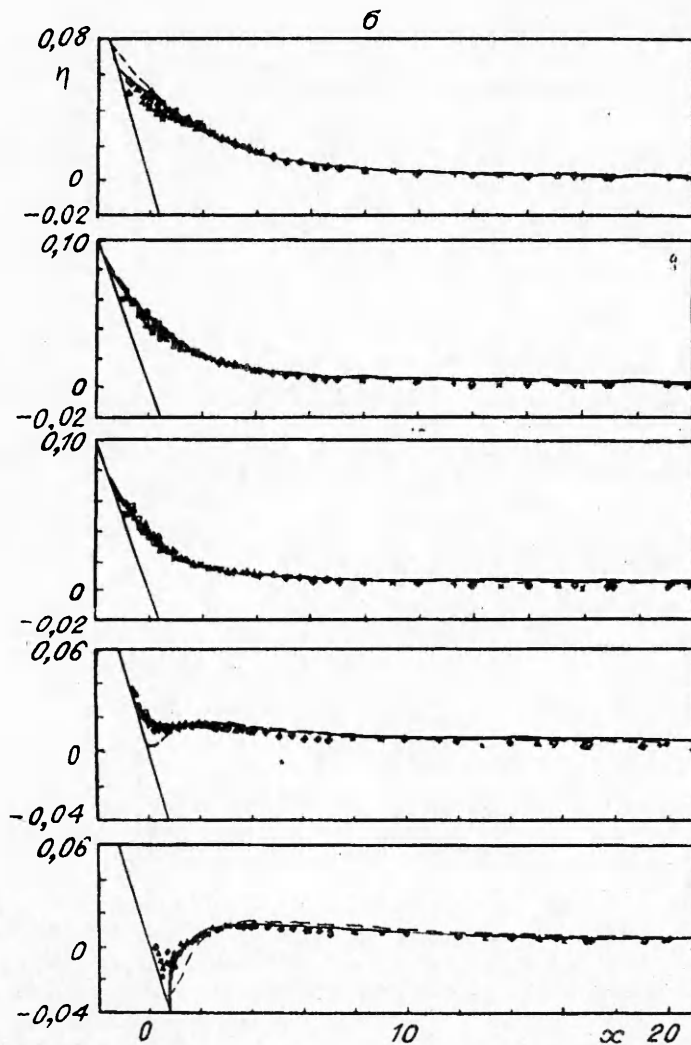
ные требования к гладкости функции глубины  $d(x)$  существенно слабее; в частности, не возникает бесконечных или очень больших ускорений, если дно имеет излом или участок с малым радиусом кривизны, как, например, в рассматриваемой ниже задаче наката волн на откос.

Необходимо сказать еще несколько слов о точках контакта свободной поверхности с жесткими стенками. Такие точки также являются маркерами, т. е. служат узлами ломаной, аппроксимирующей свободную границу. В отличие от других они могут двигаться только вдоль жесткой стенки, т. е. имеют одну степень свободы  $\xi_i$ . Соответственно в (1.6) для них отсутствуют уравнения в направлении  $\sigma_i$ . Немного изменяются для таких частиц выражения для производных от  $\Pi$ . Так, в рассматриваемой ниже задаче наката волн на пологий откос для крайнего маркера с номером  $N$ , описывающего движение точки уреза, имеем

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_N} = \frac{\rho g}{6} (y_{N-1} - y_N) (y_{N-1} + 2y_N), \quad \frac{\partial \Pi}{\partial y_N} = \frac{\rho g}{6} (x_N - x_{N-1}) (y_{N-1} + 2y_N).$$

Эти выражения можно получить как непосредственно из (1.2), так и из (1.7), если ввести фиктивную частицу с номером  $N + 1$  и положить по определению  $x_{N+1} = x_N$ ,  $y_{N+1} = y_N$ .

**2. Численные расчеты.** Для численного решения системы (1.6) использовался алгоритм [7], разработанный специально для дискретных моделей несжимаемой жидкости. Как обычно, при решении нелинейно-дисперси-

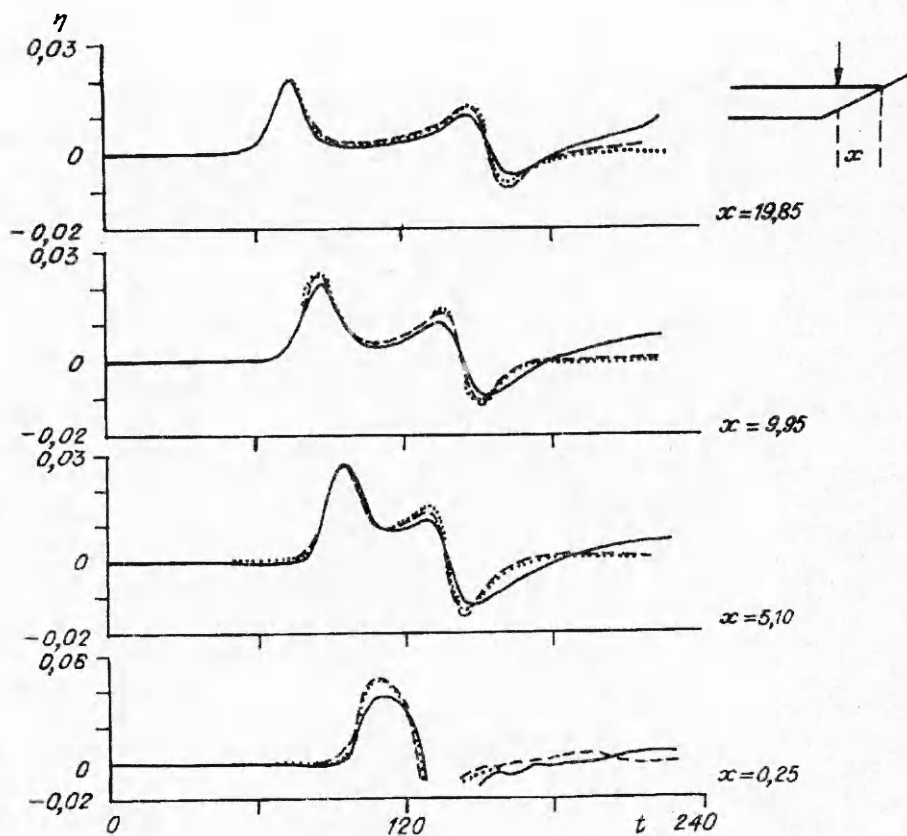


онных уравнений мелкой воды возникает необходимость обращения на каждом шаге по времени некоторого эллиптического оператора. Здесь роль такой эллиптической задачи играет система линейных уравнений для нахождения на каждом шаге множителей Лагранжа [7]. Легко показать, что для данной модели матрица этой системы трехдиагональна, симметрична и положительно определена. Для ее обращения использовалась прогонка. Нетрудно показать также, что используемый численный алгоритм по количеству вычислений эквивалентен простой явной схеме для уравнений (1.15), (1.16) в лагранжевых координатах.

Все расчеты проводились для  $d_0 = 1$ ,  $g = 1$ ,  $\rho = 1$ , что соответствует обезразмериванию переменных с помощью масштабов  $d_0$ ,  $\sqrt{gd_0}$  и  $\rho$ . Численные эксперименты показали прежде всего, что описанная дискретная модель даже на довольно грубой сетке имеет решения в виде уединенных волн, которые в силу консервативных свойств модели и численного алгоритма распространяются по ровному дну с постоянными средними скоростью, амплитудой и энергией. Для  $\alpha = 1/3$  эти решения сравнивались с классическими солитонами Рэлея

$$(1.17) \quad \eta = a \operatorname{sech}^2 \left[ (x - x_0) \sqrt{\frac{3a}{4(a+1)}} \right].$$

Так, для солитона с амплитудой  $a = 0,7$  при значениях шагов по пространству  $h = 1$ , по времени  $\tau = 0,5$  максимальное относительное отличие числен-



Р и с. 4

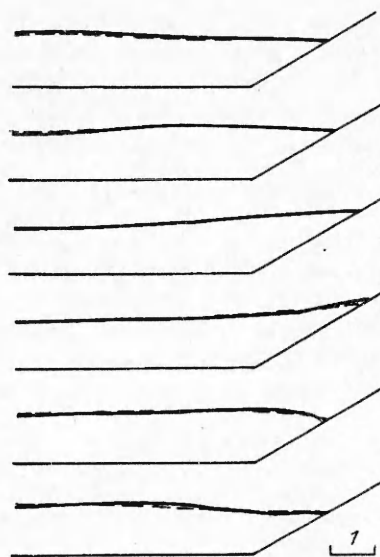
ного решения от (1.17) не превышало для формы солитона и его фазовой скорости соответственно 1 и 0,3 %. При  $h = 0,5$ ,  $\tau = 0,25$  отклонение уменьшилось до 0,2 и 0,09 %. Колебания полной энергии волны относительно постоянного среднего значения не превышали соответственно 0,005 и 0,003 %, т. е. находились уже вблизи ошибок округления. Эти расчеты проводились до значений безразмерного времени  $t = 400$  и более.

Следующим тестом было сравнение расчетов наката уединенных волн на откос с результатами [8—10]. В приводимых ниже расчетах угол наклона дна  $\varphi$  вблизи точки излома вычислялся с помощью осреднения по трем соседним частицам, хотя в принципе эта процедура необязательна и оказывает некоторое сглаживающее влияние на форму свободной границы лишь для больших углов. На рис. 3 приведена серия картинок, демонстрирующих накат уединенной волны амплитуды  $a = 0,019$  на пологий откос с котангенсом угла наклона 19,85. Профили возвышения свободной поверхности выведены с интервалом  $\Delta t = 5$ . Результаты численных расчетов по дискретной модели (сплошная кривая) сравниваются с экспериментальными точками и приближенным решением уравнений мелкой воды (штриховые кривые) из [8].

На рис. 4 для этой задачи приведены расчетные (штриховые кривые) зависимости от времени возвышения свободной поверхности в четырех фиксированных точках на откосе в сравнении с данными той же работы (сплошные кривые — эксперимент, пунктирные — теория). Расчеты по дискретной модели проводились при  $\alpha = 1/3$ ,  $\tau = 0,2$ , значение  $h$  изменялось от 1 на ровном дне до 0,2 около точки уреза. Сравнение показывает, что дискретная модель, обладающая из-за учета дисперсии существенно более широкой областью применимости, чем обычные уравнения мелкой воды, в данной задаче, где эффекты дисперсии несущественны, работает, по крайней мере, не хуже и достаточно хорошо описывает процесс заплеска при использовании довольно крупной расчетной сетки.

На рис. 5 приведены последовательные картинки заплеска волны с большей амплитудой ( $a = 0,19$ ) на откос под углом  $30^\circ$ . Здесь расчетные данные (штриховые линии) сравниваются с экспериментом (сплошные) из [9]. Картинки приведены с интервалом по времени  $\Delta t = 2,86$ .

Наконец, в таблице собраны результаты численных расчетов и лабораторных экспериментов различных авторов по максимальному заплеску уединенных волн на наклонную стенку в диапазоне амплитуд от 0,03 до 0,5 и котангенсов углов наклона от 1 до 10, взятые из [4, 8--10]. Здесь же представлены результаты расчетов по дискретной модели при тех же значениях  $\alpha$ ,  $\tau$  и  $h$ , что и выше. В скобках для сравнения даны величины заплеска при вдвое меньших значениях  $\tau$  и  $h$ . Видно, что существующие для этой задачи теоретические результаты заметно отличаются друг от друга. Разброс данных расчетов доходит иногда до 20 % и более. Если принять во внимание эксперимент, то разброс еще увеличится. Результаты расчетов по дискретной модели, как правило, хорошо ложатся в этот диапазон, за исключением случаев волн большой амплитуды для крутых углов, особенно для  $\theta = 45^\circ$ . Последнее вполне понятно, так как сделанные при выводе модели предположения о распределении скоростей по глубине физически оправданы, строго



Р и с. 5

ctg $\theta$ ( $\theta$ , град)	A	Максимальный заплеск		
		Численные и асимптотические решения [4, 8--10] (min - max)	Эксперимент [8, 9]	Дискретная модель мелкой воды
10,000 (5,7)	0,030	0,100—0,112	—	0,117
	0,050	0,180—0,212	—	0,217 (0,215)
3,732 (15)	0,050	0,129—0,135	0,173	0,139
	0,100	0,308—0,308	0,281	0,309
	0,200	0,732—0,766	0,599	0,684 (0,687)
3,333 (16,7)	0,050	0,122—0,150	0,121	0,134
	0,100	0,291—0,310	0,264	0,298 (0,295)
2,747 (20)	0,050	0,111—0,127	0,115	0,125
	0,098	0,257—0,275	0,252	0,267
	0,193	0,599—0,600	0,552	0,567
	0,294	0,958—1,016	0,898	0,920 (0,926)
2,000 (26,6)	0,113	0,27	0,284	0,278
	0,195	0,49	0,526	0,497
	0,29	0,79	0,825	0,774
	0,41	1,17	1,220	1,142
	0,50	1,49	1,530	1,416 (1,422)
1,000 (45)	0,060	0,125—0,129	0,115	0,125
	0,113	0,24	—	0,236
	0,100	0,159—0,216	0,212	0,209
	0,195	0,44	—	0,395
	0,200	0,451—0,504	0,454	0,404
	0,29	0,70	—	0,574
	0,41	1,03	—	0,795
	0,480	1,249—1,610	1,270	0,916
	0,50	1,30	—	0,951 (0,953)



говоря, для  $|d_x| \ll 1$ . Расчеты показывают, что реально величина заплеска в этой задаче неплохо описывается вплоть до  $|d_x| \leq 1/2$ .

К недостаткам описанной модели следует отнести ограничение сверху на пространственный шаг  $h$ , вытекающее из дисперсионного соотношения (1.8). Легко видеть, что для самых коротких численных гармоник с длиной волны

$$\lambda = 2h \text{ фазовая скорость } c^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{h^2}{3\pi^2\alpha} \text{ неограниченно растет с увеличением}$$

$h$ . При  $h > \pi\sqrt{3\alpha}$  это приводит к качественному изменению закона дисперсии, когда фазовая скорость имеет максимум, больший единицы в области коротких волн. Вследствие этого при таких значениях  $h$  искажается форма длинных волн, скажем солитонов очень малой амплитуды, для которых выбор крупного шага, казалось бы, вполне допустим из соображений подобия.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Коробицын В. А., Либин З. Е. Об одном численном методе решения нестационарных задач несжимаемой жидкости со свободной поверхностью // *Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью*.— Томск: Томский ун-т, 1975.
2. Головизнин В. М., Самарский А. А., Фаворский А. П. Вариационный подход к построению конечно-разностных моделей в гидродинамике // *ДАН СССР*.— 1977.— Т. 235, № 6.— С. 1285—1288.
3. Augenbaum J. M. A lagrangian method for the shallow water equations based on a Voronoi mesh — *Flows on a rotating sphere* // *Lecture Notes in Physics*.— Berlin et al.: Springer-Verlag, 1985.— V. 238.— P. 54—86.
4. Франк А. М. Численное моделирование уединенных поверхностных волн в рамках дискретной модели несжимаемой жидкости // *ПМТФ*.— 1989.— № 3.— С. 95—101.
5. Green A. E., Naghdi P. M. A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth // *J. Fluid Mech.*— 1976.— V. 78.— P. 237—246.
6. Ertekin R. C., Webster W. C., Wehausen J. V. Waves caused by a moving disturbance in a shallow channel of finite width // *J. Fluid Mech.*— 1986.— V. 169.— P. 275—292.
7. Франк А. М. Полностью консервативный численный алгоритм для дискретных моделей несжимаемой жидкости // *Моделирование в механике*.— Новосибирск: ВЦ СО АН СССР; ИТПМ СО АН СССР, 1987.— Т. 1(18), № 5.— С. 134—144.
8. Synolakis C. E. The runup of solitary waves // *J. Fluid Mech.*— 1987.— V. 185.— P. 523—545.
9. Pedersen G., Gjevik B. Run-up of solitary waves // *J. Fluid Mech.*— 1983.— V. 135.— P. 283—290.
10. Новикова Н. В., Хакимзянов Г. С. О численном расчете потенциальных течений идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей.— М., 1990.— Деп. в ВИНТИ 08.05.90, № 2451—В90.

г. Красноярск

Поступила 2/III 1993 г.

УДК 536.25+548.5

А. Г. Кирдяшкин, Д. А. Фурсенко, И. Б. Фурсенко

### ТУРБУЛЕНТНАЯ СВОБОДНАЯ КОНВЕКЦИЯ В ВЕРТИКАЛЬНОМ СЛОЕ В УСЛОВИЯХ НЕУСТОЙЧИВОЙ СТРАТИФИКАЦИИ

В вертикальном замкнутом слое, в котором плоские изотермические поверхности имеют различные температуры, организуется циркуляционное течение, подъемное у горячей и опускное у холодной поверхности теплообмена. Температура вне пограничных слоев (в центральном вертикальном сечении  $y = 0,5h$ ,  $y$  — нормальная к поверхности теплообмена координата,

© А. Г. Кирдяшкин, Д. А. Фурсенко, И. Б. Фурсенко, 1994