

УДК 519.676

Приближенное решение задачи оптимальной нелинейной фильтрации для стохастических дифференциальных систем методом статистических испытаний*

К.А. Рыбаков

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Волоколамское шоссе, д. 4, А-80, ГСП-3, г. Москва, 125993
E-mail: rkoffice@mail.ru

Рыбаков К.А. Приближенное решение задачи оптимальной нелинейной фильтрации для стохастических дифференциальных систем методом статистических испытаний // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд.-ние. — Новосибирск, 2013. — Т. 16, № 4. — С. 377–391.

Предлагается алгоритм решения задачи оптимальной нелинейной фильтрации методом статистических испытаний. В основе алгоритма лежит переход от задачи фильтрации к задаче анализа стохастических систем с обрывами и ветвлениями траекторий, использующий общность структуры уравнений Дункана–Мортенсена–Закаи и обобщенного уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова. Решение такой задачи анализа можно найти приближенно, используя методы численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений и методы моделирования неоднородных пуассоновских потоков.

Ключевые слова: апостериорная плотность вероятности, ветвящиеся процессы, метод статистических испытаний, оптимальная фильтрация, стохастическая система, уравнение Дункана–Мортенсена–Закаи.

Rybakov K.A. An approximate solution of the optimal nonlinear filtering problem for stochastic differential systems by statistical modeling // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2013. — Vol. 16, № 4. — P. 377–391.

An algorithm for solving the optimal nonlinear filtering problem by statistical modeling is proposed. It is based on reducing the filtration problem to the analysis of stochastic systems with terminating and branching paths, using a structure similarity of the Duncan–Mortensen–Zakai equations and the generalized Fokker–Planck–Kolmogorov equation. The solution of such problem of analysis can be approximately found by using numerical methods for solving stochastic differential equations and methods for modeling inhomogeneous Poisson flows.

Key words: branching processes, conditional density, the Duncan–Mortensen–Zakai equation, Monte Carlo method, optimal filtering problem, stochastic system.

1. Введение

В работе [10] были предложены новые подходы и алгоритмы приближенного решения задачи оптимальной нелинейной фильтрации сигналов в стохастических дифференциальных системах (задачи нахождения оценки текущего состояния, оптимальной

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-08-00323-а).

в соответствии с заданным критерием, по результатам измерений для нелинейной стохастической системы, математическая модель которой задается стохастическим дифференциальным уравнением). Для формирования алгоритмов использовалась общность структуры уравнения Дункана–Мортенсена–Закаи при фиксированных измерениях, описывающего изменение апостериорной плотности вероятности вектора состояния системы наблюдения [9, 13, 18], и обобщенного уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова, которому удовлетворяет плотность вероятности стохастической системы с поглощением и восстановлением траекторий [3]. Основная идея предложенного подхода — сведение задачи оптимальной нелинейной фильтрации к задаче анализа стохастической системы с обрывами и ветвлениями траекторий, которую можно приближенно решить с помощью методов численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений и методов моделирования неоднородных пуассоновских потоков, т. е. с применением метода статистических испытаний.

Методы и алгоритмы оптимальной нелинейной фильтрации применяются во многих прикладных задачах: в задачах приема радиосигналов на фоне помех, при управлении движущимися объектами (космическими аппаратами, воздушными судами, наземными средствами передвижения и др.) в условиях неточных измерений параметров движения, при обработке телеметрической информации, информации с навигационных спутниковых систем или автономных систем позиционирования, в задачах радиолокации, в задачах параметрической идентификации и распознавания образов, реконструкции динамических изображений [2, 6, 8].

Краткий обзор и классификация методов решения задачи оптимальной нелинейной фильтрации приведены в [10], более полный обзор — в [16]. Цель этой статьи — представление нового алгоритма решения задачи оптимальной нелинейной фильтрации, построенного на общности структуры робастного уравнения Дункана–Мортенсена–Закаи и обобщенного уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова.

2. Постановка задачи

Будем рассматривать модель объекта наблюдения, описываемую стохастическим дифференциальным уравнением Ито [9, 13]:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (1)$$

где $X \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния; $t \in [t_0, T]$, $[t_0, T]$ — отрезок времени функционирования; $f(t, x): [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — вектор-функция размером $n \times 1$, $\sigma(t, x): [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times s}$ — матричная функция размером $n \times s$; $W(t)$ — s -мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от начального состояния X_0 , заданного плотностью вероятности $\varphi_0(x)$.

Упрощенная модель измерительной системы записывается в форме стохастического дифференциального уравнения

$$dY(t) = c(X(t))dt + dV(t), \quad Y(t_0) = Y_0 = 0, \quad (2)$$

в котором $Y \in \mathbb{R}^m$ — вектор измерений; $c(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ — вектор-функция размером $m \times 1$; $V(t)$ — m -мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от $W(t)$ и X_0 .

Задача оптимальной фильтрации состоит в нахождении оценки $\hat{X}(t)$ по результатам измерений Y_0^t , т. е. $\hat{X}(t) = \psi(t, Y_0^t)$, где $\psi(t, Y_0^t)$ — функция, обеспечивающая в каждый момент времени t выполнение условия

$$\mathbb{M}[(X(t) - \hat{X}(t))^T (X(t) - \hat{X}(t))] \rightarrow \min_{\psi(t, \cdot)}, \tag{3}$$

а $Y_0^t = \{Y(\tau), \tau \in [t_0, t]\}$ — доступные измерения к моменту времени t . В критерии (3) и далее \mathbb{M} — знак математического ожидания.

Известно [9, 11, 13], что в этом случае $\psi(t, Y_0^t) = \mathbb{M}[X(t) | Y_0^t] = \int_{\mathbb{R}^n} xp(t, x | Y_0^t) dx$, где $p(t, x | Y_0^t)$ — апостериорная плотность вероятности вектора состояния X .

Предлагаемая ниже методика оптимальной фильтрации не исключает других критериев, отличных от (3).

В статье не затрагиваются вопросы, связанные с существованием решений и сходимостью, поэтому никаких формальных ограничений на функции, входящие в уравнения (1) и (2), а также начальное состояние не накладывается. Разработанный алгоритм оценивания предполагает использование методов численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений и методов моделирования неоднородных пуассоновских потоков, в связи с этим условия существования решения поставленной задачи (см., например, [5, 15, 20]) необходимо дополнить условиями применимости конкретных численных методов.

3. Уравнения для апостериорной плотности вероятности

Рассмотрим уравнение

$$Z(t) = c(X(t)) + N(t), \tag{4}$$

в котором $N(t)$ — m -мерный стандартный гауссовский белый шум [9, 11, 13]. Это уравнение эквивалентно уравнению (2) и, следовательно, задачу оптимальной фильтрации можно переформулировать в терминах измерений $Z_0^t = \{Z(\tau), \tau \in [t_0, t]\}$: $Z(t) = \frac{dY(t)}{dt}$, $Z_k(t) = \frac{dY_k(t)}{dt}$, $k = 1, 2, \dots, m$.

Ненормированная апостериорная плотность вероятности $\varphi(t, x | Y_0^t)$ вектора состояния X удовлетворяет уравнению Дункана–Мортенсена–Закаи [9, 13]. Используя формулу Стратоновича и фиксируя измерения Y_0^t или Z_0^t , получаем [10]:

$$\frac{\partial \varphi(t, x | Y_0^t)}{\partial t} = \mathcal{A}\varphi(t, x | Y_0^t) + \lambda(x, Z(t))\varphi(t, x | Y_0^t), \quad \varphi(t_0, x) = \varphi_0(x), \tag{5}$$

где \mathcal{A} — оператор Фоккера–Планка–Колмогорова:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\varphi(t, x | Y_0^t) &= - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(t, x)\varphi(t, x | Y_0^t)] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [g_{ij}(t, x)\varphi(t, x | Y_0^t)], \\ g(t, x) &= \sigma(t, x)\sigma^T(t, x), \quad g_{ij}(t, x) = \sum_{l=1}^s \sigma_{il}(t, x)\sigma_{jl}(t, x), \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

а функция $\lambda(x, Z(t))$ задается выражением

$$\lambda(x, Z(t)) = \sum_{\alpha=1}^m c_\alpha(x) \left(Z_\alpha(t) - \frac{1}{2} c_\alpha(x) \right) = c^T(x) \left(Z(t) - \frac{1}{2} c(x) \right). \tag{6}$$

Уравнение (5), если представить функцию $\lambda(x, z) = -\lambda^-(x, z) + \lambda^+(x, z)$, где

$$\lambda^-(x, z) = \begin{cases} -\lambda(x, z), & \lambda(x, z) < 0, \\ 0, & \lambda(x, z) \geq 0, \end{cases} \quad \lambda^+(x, z) = \begin{cases} \lambda(x, z), & \lambda(x, z) > 0, \\ 0, & \lambda(x, z) \leq 0, \end{cases}$$

по структуре будет аналогично обобщенному уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова [3]. Тогда в уравнении

$$\frac{\partial \varphi(t, x | Y_0^t)}{\partial t} = \mathcal{A}\varphi(t, x | Y_0^t) - \lambda^-(x, Z(t))\varphi(t, x | Y_0^t) + \lambda^+(x, Z(t))\varphi(t, x | Y_0^t) \quad (7)$$

слагаемые $\lambda^-(x, Z(t))\varphi(t, x | Y_0^t)$ и $\lambda^+(x, Z(t))\varphi(t, x | Y_0^t)$ — функции поглощения и восстановления — характеризуют обрывы и ветвления траекторий процесса $X(t)$: функция $\lambda^-(x, z)$ — интенсивность обрыва траекторий, а функция $\lambda^+(x, z)$ — интенсивность ветвления траекторий. Вероятности обрыва и ветвления на промежутке времени $[t, t + \Delta t]$ при $X(t) = x$ и $Z(t) = z$ определяются соотношениями: $\mathbb{P}^-(t, \Delta t) = \lambda^-(x, z)\Delta t + o(\Delta t)$, $\mathbb{P}^+(t, \Delta t) = \lambda^+(x, z)\Delta t + o(\Delta t)$.

Уравнение Дункана–Мортенсена–Закаи не обладает свойством сохранения вероятности в отличие от уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова, его решение — функция $\varphi(t, x | Y_0^t)$ — не нормировано к единице: $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t, x | Y_0^t) dx \neq 1$, $t > t_0$, за исключением, возможно, некоторых значений t . В частности, это следует из того, что обрывы и ветвления траекторий процесса $X(t)$ происходят в разные моменты времени, так как если $\lambda^-(x, z) > 0$, то $\lambda^+(x, z) = 0$ и если $\lambda^+(x, z) > 0$, то $\lambda^-(x, z) = 0$, поэтому для получения апостериорной плотности вероятности $p(t, x | Y_0^t)$ необходима нормировка

$$p(t, x | Y_0^t) = \frac{\varphi(t, x | Y_0^t)}{\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t, x | Y_0^t) dx}, \quad t > t_0, \quad p(t_0, x) = \varphi_0(x). \quad (8)$$

Функция $\varphi(t, x | Y_0^t)$ характеризует распределение вектора X — состояния объекта наблюдения, описываемого уравнением (1), — с учетом того, что часть траекторий случайного процесса $X(t)$ обрывается, а часть разветвляется в случайные моменты времени. Обрывы и ветвления траекторий образуют неоднородные пуассоновские потоки событий с интенсивностями $\lambda^-(t) = \lambda^-(X(t), Z(t))$ и $\lambda^+(t) = \lambda^+(X(t), Z(t))$ соответственно; процесс $Z(t)$ управляет распределением моментов времени появления обрывов и ветвлений (см. рис. 1). При ветвлении, в отличие от общего случая [12, 17], в фиксированный

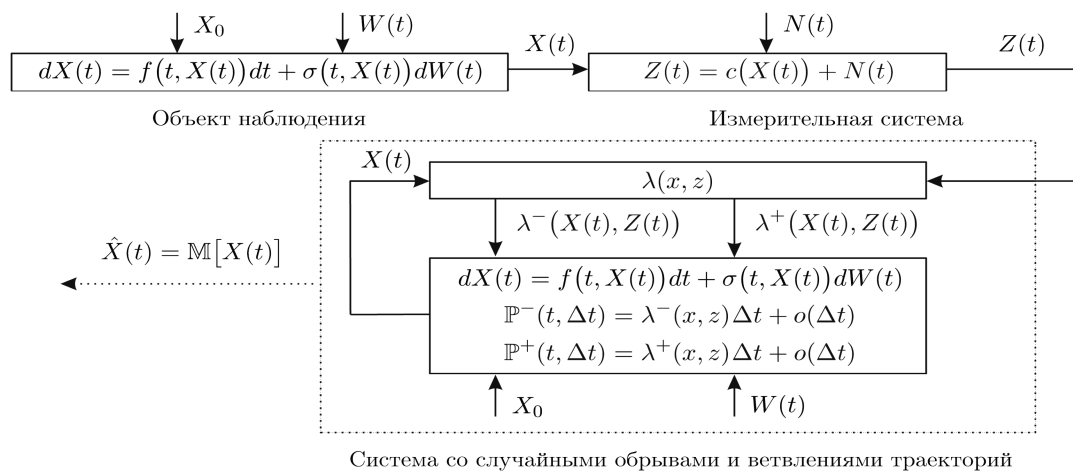


Рис. 1. Структурная схема системы наблюдения и оптимального фильтра

момент времени может появиться только одна новая ветвь. Каждая из новых ветвей

рассматривается как самостоятельная траектория, при обрыве прекращается моделирование только одной ветви.

Интерпретация траекторий ветвящегося процесса как совокупности независимых траекторий-ветвей достаточна и для получения апостериорной плотности вероятности, и для нахождения оптимальной оценки. При таком подходе не требуется переопределение понятия “вектор состояния”.

Уравнение Дункана–Мортенсена–Закаи содержит множитель типа белого шума (случайный процесс $N(t)$), усложняющий его решение с помощью метода статистических испытаний, поскольку процесс $N(t)$ входит в интенсивности обрывов и ветвлений траекторий случайного процесса $X(t)$, делая их, вообще говоря, неограниченными. При приближенном моделировании конечного числа траекторий интенсивности можно считать ограниченными, но в любом случае для функций $\lambda^-(t)$ и $\lambda^+(t)$ характерно быстрое возрастание и убывание, а также большие максимальные значения (определяющие среднее число обрывов и ветвлений в единицу времени), что затрудняет получение оценки вектора состояния X . Типичное поведение этих функций приведено на рис. 2.

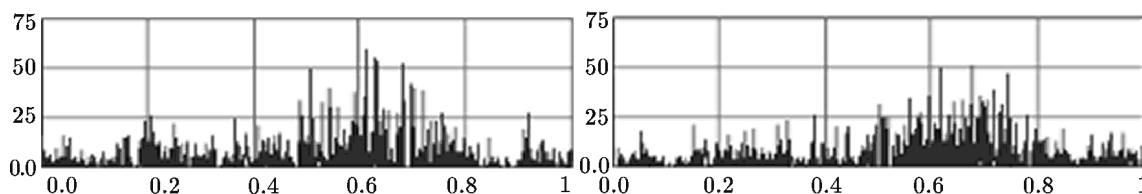


Рис. 2. Примеры графиков интенсивностей обрывов (слева) и ветвлений (справа) траекторий случайного процесса $X(t)$

Робастное уравнение Дункана–Мортенсена–Закаи [18, 20], полученное посредством специальной замены переменной (ненормированной апостериорной плотности вероятности), более громоздко, но не содержит белого шума. Приближенное решение робастного уравнения Дункана–Мортенсена–Закаи или приближенное нахождение оптимальной оценки вектора состояния X на его основе представляются более перспективными.

Алгоритмы решения задачи оптимальной нелинейной фильтрации методом статистических испытаний (с помощью моделирования траекторий ветвящегося процесса) на основе уравнения Дункана–Мортенсена–Закаи описаны в работе [10]. Далее излагается развитие этого подхода.

Приведем робастное уравнение Дункана–Мортенсена–Закаи. Запишем (5) в форме

$$\frac{\partial \varphi(t, x | Y_0^t)}{\partial t} = \mathcal{L}\varphi(t, x | Y_0^t) + \sum_{\alpha=1}^m c_{\alpha}(x) \frac{dY_{\alpha}(t)}{dt} \varphi(t, x | Y_0^t), \quad \varphi(t_0, x) = \varphi_0(x),$$

где

$$\mathcal{L}\varphi(t, x | Y_0^t) = \mathcal{A}\varphi(t, x | Y_0^t) - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^m c_{\alpha}^2(x) \varphi(t, x | Y_0^t).$$

С помощью замены

$$\rho(t, x | Y_0^t) = e^{-\sum_{\alpha=1}^m c_{\alpha}(x) Y_{\alpha}(t)} \varphi(t, x | Y_0^t) = e^{-c^{\top}(x) Y(t)} \varphi(t, x | Y_0^t) \quad (9)$$

и введения обозначения \mathcal{C}_{α} для оператора умножения на функцию $c_{\alpha}(x)$ получаем робастное уравнение Дункана–Мортенсена–Закаи [18]:

$$\frac{\partial \rho(t, x | Y_0^t)}{\partial t} = \mathcal{L}\rho(t, x | Y_0^t) - \sum_{\alpha=1}^m Y_\alpha(t) \mathcal{L}_\alpha \rho(t, x | Y_0^t) + \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^m Y_\alpha(t) Y_\beta(t) \mathcal{L}_{\alpha\beta} \rho(t, x | Y_0^t), \quad (10)$$

в котором $\mathcal{L}_\alpha = [\mathcal{C}_\alpha, \mathcal{L}]$, $\mathcal{L}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[\mathcal{C}_\alpha, \mathcal{L}_\beta] = \frac{1}{2}[\mathcal{C}_\alpha, [\mathcal{C}_\beta, \mathcal{L}]]$, где $[\mathcal{C}_\alpha, \mathcal{L}]$ и $[\mathcal{C}_\alpha, \mathcal{L}_\beta]$ — коммутаторы операторов ($[\cdot, \cdot]$ — скобки Ли).

Уравнение (10) при фиксированных измерениях Y_0^t — детерминированное уравнение в частных производных второго порядка. Оно не содержит множителей типа белого шума, что делает его удобным для применения метода статистических испытаний.

Запишем соотношения для оператора \mathcal{L}_α : $\mathcal{L}_\alpha = [\mathcal{C}_\alpha, \mathcal{L}] = \mathcal{C}_\alpha \circ \mathcal{L} - \mathcal{L} \circ \mathcal{C}_\alpha$, где $\mathcal{C}_\alpha \circ \mathcal{L}$ и $\mathcal{L} \circ \mathcal{C}_\alpha$ — композиции линейных операторов. Два оператора умножения на скалярные функции являются коммутирующими, поэтому $[\mathcal{C}_\alpha, \mathcal{L}] = [\mathcal{C}_\alpha, \mathcal{A}] = \mathcal{C}_\alpha \circ \mathcal{A} - \mathcal{A} \circ \mathcal{C}_\alpha$, следовательно,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\alpha \rho(t, x | Y_0^t) &= -c_\alpha(x) \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(t, x) \rho(t, x | Y_0^t)] + \frac{1}{2} c_\alpha(x) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [g_{ij}(t, x) \rho(t, x | Y_0^t)] + \\ &\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(t, x) c_\alpha(x) \rho(t, x | Y_0^t)] - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [g_{ij}(t, x) c_\alpha(x) \rho(t, x | Y_0^t)]. \quad (11) \end{aligned}$$

Используя соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} [u(x)v(x)] &= \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} v(x) + u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [u(x)v(x)] &= \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} v(x) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[u(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} \right] - u(x) \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_i \partial x_j}, \\ &i, j = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

преобразуем последние два слагаемых из правой части (11):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(t, x) c_\alpha(x) \rho(t, x | Y_0^t)] &= c_\alpha(x) \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(t, x) \rho(t, x | Y_0^t)] + f_i(t, x) \frac{\partial c_\alpha(x)}{\partial x_i} \rho(t, x | Y_0^t), \\ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [g_{ij}(t, x) c_\alpha(x) \rho(t, x | Y_0^t)] &= c_\alpha(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [g_{ij}(t, x) \rho(t, x | Y_0^t)] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[g_{ij}(t, x) \frac{\partial c_\alpha(x)}{\partial x_i} \rho(t, x | Y_0^t) \right] + \\ &\frac{\partial}{\partial x_i} \left[g_{ij}(t, x) \frac{\partial c_\alpha(x)}{\partial x_j} \rho(t, x | Y_0^t) \right] - g_{ij}(t, x) \frac{\partial^2 c_\alpha(x)}{\partial x_i \partial x_j} \rho(t, x | Y_0^t), \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\alpha \rho(t, x | Y_0^t) &= \sum_{i=1}^n f_i(t, x) \frac{\partial c_\alpha(x)}{\partial x_i} \rho(t, x | Y_0^t) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left[g_{ij}(t, x) \frac{\partial c_\alpha(x)}{\partial x_i} \rho(t, x | Y_0^t) \right] - \\ &\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[g_{ij}(t, x) \frac{\partial c_\alpha(x)}{\partial x_j} \rho(t, x | Y_0^t) \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij}(t, x) \frac{\partial^2 c_\alpha(x)}{\partial x_i \partial x_j} \rho(t, x | Y_0^t). \end{aligned}$$

Матрица $g(t, x)$ — симметрическая, т. е. $g_{ij}(t, x) = g_{ji}(t, x)$, поэтому

$$\mathcal{L}_\alpha \rho(t, x | Y_0^t) = \sum_{i=1}^n f_i(t, x) \frac{\partial c_\alpha(x)}{\partial x_i} \rho(t, x | Y_0^t) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sum_{j=1}^n g_{ij}(t, x) \frac{\partial c_\alpha(x)}{\partial x_j} \rho(t, x | Y_0^t) \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij}(t, x) \frac{\partial^2 c_\alpha(x)}{\partial x_i \partial x_j} \rho(t, x | Y_0^t)$$

или

$$\mathcal{L}_\alpha \rho(t, x | Y_0^t) = f^\alpha(t, x) \rho(t, x | Y_0^t) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [g_i^\alpha(t, x) \rho(t, x | Y_0^t)] + h^\alpha(t, x) \rho(t, x | Y_0^t), \quad (12)$$

где

$$f^\alpha(t, x) = \sum_{i=1}^n f_i(t, x) \frac{\partial c_\alpha(x)}{\partial x_i} = \nabla^\top c_\alpha(x) f(t, x),$$

$$g_i^\alpha(t, x) = \sum_{j=1}^n g_{ij}(t, x) \frac{\partial c_\alpha(x)}{\partial x_j} \quad (g^\alpha(t, x) = g(t, x) \nabla c_\alpha(x)),$$

$$h^\alpha(t, x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij}(t, x) \frac{\partial^2 c_\alpha(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{2} \text{tr}(g(t, x) \nabla \nabla^\top c_\alpha(x)), \quad \alpha = 1, 2, \dots, m.$$

Перейдем к оператору $\mathcal{L}_{\alpha\beta}$. По определению $[\mathcal{C}_\alpha, \mathcal{L}_\beta] = \mathcal{C}_\alpha \circ \mathcal{L}_\beta - \mathcal{L}_\beta \circ \mathcal{C}_\alpha$, поэтому

$$\mathcal{L}_{\alpha\beta} \rho(t, x | Y_0^t) = -\frac{1}{2} c_\alpha(x) \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [g_i^\beta(t, x) \rho(t, x | Y_0^t)] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [g_i^\beta(t, x) c_\alpha(x) \rho(t, x | Y_0^t)]. \quad (13)$$

С учетом равенства

$$\frac{\partial}{\partial x_i} [g_i^\beta(t, x) c_\alpha(x) \rho(t, x | Y_0^t)] = c_\alpha(x) \frac{\partial}{\partial x_i} [g_i^\beta(t, x) \rho(t, x | Y_0^t)] + g_i^\beta(t, x) \frac{\partial c_\alpha(x)}{\partial x_i} \rho(t, x | Y_0^t),$$

выражение (13) можно переписать в виде

$$\mathcal{L}_{\alpha\beta} \rho(t, x | Y_0^t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n g_i^\beta(t, x) \frac{\partial c_\alpha(x)}{\partial x_i} \rho(t, x | Y_0^t)$$

или

$$\mathcal{L}_{\alpha\beta} \rho(t, x | Y_0^t) = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(t, x) \rho(t, x | Y_0^t), \quad (14)$$

где

$$g^{\alpha\beta}(t, x) = \sum_{i=1}^n g_i^\beta(t, x) \frac{\partial c_\alpha(x)}{\partial x_i} = \nabla^\top c_\alpha(x) g^\beta(t, x) = \nabla^\top c_\alpha(x) g(t, x) \nabla c_\beta(x), \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, m.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial \rho(t, x | Y_0^t)}{\partial t} = \mathcal{L} \rho(t, x | Y_0^t) - \sum_{\alpha=1}^m Y_\alpha(t) \left(f^\alpha(t, x) \rho(t, x | Y_0^t) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [g_i^\alpha(t, x) \rho(t, x | Y_0^t)] + h^\alpha(t, x) \rho(t, x | Y_0^t) \right) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^m Y_\alpha(t) Y_\beta(t) g^{\alpha\beta}(t, x) \rho(t, x | Y_0^t) = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(t, x) \rho(t, x | Y_0^t)] +$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [g_{ij}(t, x) \rho(t, x | Y_0^t)] - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[- \sum_{\alpha=1}^m Y_\alpha(t) g_i^\alpha(t, x) \rho(t, x | Y_0^t) \right] - \\ & \sum_{\alpha=1}^m Y_\alpha(t) (f^\alpha(t, x) + h^\alpha(t, x)) \rho(t, x | Y_0^t) - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^m c_\alpha^2(x) \rho(t, x | Y_0^t) + \\ & \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^m Y_\alpha(t) Y_\beta(t) g^{\alpha\beta}(t, x) \rho(t, x | Y_0^t). \end{aligned}$$

Введем новые обозначения:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i(t, x, Y(t)) &= f_i(t, x) - \sum_{\alpha=1}^m Y_\alpha(t) g_i^\alpha(t, x), \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \nu(t, x, Y(t)) &= - \sum_{\alpha=1}^m Y_\alpha(t) (f^\alpha(t, x) + h^\alpha(t, x)) - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^m c_\alpha^2(x) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^m Y_\alpha(t) Y_\beta(t) g^{\alpha\beta}(t, x) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t, x, Y(t)) &= f(t, x) - g(t, x) \left[\frac{\partial c(x)}{\partial x} \right]^\top Y(t), \\ \nu(t, x, Y(t)) &= -Y^\top(t) \frac{\partial c(x)}{\partial x} f(t, x) - \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left(g(t, x) \nabla \nabla^\top (Y^\top(t) c(x)) \right) - \frac{1}{2} (c^\top(x) c(x)) + \\ & \frac{1}{2} \left(Y^\top(t) \frac{\partial c(x)}{\partial x} g(t, x) \left[\frac{\partial c(x)}{\partial x} \right]^\top Y(t) \right), \end{aligned}$$

тогда

$$\frac{\partial \rho(t, x | Y_0^t)}{\partial t} = \tilde{\mathcal{A}} \rho(t, x | Y_0^t) + \nu(t, x, Y(t)) \rho(t, x | Y_0^t), \quad (15)$$

где

$$\tilde{\mathcal{A}} \rho(t, x | Y_0^t) = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [\tilde{f}_i(t, x, Y(t)) \rho(t, x | Y_0^t)] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [g_{ij}(t, x) \rho(t, x | Y_0^t)],$$

т. е. после преобразований робастное уравнение Дункана–Мортенсена–Закаи представлено так, что его структура совпадает со структурой уравнения (5).

Если представить функцию $\nu(t, x, y)$ в виде $\nu(t, x, y) = -\nu^-(t, x, y) + \nu^+(t, x, y)$, где

$$\nu^-(t, x, y) = \begin{cases} -\nu(t, x, y), & \nu(t, x, y) < 0, \\ 0, & \nu(t, x, y) \geq 0, \end{cases} \quad \nu^+(t, x, y) = \begin{cases} \nu(t, x, y), & \nu(t, x, y) > 0, \\ 0, & \nu(t, x, y) \leq 0, \end{cases}$$

получим

$$\frac{\partial \rho(t, x | Y_0^t)}{\partial t} = \tilde{\mathcal{A}} \rho(t, x | Y_0^t) - \nu^-(t, x, Y(t)) \rho(t, x | Y_0^t) + \nu^+(t, x, Y(t)) \rho(t, x | Y_0^t). \quad (16)$$

Уравнение (16) описывает закон изменения ненормированной апостериорной плотности вероятности вектора состояния $\tilde{X} = \tilde{X}(t)$ в момент времени t для системы, задаваемой уравнением Ито:

$$d\tilde{X}(t) = \tilde{f}(t, \tilde{X}(t), Y(t))dt + \sigma(t, \tilde{X}(t))d\tilde{W}(t), \quad \tilde{X}(t_0) = X_0, \quad (17)$$

в котором $\tilde{W}(t)$ — s -мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от начального состояния X_0 .

Начальное условие для уравнения (16) задается соотношением $\rho(t_0, x | Y_0^t) = \varphi_0(x)$, так как $e^{-c^\top(x)Y_0} = 1$, а слагаемые $\nu^-(t, x, Y(t))\rho(t, x | Y_0^t)$ и $\nu^+(t, x, Y(t))\rho(t, x | Y_0^t)$ характеризуют обрывы и ветвления траекторий процесса $\tilde{X}(t)$: функция $\nu^-(t, x, y)$ — интенсивность обрыва траекторий, а функция $\nu^+(t, x, y)$ — интенсивность ветвления траекторий. Вероятности обрыва и ветвления на промежутке времени $[t, t + \Delta t]$ при $\tilde{X}(t) = x$ и $Y(t) = y$ выражаются следующим образом: $\tilde{\mathbb{P}}^-(t, \Delta t) = \nu^-(t, x, y)\Delta t + o(\Delta t)$, $\tilde{\mathbb{P}}^+(t, \Delta t) = \nu^+(t, x, y)\Delta t + o(\Delta t)$.

Для системы (17) распределением моментов времени появления обрывов и ветвлений управляет процесс $Y(t)$. Этот процесс влияет и на поведение траекторий между моментами ветвлений (см. рис. 3).

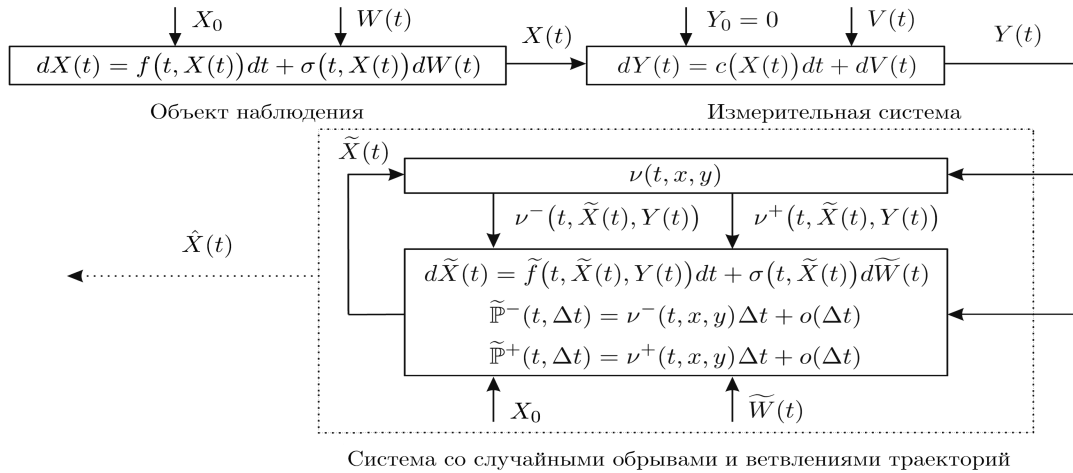


Рис. 3. Структурная схема системы наблюдения и оптимального фильтра

Интенсивности $\nu^-(t)$ и $\nu^+(t)$ меняются гораздо медленнее в отличие от интенсивностей $\lambda^-(t)$ и $\lambda^+(t)$, среднее число обрывов и ветвлений в единицу времени оказывается на несколько порядков меньше. Поведение функций $\nu^-(t)$ и $\nu^+(t)$ приведено на рис. 4 (для той же системы наблюдения, которой соответствует рис. 2).

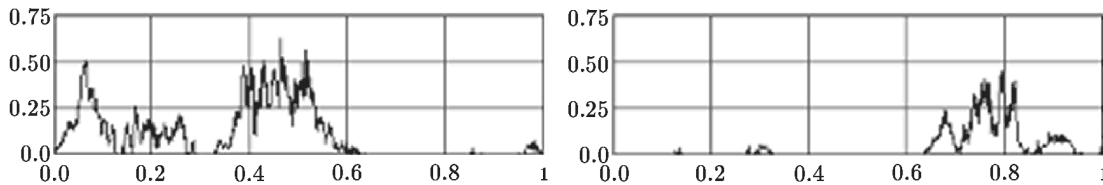


Рис. 4. Примеры графиков интенсивностей обрывов (слева) и ветвлений (справа) траекторий случайного процесса $\tilde{X}(t)$

Для нахождения оптимальной оценки $\hat{X}(t)$ может быть применена формула

$$\hat{X}(t) = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x\varphi(t, x | Y_0^t)dx}{\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t, x | Y_0^t)dx} = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x e^{c^\top(x)Y(t)} \rho(t, x | Y_0^t) dx}{\int_{\mathbb{R}^n} e^{c^\top(x)Y(t)} \rho(t, x | Y_0^t) dx},$$

полученная с помощью (8) и (9).

4. Приближенный метод оптимального оценивания

Для приближенного определения оптимальной оценки $\hat{X}(t)$ предлагается использовать метод статистических испытаний (метод Монте-Карло), т. е. моделировать траектории вспомогательного случайного процесса $\tilde{X}(t)$ с учетом обрывов и ветвлений при фиксированных измерениях Y_0^t . При этом можно применять известные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений и методы моделирования неоднородных пуассоновских потоков [1, 4, 7, 9, 14, 19].

Приведем соотношения стохастического метода Эйлера [4, 9]:

$$X_{k+1} = X_k + hf(t_k, X_k) + \sqrt{h}\sigma(t_k, X_k)\Delta W_k, \quad (18)$$

$$Y_{k+1} = Y_k + hc(X_k) + \sqrt{h}\Delta V_k, \quad t_k = t_0 + hk, \quad k = 0, 1, \dots,$$

в которых ΔW_k и ΔV_k — случайные векторы размеров $s \times 1$ и $m \times 1$ соответственно, их координаты имеют стандартное нормальное распределение, h — шаг численного интегрирования.

Для моделирования траекторий вспомогательного процесса $\tilde{X}(t)$ используется соотношение

$$\tilde{X}_{k+1} = \tilde{X}_k + h\tilde{f}(t_k, \tilde{X}_k, Y_k) + \sqrt{h}\sigma(t_k, \tilde{X}_k)\Delta\tilde{W}_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \tilde{X}_0 = X_0, \quad (19)$$

где $\Delta\tilde{W}_k$ — случайные векторы размеров $s \times 1$ с координатами, имеющими стандартное нормальное распределение.

Таким образом, $X(t_k) \approx X_k$, $\tilde{X}(t_k) \approx \tilde{X}_k$, $Y(t_k) \approx Y_k$. Здесь и в соотношениях (18), (19) нижний индекс k указывает на соответствие векторов X_k , \tilde{X}_k , Y_k , ΔW_k , $\Delta\tilde{W}_k$ и ΔV_k моменту времени t_k и не является номером координаты вектора.

Для моделирования моментов времени обрывов и ветвлений траекторий используется метод “максимального сечения” [1, 7]: моделирование времени τ , через которое произойдет обрыв или ветвление, осуществляется по правилу

$$\tau = \theta_N, \quad N = \min \left\{ \mu: \alpha_\mu \leq \frac{|\nu(t_* + \theta_\mu)|}{\nu^*} \right\}, \quad \theta_\mu = \sum_{i=1}^{\mu} \xi^i, \quad (20)$$

где $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^\mu, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих показательное распределение с параметром ν^* : $\xi^i = -\frac{\ln \beta_i}{\nu^*}$, ν^* : $|\nu(t)| \leq \nu^* = \text{const}$; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu, \dots, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\mu, \dots$ — последовательности независимых случайных величин, имеющих равномерное распределение на интервале $(0, 1)$; $\nu(t)$ — значение функции $\nu(t, x, y)$ на траекториях вспомогательного процесса $\tilde{X}(t)$ и траектории $Y(t)$, полученной в результате измерений оцениваемой траектории случайного процесса $X(t)$ (измерения Y_0^t вектора состояния фиксированы), т. е. $\nu(t) = \nu(t, \tilde{X}(t), Y(t))$; t_* — начальный момент времени t_0 или момент времени последнего ветвления траектории. При условии $\nu(t_* + \tau) < 0$ происходит обрыв (моделирование такой траектории прекращается), а при $\nu(t_* + \tau) > 0$ — ветвление (далее моделируются две траектории, имеющие по крайней мере одну общую точку — точку ветвления).

Важный аспект применяемых методов численного решения стохастических дифференциальных уравнений состоит в дополнении исходной сетки $\{t_k\}$ узлами, соответствующими моментам ветвлений траекторий.

Алгоритм совместного моделирования системы наблюдения и оптимального оценивания.

Шаг 1. Задать M — число моделируемых вспомогательных траекторий; h — шаг чис-

ленного интегрирования; величину ν^* . Получить реализации начальных состояний X_0 и \tilde{X}_0^i согласно заданной плотности вероятности $\varphi_0(x)$, где X_0 — начальное состояние для основной траектории (для которой проводятся измерение и оценивание), \tilde{X}_0^i — для вспомогательных траекторий, по которым приближенно вычисляется оптимальная оценка, и моменты времени ξ^i , через которые могут произойти обрывы или ветвления траекторий: $\xi^i = -\frac{\ln \beta}{\nu^*}$, $i = 1, 2, \dots, M$.

Здесь и далее β — различные реализации (для всех i) случайной величины, имеющей равномерное распределение на интервале $(0, 1)$.

Положить $Y_0 = 0$, $k = 0$, $t_*^i = t_0$, $F_0^i = 1$ (в случае обрыва траектории с номером i при последующем моделировании $F_k^i = 0$, $k > 0$), $i = 1, 2, \dots, M$.

Шаг 2. Положить $M_k = \sum_{i=1}^M F_k^i$ ($M_0 = M$) и оценить плотность вероятности $\tilde{p}(t_k, x | Y_0^{t_k})$ по выборке $\tilde{X}_k = \{\tilde{X}_k^i\}_{i=1, \dots, M; F_k^i=1}$, например, с помощью построения гистограммы [10].

Найти приближенное решение робастного уравнения Дункана–Мортенсена–Закаи: $\rho(t_k, x | Y_0^{t_k}) = \frac{M_k}{M} \tilde{p}(t_k, x | Y_0^{t_k})$, тогда приближенное решение $\varphi(t_k, x | Y_0^{t_k})$ уравнения Дункана–Мортенсена–Закаи и оценка апостериорной плотности вероятности $p(t_k, x | Y_0^{t_k})$ выражаются следующим образом:

$$\varphi(t_k, x | Y_0^{t_k}) = e^{c^\top(x)Y_k} \rho(t_k, x | Y_0^{t_k}), \quad p(t_k, x | Y_0^{t_k}) = \frac{\varphi(t_k, x | Y_0^{t_k})}{\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t_k, x | Y_0^{t_k}) dx}.$$

Найти оптимальную оценку: $\hat{X}_k = \int_{\mathbb{R}^n} x p(t_k, x | Y_0^{t_k}) dx$.

Проверить условия:

- а) если $0 < T - t_k < h$, то скорректировать шаг численного интегрирования: $h = T - t_k$;
- б) если $T - t_k = 0$, то завершить процесс.

Получить реализацию оцениваемого вектора состояния в следующем узле сетки $\{t_k\}$:

$$X_{k+1} = X_k + hf(t_k, X_k) + \sqrt{h}\sigma(t_k, X_k)\Delta W,$$

и получить вектор измерений: $Y_{k+1} = Y_k + hc(X_k) + \sqrt{h}\Delta V$.

В этих формулах ΔW и ΔV — различные для всех k реализации случайных векторов размеров $s \times 1$ и $m \times 1$ соответственно, координаты которых имеют стандартное нормальное распределение.

Положить $i = 1$, $j = 0$ (j — количество новых ветвей на шаге k).

Шаг 3. Проверить условие $F_k^i = 0$. Если оно выполнено, то перейти к последнему шагу, иначе: при $t_*^i + \xi^i \geq t_k + h$ перейти к шагу 4, а при $t_*^i + \xi^i < t_k + h$ — к шагу 5.

Шаг 4. Получить реализацию вектора \tilde{X} (сечения вспомогательного случайного процесса $\tilde{X}(t)$) в следующем узле сетки $\{t_k\}$:

$$\tilde{X}_{k+1}^i = \tilde{X}_k^i + hf(t_k, \tilde{X}_k^i, Y_k) + \sqrt{h}\sigma(t_k, \tilde{X}_k^i)\Delta \tilde{W}.$$

Здесь и далее $\Delta \tilde{W}$ — различные для всех k и i (а также для промежуточных расчетов) реализации случайных векторов размеров $s \times 1$, координаты которых имеют стандартное нормальное распределение.

Положить $F_{k+1}^i = 1$ и перейти к последнему шагу.

Шаг 5. Получить реализацию вектора \tilde{X} в дополнительном узле сетки

$$\tilde{X} = \tilde{X}_k^i + h_{\triangleleft} f(t_k, \tilde{X}_k^i, Y_k) + \sqrt{h_{\triangleleft}} \sigma(t_k, \tilde{X}_k^i) \Delta \tilde{W}, \quad h_{\triangleleft} = t_*^i + \xi^i - t_k,$$

и найти вектор измерений с помощью линейной интерполяции $\tilde{Y} = Y_k + \frac{h_{\triangleleft}}{h} (Y_{k+1} - Y_k)$.

Получить реализацию α случайной величины, имеющей равномерное распределение на интервале $(0, 1)$. Проверить условие $\alpha \leq \frac{|\nu(t_*^i + \xi^i)|}{\nu^*}$, где $\nu(t_*^i + \xi^i) = \nu(t_*^i + \xi^i, \tilde{X}, \tilde{Y})$, и если оно выполнено, то перейти к шагу 6, иначе — к шагу 7.

Шаг 6. Проверить условия:

а) если $\nu(t_*^i + \xi^i) < 0$ ($\nu^-(t_*^i + \xi^i, \tilde{X}, \tilde{Y}) > 0$, обрыв траектории), то положить $F_{k+1}^i = 0$ (траектория далее не моделируется) и перейти к последнему шагу;

б) если $\nu(t_*^i + \xi^i) > 0$ ($\nu^+(t_*^i + \xi^i, \tilde{X}, \tilde{Y}) > 0$, ветвление траектории), то положить $j = j + 1$ и получить реализацию вектора \tilde{X} в следующем узле сетки $\{t_k\}$ для новой траектории (точнее, “новой ветви” траектории с номером i , которая далее рассматривается как другая траектория с номером $M + j$):

$$\tilde{X}_{k+1}^{M+j} = \tilde{X} + h_{\triangleright} f(t_k + h_{\triangleleft}, \tilde{X}, \tilde{Y}) + \sqrt{h_{\triangleright}} \sigma(t_k + h_{\triangleleft}, \tilde{X}) \Delta \tilde{W}, \quad h_{\triangleright} = h - h_{\triangleleft} = t_k + h - t_*^i - \xi^i.$$

Положить $F_{k+1}^{M+j} = 1$ ($F_r^{M+j} = 0$, $r = 0, 1, \dots, k$), $t_*^{M+j} = t_*^i + \xi^i$ и получить реализацию для промежутка времени, через который может произойти обрыв или новое ветвление $\xi^{M+j} = -\frac{\ln \beta}{\nu^*}$, моделирование ξ^{M+j} проводится до тех пор, пока не будет выполнено условие $t_*^{M+j} + \xi^{M+j} \geq t_k + h$.

Шаг 7. Получить реализацию вектора \tilde{X} в следующем узле сетки $\{t_k\}$:

$$\tilde{X}_{k+1}^i = \tilde{X} + h_{\triangleright} f(t_k + h_{\triangleleft}, \tilde{X}, \tilde{Y}) + \sqrt{h_{\triangleright}} \sigma(t_k + h_{\triangleleft}, \tilde{X}) \Delta \tilde{W}, \quad h_{\triangleright} = h - h_{\triangleleft}.$$

Положить $F_{k+1}^i = 1$, $t_*^i = t_*^i + \xi^i$ и получить новую реализацию для промежутка времени, через который может произойти обрыв или ветвление рассматриваемой траектории $\xi^i = -\frac{\ln \beta}{\nu^*}$, моделирование ξ^i проводится до тех пор, пока не будет выполнено условие $t_*^i + \xi^i \geq t_k + h$.

Шаг 8. Проверить условия:

а) если $i = M$, то положить $M = M + j$, $t_{k+1} = t_k + h$, $k = k + 1$, и перейти к шагу 2;

б) если $i < M$, то положить $i = i + 1$ и перейти к шагу 3.

Замечания.

1. Величину ν^* можно оценить, например, по результатам пробного моделирования траекторий системы наблюдения. Шаг h численного интегрирования должен быть согласован с величиной ν^* таким образом, чтобы появление двух и более событий типа обрыва или ветвления траектории на промежутке $[t_k, t_{k+1})$ было маловероятно, тогда распределение величин ξ^i можно считать показательным. В противном случае алгоритм необходимо усложнить.

2. На шаге 2 можно получить ковариационную матрицу ошибки оценивания для момента времени t_k : $\hat{\Gamma}_k = \int_{\mathbb{R}^n} (x - \hat{X}_k)(x - \hat{X}_k)^\top p(t_k, x | Y_0^{t_k}) dx$.

Кроме того, поскольку на этом шаге получена оценка апостериорной плотности вероятности $p(t_k, x | Y_0^{t_k})$, возможно использовать критерии при нахождении оценки вектора состояния, отличные от (3), например критерий максимума апостериорной плотности

вероятности [9]: $\hat{X}(t) = \arg \max_{x \in \mathbb{R}^n} p(t, x | Y_0^t)$, или, учитывая, что величины M , M_k и $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t_k, x | Y_0^{t_k}) dx$ не зависят от x , $\hat{X}(t) = \arg \max_{x \in \mathbb{R}^n} e^{c^\top(x) Y_k} \tilde{p}(t, x | Y_0^t)$.

3. Для повышения точности расчетов могут применяться методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений, имеющие больший порядок точности, нежели стохастический метод Эйлера (18), (19). Такие методы описаны, например, в [4, 9, 14, 19]. Однако точность оценивания определяется не только выбранным методом численного решения стохастических дифференциальных уравнений, но и методом моделирования неоднородных пуассоновских потоков, а также свойствами используемых генераторов псевдослучайных чисел.

В заключительной части рассмотрим пример моделирования и оценивания для линейной системы наблюдения (выбор линейной системы обусловлен возможностью сравнения результатов с оценкой, полученной с помощью фильтра Калмана–Бьюси [9, 11], т. е. с “точным” решением, учитывая, что далее уравнения фильтра Калмана–Бьюси решаются приближенно методом Эйлера).

Пусть система наблюдения описывается уравнениями:

$$dX(t) = -6 \sin 12t e^{-t} X(t) dt + 0.5 dW(t), \quad X(0) = X_0;$$

$$dY(t) = X(t) dt + dV(t), \quad Y(0) = 0,$$

где $t \in [0, 1]$, $X, Y \in \mathbb{R}$; $W(t)$ и $V(t)$ — одномерные стандартные винеровские процессы ($W(t)$, $V(t)$ и X_0 независимы); случайная величина X_0 имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 2 и дисперсией 0.01.

На рис. 5 слева приведены результаты моделирования системы наблюдения с шагом $h = 0.005$ (толстая линия — измеряемая траектория $X(t)$, пунктир — измерения $Y(t)$) и результаты оценивания по критерию минимума среднеквадратичной ошибки (тонкие линии). Оценка, полученная с помощью моделирования траекторий вспомогательного процесса с обрывами и ветвлениями (начальное число вспомогательных траекторий $M = 2.5 \cdot 10^4$), на графике выше; результат решения уравнений фильтра Калмана–Бьюси — ниже (различия заметны на отрезке $[0.4, 0.6]$). На рис. 5 справа толстой линией показано количество траекторий вспомогательного процесса с обрывами и ветвлениями, пунктиром — число обрывов, тонкой линией — число ветвлений (к моменту времени t).

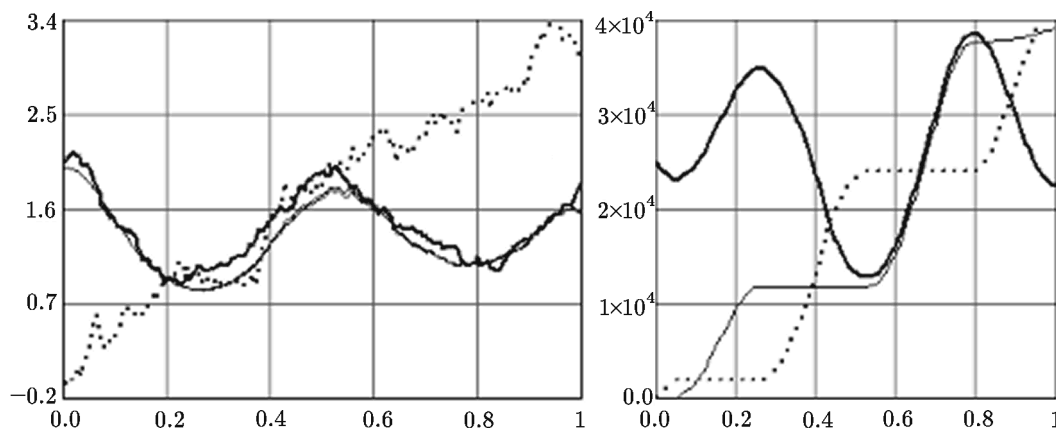


Рис. 5. Траектория состояния системы, результаты измерения и оценивания

Далее рассмотрим пример моделирования и оценивания для нелинейной системы наблюдения, заданной уравнениями:

$$dX(t) = \cos^2 X(t) dt + 0.1 dW(t), \quad X(0) = X_0;$$

$$dY(t) = 0.25X(t) dt + dV(t), \quad Y(0) = 0,$$

где $t \in [0, 5]$, $X, Y \in \mathbb{R}$; $W(t)$ и $V(t)$ — одномерные стандартные винеровские процессы ($W(t)$, $V(t)$ и X_0 независимы); случайная величина X_0 имеет стандартное нормальное распределение.

На рис. 6 слева приведены результаты моделирования системы наблюдения с шагом $h = 0.01$ (толстая линия — измеряемая траектория $X(t)$, пунктир — измерения $Y(t)$) и результаты оценивания по критерию минимума среднеквадратичной ошибки (тонкая линия). На рис. 6 справа показано количество траекторий вспомогательного процесса с обрывами и ветвлениями (начальное число вспомогательных траекторий $M = 10^4$), число обрывов и ветвлений (обозначения аналогичны предыдущему примеру).

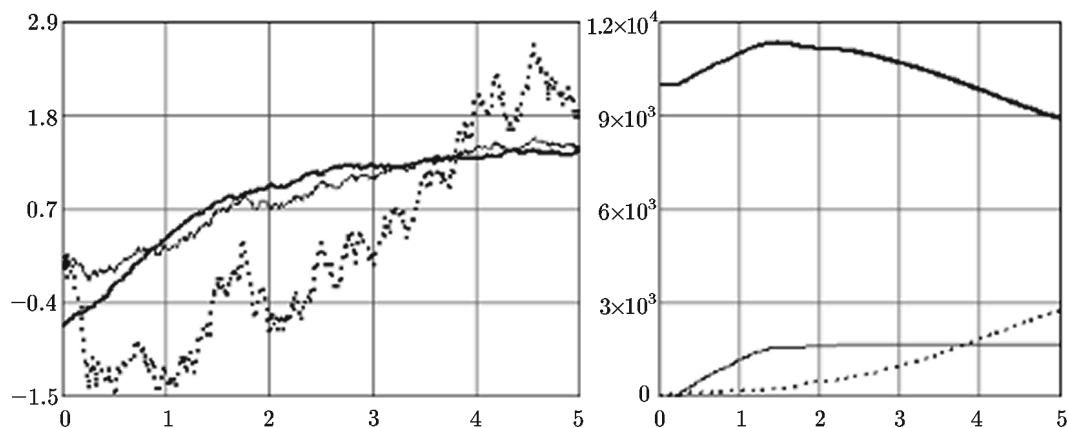


Рис. 6. Траектория состояния системы, результаты измерения и оценивания

Преимущества разработанного алгоритма оптимального оценивания: получение оценки в темпе с поступлением измерений; простота реализации, так как можно применять известные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений и методы моделирования неоднородных пуассоновских потоков, вычислительная сложность алгоритма зависит от вычислительной сложности применяемых численных методов и генераторов псевдослучайных чисел; универсальность, а именно возможность решения задачи оптимальной фильтрации для линейной или нелинейной моделей объекта наблюдения и измерительной системы, для одномерного и многомерного случаев.

Литература

1. **Аверина Т.А.** Новые алгоритмы статистического моделирования неоднородных пуассоновских ансамблей // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2010. — Т. 50, № 1. — С. 16–23.
2. **Артемьев В.М., Наумов А.О., Йениш Г.-Р.** Реконструкция динамических изображений в томографии процессов. — Минск: Изд. центр БГУ, 2004.
3. **Казаков И.Е., Артемьев В.М., Бухалев В.А.** Анализ систем случайной структуры. — М.: Физматлит, 1993.
4. **Кузнецов Д.Ф.** Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010.

5. **Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.** Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы). — М.: Наука, 1974.
6. Марковская теория оценивания в радиотехнике; Под ред. М.С. Ярлыкова. — М.: Радиотехника, 2004.
7. **Михайлов Г.А., Аверина Т.А.** Алгоритм “максимального сечения” в методе Монте-Карло // Доклады АН. — 2009. — Т. 428, № 2. — С. 163–165.
8. Ориентация и навигация подвижных объектов: современные информационные технологии; Под ред. Б.С. Алешина, К.К. Веремеенко и А.И. Черноморского. — М.: Физматлит, 2006.
9. **Пантелеев А.В., Руденко Е.А., Бортакровский А.С.** Нелинейные системы управления: описание, анализ и синтез. — М.: Вузовская книга, 2008.
10. **Рыбаков К.А.** Сведение задачи нелинейной фильтрации к задаче анализа стохастических систем с обрывами и ветвлениями траекторий // Дифф. уравнения и процессы управления. — 2012. — № 3. — С. 91–110. — <http://www.math.spbu.ru/diffjournal> (30.09.12).
11. **Синицын И.Н.** Фильтры Калмана и Пугачева. — М.: Логос, 2006.
12. **Скорород А.В.** Ветвящиеся диффузионные процессы // Теория вероятностей и ее применения. — 1964. — Т. 9, № 3. — С. 492–497.
13. **Тихонов В.И., Кульман Н.К.** Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. — М.: Советское радио, 1975.
14. **Artemiev S.S., Averina T.A.** Numerical Analysis of Systems of Ordinary and Stochastic Differential Equations. — VSP, 1997.
15. **Bain A., Crisan D.** Fundamentals of Stochastic Filtering. — Springer, 2009.
16. **Chen Z.** Bayesian Filtering: From Kalman Filters to Particle Filters, and Beyond / Technical Report: Adaptive Syst. Lab. — McMaster University, Hamilton, ON, Canada, 2003.
17. **Dynkin E.B.** Superprocesses and partial differential equations // Annals of Probability. — 1993. — Vol. 21, № 3. — P. 1185–1262.
18. **Hazewinkel M.** Lectures on linear and nonlinear filtering // Analysis and Estimation of Stochastic Mechanical Systems / W.O. Schiehlen, W. Wedig, eds. — Springer-Verlag, 1988. — P. 103–136.
19. **Schurz H.** Numerical analysis of stochastic differential equations without tears // Handbook of Stochastic Analysis and Applications / V. Lakshmikantham, D. Kannan, eds. — Marcel Dekker, 2002. — P. 237–359.
20. **Yau S.-T., Yau S.S.-T.** Existence and uniqueness of solutions for Duncan–Mortensen–Zakai equations // Proc. of the 44th IEEE Conf. on Decision and Control, and the European Control Conference. — IEEE, 2005. — P. 536–541.

*Статья поступила 10 января 2013 г.,
в окончательном варианте 20 февраля 2013 г.*

