

РЕОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОБЪЕМНОГО РАСТЯЖЕНИЯ НЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ

С. В. Стебновский

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева, 630090 Новосибирск

На основании предложенной макрореологической модели сформулировано уравнение состояния объемно растягиваемой кавитирующей жидкой среды, справедливое во всем диапазоне объемной концентрации пузырьков от кавитационных зародышей до стадии формирования ячеистой пенной структуры. Построена зависимость модуля объемной упругости жидкости от объемной концентрации пузырьков, а также предложен метод оценки времени релаксации растягивающих напряжений в кавитирующих жидких средах.

Поскольку объемное растяжение жидких сред всегда сопровождается развитием кавитации, что в случае неограниченного роста кавитационных пузырьков приводит к разрушению среды на фрагменты, то возникает необходимость построения физической и математической моделей таких процессов.

Известно, что в рамках трехмерной теории линейной вязкоупругости принято рассматривать вязкоупругое поведение среды в условиях чистого расширения и чистого сдвига, а затем комбинация результатов позволяет строить общую теорию. (При таком подходе тензоры напряжений и деформаций разлагаются на изотропную и девиаторную части и для каждого случая выписывается соотношение вязкоупругости.) Этот подход целесообразно использовать и при построении реологической модели кавитирующих жидкостных сред. В работе [1] было построено реологическое уравнение состояния релаксационного типа, характеризующее поведение жидкостных сред, содержащих дисперсные элементы и кавитационные пузырьки, в режиме сдвиговых деформаций при любом фиксированном значении объемной концентрации пузырьков α_0 . Для построения математической модели объемно растягиваемых жидкостных сред необходимо сформулировать реологическое уравнение состояния среды, зависящее от переменной (возрастающей в процессе объемного растяжения среды) концентрации кавитационных пузырьков во всем реализуемом ее диапазоне. Ниже рассматривается механическая модель и строится реологическое уравнение состояния объемно растягиваемых ньютоновских жидкостей.

1. Как было показано [2–4], в процессе объемного растяжения жидкая среда вследствие неограниченного роста кавитационных пузырьков проходит ряд реологических состояний: от практически идеальной жидкости до состояния вязкоупругой среды. Рассмотрим начальную стадию растяжения ($\alpha_{00} = 10^{-12} \div 10^{-4} < \alpha_0 < 10^{-1}$), на которой еще не учитывается рост эффективной сдвиговой вязкости среды, обусловленной присутствием пузырьков, а также предполагается, что пузырьки не взаимодействуют между собой и влияют друг на друга только через осредненное поле давлений в жидкости. На этой стадии процесса применима математическая модель Иорданского — Когарко [5, 6], построенная для идеальной несжимаемой жидкости, равномерно заполненной сферическими пузырьками. Сжимаемость среды обусловлена сжимаемостью пузырьков, динамика которых описывается уравнением Ламба — Рэлея.

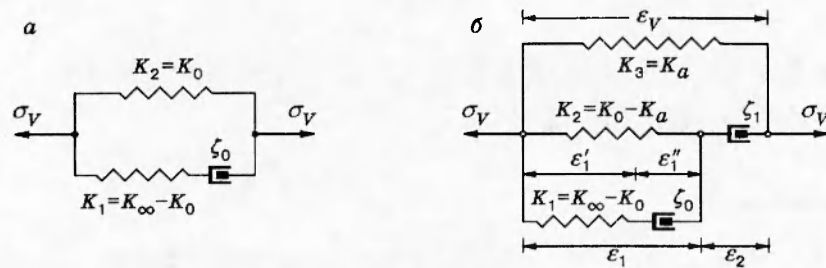


Рис. 1

Если бы жидкая матрица не содержала кавитационных зародышей ($\alpha_{00} = 0$), то при объемном растяжении она накапливала бы упругую энергию, как показано на механической модели (рис. 1, а). При этом время частичной релаксации растягивающих напряжений в такой среде вследствие перестройки ее структуры на молекулярном уровне (т. е. без изменения объема) можно оценить по формуле [7]

$$T_0 = \zeta_0 / (K_\infty - K_0), \quad (1.1)$$

где ζ_0 — объемная (вторая) вязкость жидкости; K_0 , K_∞ — соответственно статический и динамический модули объемной упругости жидкости без развития кавитационных пузырьков. Такой процесс возможен при $De = T_0 / \Delta t_* \gg 1$ (De — число Дебора, Δt_* — характерное время растяжения среды (в случае воды, согласно (1.1), $T_0 \cong 10^{-10}$ с)). Если импульсное растяжение среды происходит в режиме $De < 1$, то в процессе деформации начинают расти кавитационные пузырьки: упругая энергия среды расходуется на работу по развитию кавитационного процесса.

В рамках модели Иорданского — Когарко в [8] рассматривалась задача о растяжении вдоль оси симметрии цилиндрического водяного столба, содержащего кавитационные зародыши. Процесс осуществлялся вследствие мгновенно приложенного постоянного ускорения. Получена зависимость, позволяющая оценивать время релаксации растягивающих напряжений T , обусловленной ростом кавитационных пузырьков в плоскости нагружения (т. е. в жидком слое). Согласно оценке при $\alpha_{00} = 10^{-4}$, радиусе монодисперсных кавитационных зародышей $R_0 = 10^{-5}$ см и растягивающем напряжении -30 МПа $T = 6,3 \cdot 10^{-9}$ с.

Поскольку T всегда намного меньше реально достижимого в экспериментах значения Δt_* , то в [9, 10] использовалось предположение о мгновенной релаксации растягивающих напряжений. Суть его заключается в том, что после достижения отрицательным давлением в жидкости некоторого уровня происходит его мгновенная релаксация и кавитирующий жидкий объем расширяется как не имеющая прочности и вязкости субстанция. Такая модель справедлива, если в процессе деформации среды изменением ее реологических параметров (вязкости, упругости и др.) можно пренебречь. Это, например, задачи динамики кавитационной зоны при $\alpha_0 \leq 0,1$.

Но, как показано в [2-4], с увеличением α_0 вследствие роста эффективной сдвиговой вязкости μ и уменьшения динамического модуля сдвига G_∞ увеличивается время релаксации сдвиговых напряжений $\lambda_0 = \mu / G_\infty$. Так, при $\alpha_0 \rightarrow \alpha_{0*} = 0,74 \div 0,77$ (концентрация предельной упаковки пузырьков) $\lambda_0(\alpha_0) / \lambda_0(\alpha_{0*}) \rightarrow 10^4$. Далее на стадии $\alpha_0 > \alpha_{0*}$ начинается структурирование пузырьковой системы — формирование ячеистой пенной структуры, и среда теряет свойство текучести, переходя в состояние вязкоупругопластического тела [1].

2. С учетом вышеизложенного механическую модель объемно растягиваемой кавитирующей жидкой среды можно представить схемой, приведенной на рис. 1, б. Здесь к модели чистой жидкости (рис. 1, а) добавлены элементы K_3 , ζ_1 , соответствующие объемной упругости K_a и эффективной объемной вязкости кавитирующей жидкости. Модель работает следующим образом. Если скорость нарастания растягивающего напряжения достаточно высокая, сопротивление перемещению поршней ζ_0 и ζ_1 настолько велико, что в начальный момент их можно считать недеформируемыми элементами, а деформация модели определяется упругостью элементов $K_1 = K_\infty - K_0$, $K_2 = K_0 - K_a$ и $K_3 = K_a$, т. е. в начальный момент времени результирующая упругость модели $K = K_1 + K_2 + K_3 = K_\infty$ отвечает динамическому модулю объемной упругости чистой жидкости.

На рис. 2, качественно иллюстрирующем зависимость растягивающих напряжений σ_V от объемных растягивающих деформаций ϵ_V , этой стадии процесса соответствует участок 0–1, где напряжение растет по закону $\sigma_V = \bar{K}_\infty \epsilon_V$. Далее, поскольку, согласно [11], для пузырьковой суспензии $\zeta_1 > \zeta_0$, первой на модели, представленной на рис. 1, б, начинает разгружаться пружина K_1 . Время релаксации напряжений на этой стадии определяется формулой (1.1). На рис. 2 этому процессу отвечает участок 1–2.

Затем начинает перемещаться поршень ζ_1 , разгружая пружину K_2 , что соответствует потере упругой энергии жидкой матрицы вследствие расширения зародышей кавитационных пузырьков и дивергентному движению присоединенных к ним слоев жидкости, имеющей сдвиговую вязкость μ_0 . Этой стадии релаксации упругих растягивающих напряжений в среде отвечает на рис. 2 участок 2–3.

Дальнейшее объемное расширение двухфазной среды носит инерционный характер и происходит вследствие роста кавитационных пузырьков при сохранении объема жидкой матрицы, т. е. пружины K_1 и K_2 на механической модели не деформируются, а продолжается растяжение элемента K_3 и перемещение поршня ζ_1 . Среда на этой стадии обладает некоторой упругостью, обусловленной противодействием окружающей атмосферы, давлением газа и пара в пузырьках, а также поверхностным натяжением, что в механической модели (рис. 1, б) учитывается упругостью пружины $K_3 = K_a$. На рис. 2 этой стадии процесса соответствует участок 3–4. Если α_0 достигает значения α_{0*} и пузырьки вступают во взаимный контакт, то далее при $\alpha_0 > \alpha_{0*}$ среда переходит в состояние пенного ячеистого каркаса. Таким образом, $K_3 = K_a(\alpha_{0i})$, где $0 < \alpha_{0i} < 1$. Отметим, что поскольку окончание релаксационного процесса в чистой жидкости может накладываться на начало релаксации напряжений, обусловленной расширением кавитационных пузырьков, то общее время релаксации растягивающих объемных напряжений будет зависеть от всех вязких и упругих элементов.

3. На основе механической модели (рис. 1, б) построим реологическое уравнение состояния объемно растягиваемой жидкой среды.

Если σ_V и ϵ_V — соответственно объемные растягивающие напряжение и деформация жидкой среды, то, согласно схеме рис. 1, б,

$$\sigma_V = \sigma_1 + \sigma_2, \quad (3.1)$$

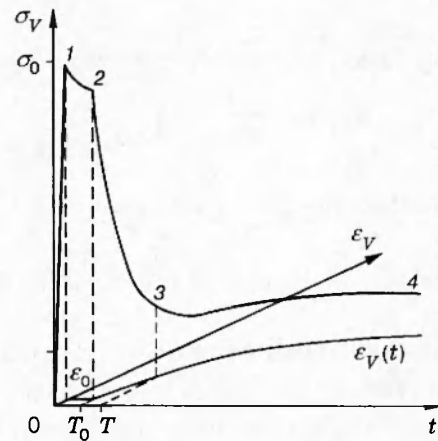


Рис. 2

где

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= K_3 \varepsilon_V = K_a (\varepsilon_1 + \varepsilon_2), & \sigma_2 &= \sigma_2' + \sigma_2'', & \sigma_2' &= K_2 \varepsilon_1, \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon_1' + \varepsilon_1'', & \sigma_2'' &= K_1 \varepsilon_1', & \sigma_2' &= \zeta_0 \partial \varepsilon_1'' / \partial t, \end{aligned} \quad (3.2)$$

откуда

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{\zeta_0 \partial / \partial t} \right) \sigma_2'' \quad \text{или} \quad \sigma_2'' = \varepsilon_1 \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{\zeta_0 \partial / \partial t} \right)^{-1}.$$

Следовательно,

$$\sigma_2 = \sigma_2' + \sigma_2'' = \left[K_2 + \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{\zeta_0 \partial / \partial t} \right)^{-1} \right] \varepsilon_1,$$

и, выражая отсюда ε_1 с учетом $\sigma_2 = \zeta_1 \partial \varepsilon_2 / \partial t$ и $\varepsilon_V = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, получим

$$\sigma_2 = \left\{ \left[K_2 + \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{\zeta_0 \partial / \partial t} \right)^{-1} \right]^{-1} + \frac{1}{\zeta_1 \partial / \partial t} \right\}^{-1} \varepsilon_V. \quad (3.3)$$

После подстановки (3.2) и (3.3) в (3.1) имеем

$$\sigma_V = K_a \varepsilon_V + \left\{ \left[K_2 + \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{\zeta_0 \partial / \partial t} \right)^{-1} \right]^{-1} + \frac{1}{\zeta_1 \partial / \partial t} \right\}^{-1} \varepsilon_V.$$

Из этого соотношения с учетом того, что $K_1 = K_\infty - K_0$, $K_2 = K_0 - K_a$, $T_0 = \zeta_0 / (K_\infty - K_0)$, обозначив $T_1 = \zeta_1 / (K_0 - K_a)$, после преобразования получим реологическое уравнение состояния объемно растягиваемой кавитирующей жидкой среды, справедливое при $\alpha_{0i} \leq 1$:

$$\ddot{\sigma}_V + \left(\frac{1}{T_0} + \frac{K_\infty - K_a}{K_0 - K_a} \frac{1}{T_1} \right) \dot{\sigma}_V + \frac{\sigma_V}{T_0 T_1} = K_\infty \dot{\varepsilon}_V + \left(\frac{K_0}{T_0} + \frac{K_\infty - K_a}{K_0 - K_a} \frac{K_a}{T_1} \right) \dot{\varepsilon}_V + \frac{K_a}{T_0 T_1} \varepsilon_V. \quad (3.4)$$

Поскольку здесь $K_a = K_a(\alpha_{0i})$, $\zeta_1 = \zeta_1(\alpha_{0i})$, то уравнение (3.4) представляется возможным решать лишь численно, если будут установлены зависимости реологических параметров среды от роста объемной концентрации пузырьков.

4. Рассмотрим зависимость модуля объемной упругости пузырьковой суспензии от α_0 . Стадия $0 \leq \alpha_0 < \alpha_{0*}$. Как известно, модуль объемной упругости чистой жидкости

$$K = -V dP/dV \quad (4.1)$$

характеризует ее упругость в окрестности заданного давления. Если в жидкости содержится пузырек, то при заданном давлении в жидкости $P = P^0$ условие уравновешенного состояния пузырька можно записать в виде [7]

$$P^0 = P_1^0 + P_2 - 2\gamma/r^0, \quad (4.2)$$

где P_1^0 и P_2 — давление газа и давление насыщенных паров в пузырьке; r^0 — радиус пузырька; γ — поверхностное натяжение жидкости. Согласно (4.2), если давление в жидкости снизить до $P' < P^0$, радиус пузырька вырастет до r' так, что $z = r'/r^0 > 1$. При этом давление газа в пузырьке уменьшится по закону $P_1' = P_1^0/z^3$, а P_2 останется неизменным (за время расширения пузырька до радиуса r' диффузия паров жидкости через стенку пузырька успевает «выравнивать» P_2). Тогда, выражая из (4.2) $P_1^0 = P^0 - P_2 + 2\gamma/r^0$, запишем

$$P' = P_1' + P_2 - \frac{2\gamma}{r'} = \frac{1}{z^3} \left(P^0 - P_2 + \frac{2\gamma}{r^0} \right) - \frac{2\gamma}{zr^0} + P_2.$$

Отсюда

$$\left. \frac{dP'}{dz} \right|_{z=1} = -3 \left(P^0 - P_2 + \frac{2\gamma}{r^0} \right) + \frac{2\gamma}{r^0}. \quad (4.3)$$

Полагая, что в жидкой среде содержатся N монодисперсных пузырьков радиуса r^0 , выражение для объема двухфазной среды представим в виде

$$V^0 = V_0 + \frac{4}{3} \pi (r^0)^3 N, \quad (4.4)$$

где V_0 — объем чистого жидкого компонента; N такое, что $\alpha_0 < \alpha_{0*}$. Тогда, если вследствие снижения давления в среде радиус пузырьков увеличится до r' , выражение (4.4) примет вид

$$V^{0'} = V_0 + V_1 = V_0 + (4/3)\pi r'^3 N,$$

откуда

$$dV^0 = dV_0 + (3/z)V_1 dz. \quad (4.5)$$

Далее из (4.1) и (4.5) с учетом (4.3) и соотношений $\alpha_0 = V_1/V^0$, $1 - \alpha_0 = V_0/V^0$ получим выражение для модуля объемной упругости жидкости, содержащей пузырьки:

$$\begin{aligned} K_a = -V^0 \frac{dP}{dV^0} &= -V^0 \frac{dP}{dV_0 + (3/z)V_1 dz} = - \left(\frac{1}{V^0} \frac{dV_0}{dP} + \frac{3}{z} \alpha_0 \frac{dz}{dP} \right)^{-1} \Big|_{z=1} = \\ &= \left[(1 - \alpha_0)\chi_0 + \frac{3\alpha_0}{3(P^0 - P_2) + 4\gamma/r^0} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (4.6)$$

($\chi_0 = -(1/V_0) dV_0/dP = 1/K_0$ — коэффициент сжимаемости чистой жидкости).

Поскольку α_0 и r^0 взаимосвязаны, то для определенности выразим эту связь через счетную концентрацию пузырьков $n = N/V^0$, что справедливо при отсутствии коалесценции пузырьков в процессе растяжения среды. (Такое предположение обосновано, по крайней мере, на стадии $\alpha_0 < \alpha_{0*}$ при монотонном растяжении объема.) Тогда из условия $n_i V_i^0 = N = \text{const}$ с учетом (4.4) имеем

$$n_i = n_j \frac{V_j^0}{V_i^0} = n_j \frac{V_0 + (4/3)\pi(r_j^0)^3 V_j^0 n_j}{V_0 + (4/3)\pi(r_i^0)^3 V_j^0 n_j} = n_j \frac{V_0/V_j^0 + \alpha_{0j}}{V_0/V_j^0 + \alpha_{0j}(r_i^0/r_j^0)^3}$$

или после замены α_{0j} и n_j соответственно на начальные значения α_{00} и n_0 с учетом $V_j^0 = V^0/(1 - \alpha_{0j})$

$$n_i = \frac{n_0}{1 + [(r_i/r_0)^3 - 1]\alpha_{00}}, \quad (4.7)$$

где r_0, r_i — начальный и текущий радиусы пузырьков.

Подставляя в (4.6) полученное с учетом (4.7) выражение

$$\alpha_0 = \alpha_{0i} = \frac{4}{3} \pi r_i^3 \frac{n_0}{1 + [(r_i/r_0)^3 - 1]\alpha_{00}} = \frac{\alpha_{00}(r_i/r_0)^3}{1 + [(r_i/r_0)^3 - 1]\alpha_{00}}, \quad (4.8)$$

запишем

$$K_a = 1 / \left\{ \chi_0 + \left[\frac{3}{3(P^0 - P_2) + 4\gamma/r_i} - \chi_0 \right] \frac{\alpha_{00}(r_i/r_0)^3}{3\{1 + [(r_i/r_0)^3 - 1]\alpha_{00}\}} \right\}$$

или, подставляя сюда из (4.8) $r_i = r_0 \{(1 - \alpha_{00})\alpha_{0i} / [(1 - \alpha_{0i})\alpha_{00}]\}^{1/3}$, определим модуль объемной упругости

$$K_a = \left\{ (1 - \alpha_{0i})\chi_0 + \frac{3\alpha_{0i}}{3(P^0 - P_2) + (4\gamma/r_0)[\alpha_{00}(1 - \alpha_{0i})/\alpha_{0i}(1 - \alpha_{00})]^{1/3}} \right\}^{-1} \quad (4.9)$$

для пузырьковой суспензии в диапазоне $0 \leq \alpha_{0i} < \alpha_{0*}$. Найдем условие применимости этой формулы. Рост пузырьков в объемно растягиваемой жидкости является неравновесным процессом: радиус пузырьков и давление в среде не удовлетворяют условию (4.2), в то время как K_a по определению характеризует упругие свойства среды при малых отклонениях ее объема от равновесного значения. Поэтому при определении K_a ($0 \leq \alpha_{0i} \leq \alpha_{0*}$) с помощью (4.9) следует рассматривать эту зависимость для спектра равновесных состояний жидкой среды, в каждом из которых радиусы пузырьков, связанные через (4.8) с α_{0i} , и давление в жидкости удовлетворяют условию (4.2).

Набор таких модельных жидких образцов, содержащих пузырьки с различными значениями α_{0i} , соответствующими разным стадиям развития кавитации в растягиваемой жидкой среде, можно приготовить в условии невесомости [12], где образцы могут сохранять свою структуру, по крайней мере, в течение 1 ч (что достаточно для экспериментального измерения K_a). Отметим, что если давление в жидкой матрице образца $P^0 > 10^4$ Па, то, например, в случае воды, согласно (4.2), радиусы пузырьков в устойчиво равновесном состоянии могут принимать любые значения, удовлетворяющие условию $r_i < 1,45$ см.

Стадия $\alpha_{0} \leq \alpha_0 < 1$.* Как уже отмечалось, после достижения концентрации α_{0*} в процессе дальнейшего объемного растяжения среды ее структура трансформируется в ячеистый каркас. Но поскольку при деформации формирующегося ячеистого каркаса объем жидкого компонента остается несжимаемым, то упругие элементы механической модели K_1 и K_2 (рис. 1, б) не деформируются и модель сводится к двухэлементной схеме, соответствующей телу Фойхта: параллельно соединенными упругим элементом K_a и поршнем ζ_1 . Естественно, что на этой стадии условие (4.2) не применимо, а следовательно, не применима и зависимость (4.9).

При $\alpha_{0*} \leq \alpha_0 < 1$ модуль K_a должен зависеть от упругости парогазового наполнения (ПГН) ячеек и поверхностного натяжения пленок, разделяющих ячейки. Найдем зависимость K_a ($\alpha_{0*} \leq \alpha_0 < 1$) от макрореологических характеристик и геометрических параметров ячеек. Известно [13], что модули объемной и сдвиговой упругости среды можно определить через коэффициенты Ламэ, записав соотношение для свободной энергии среды и продифференцировав его по тензору деформации. В [14] таким способом было получено соотношение для модуля объемной упругости пены в виде

$$K = -V^0 \left(\frac{d\tilde{P}}{dV} \right)_0 - \frac{2}{9} \gamma \frac{S_1}{V^0}, \quad (4.10)$$

где S_1/V^0 — отношение суммарной поверхности ячеек к объему пены в невозмущенном состоянии; \tilde{P} — давление ПГН ячеек; V — «возмущенный» объем пены. Поскольку в процессе отклонения от равновесного состояния количество ячеек во всем объеме пены N сохраняется, то, обозначив соответственно «возмущенный» объем ячеек V^+ и «невозмущенный» V^{0+} , имеем $V = NV^+$, $V^0 = NV^{0+}$. С учетом этого

$$-V^0 \left(\frac{d\tilde{P}}{dV} \right)_0 = -\frac{(d\tilde{P})_0}{(dV)_0/V^0} = -V^{0+} \left(\frac{d\tilde{P}}{dV^+} \right)_0. \quad (4.11)$$

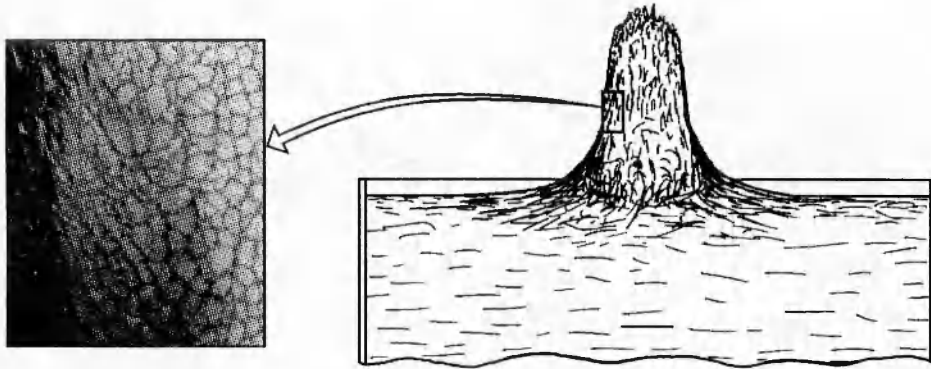


Рис. 3

С другой стороны, в силу сохранения массы ПГН ячейки $V^+ \tilde{\rho} = V^{0+} \tilde{\rho}^0$, где $\tilde{\rho}^0$ и $\tilde{\rho}$ — «невозмущенная» и «возмущенная» плотности ПГН, имеем $dV^+ = -V^{0+} \tilde{\rho}^0 d\tilde{\rho} / \tilde{\rho}^2$. Подставляя это выражение в (4.11), получим

$$-V^0 \left(\frac{d\tilde{P}}{dV} \right)_0 = -V^{0+} \left(\frac{\tilde{\rho}^2 d\tilde{P}}{-V^{0+} \tilde{\rho}^0 d\tilde{\rho}} \right)_0 - \tilde{\rho}^0 \left(\frac{d\tilde{P}}{d\tilde{\rho}} \right)_0 = \tilde{\rho}^0 \tilde{C}_0^2$$

(\tilde{C}_0 — скорость звука в ПГН). С учетом последнего выражения (4.10) можно переписать в виде

$$K = \tilde{\rho}^0 \tilde{C}_0^2 - \frac{2}{9} \gamma \frac{S_1}{V^0}. \quad (4.12)$$

Чтобы найти зависимость S_1/V^0 от α_0 и размеров ячеек, необходимо определить их геометрию. На рис. 3 приведена фотография структуры водяного образца, растягиваемого в импульсном режиме в зоне волны разгрузки по схеме, описанной в [15]. Это типичный случай формирования ячеистой структуры, показывающий, что в силу неравновесности процесса ячейки имеют различные размеры, а структура среды — нерегулярность. Поскольку K_a характеризует по определению упругость среды в окрестности фиксированного равновесного состояния, то представляется целесообразным выбрать геометрию ячеек, обеспечивающую минимум поверхностной энергии системы или значения, близкие к минимальному.

С учетом этого полагаем, что при $\alpha_0 \rightarrow \alpha_{0*}$ пузырьки сохраняют сферическую форму (что вполне оправдано при медленном их росте, допустимом в рамках построения модуля объемной упругости среды) и, подобно каплям в концентрированной эмульсии [16], образуют структуру, соответствующую упаковке, при которой пузырек вписан в ромбоидальный додекаэдр (РД), касаясь каждой его грани в одной точке (рис. 4, а) (все грани РД — одинаковые ромбы). При этом додекаэдры образуют плотно упакованную систему, как это показано пунктиром на рис. 4, а. Поскольку точно описать процесс непрерывной эволюции сферических пузырьков в ячеистые структуры чрезвычайно сложно, то переход к стадии $\alpha_0 \geq \alpha_{0*}$ можно осуществить следующим образом.

Будем считать, что после достижения стадии упаковки α_{0*} каждый пузырек сразу принимает форму равного ему по объему РД (рис. 4, б). Тогда, поскольку объем РД определяется выражением [16]

$$V^+ = a^3 / \sqrt{2} \quad (4.13)$$

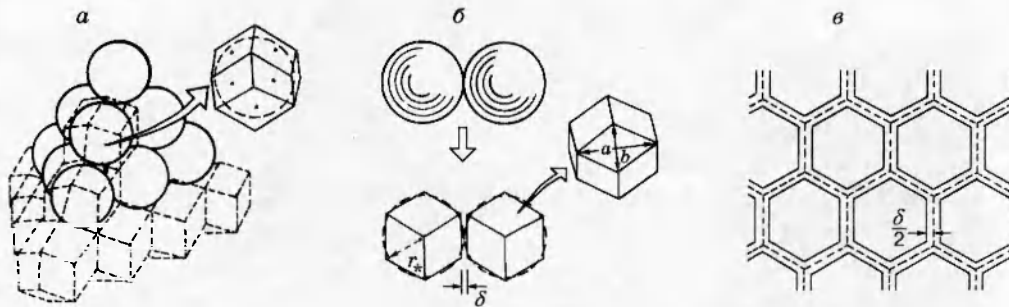


Рис. 4

(a — главная диагональ ромба), из $4\pi r_*^3/3 = a_*^3/\sqrt{2}$ имеем

$$a_* = r_* \sqrt[3]{4\pi\sqrt{2}/3} \cong 1,8094r_*. \quad (4.14)$$

Здесь и дальше звездочкой отмечены параметры, соответствующие стадии $\alpha_0 = \alpha_{0*}$. Если N — число ячеек РД, то их удельная поверхность определяется выражением

$$S_1^0/V^0 = S^+N/(V_0 + V^+N), \quad (4.15)$$

где с учетом того, что меньшая диагональ ромбоидальной грани РД (рис. 4, б) $b = a/\sqrt{2}$ суммарная поверхность граней РД

$$S^+ = 12ab/2 = 3\sqrt{2}a^2. \quad (4.16)$$

На стадии $\alpha_0 \geq \alpha_{0*}$ вся жидкость сосредоточена в перемычках между ячейками РД, поэтому, полагая их строгую регулярность в объеме среды (рис. 4, в), запишем

$$V_0 = S^+\delta N/2 \quad (4.17)$$

(δ — толщина жидких перемычек). Из определения объемной концентрации ячеек РД с учетом (4.17) имеем

$$\alpha_{0i} = \frac{V_i^+N}{V_i^0 + V_i^+N} = \left[1 + \frac{S_i^+\delta}{2V_i^+}\right]^{-1},$$

откуда, используя (4.13) и (4.16), получим

$$\delta_i = \frac{(1 - \alpha_{0i})}{3\alpha_{0i}} a_i. \quad (4.18)$$

С учетом (4.13), (4.16)–(4.18) выражение (4.15) примет вид

$$\frac{S_1^0}{V^0} = \frac{S_i^+N}{V_0 + V_i^+N} = 6 \frac{\alpha_{0i}}{a_i}. \quad (4.19)$$

Если в процессе объемного растяжения среды ячейки, расширяясь, не сливаются (что вполне обосновано с учетом расклинивающего давления в перемычках), то из условия $n_*V_*^0 = n_iV_i^0 = N = \text{const}$, а также $\alpha_{0i} = V_i^+N/V_i^0$, (4.13) и выражения для влагосодержания среды $\beta_i = 1 - \alpha_{0i} = V_0/V_i^0$ имеем

$$n_i = n_* \frac{V_*^0}{V_i^0} = n_* \frac{V_0 + V_i^+N}{V_0 + V_i^+N} = \frac{n_*}{1 + (a_i^3/a_*^3 - 1)\alpha_{0*}}. \quad (4.20)$$

Тогда, используя (4.13) и (4.20), запишем

$$\alpha_{0i} = V_i^+ n_i = \frac{n_* a_i^3}{\sqrt{2} [1 + (a_i^3/a_*^3 - 1)\alpha_{0*}]},$$

откуда с учетом $n_* = \alpha_{0*}/V_*^+ = \sqrt{2} \alpha_{0*}/a_*^3$ следует

$$a_i = a_* \sqrt[3]{(1 - \alpha_{0*})\alpha_{0i}/(1 - \alpha_{0i})\alpha_{0*}}. \quad (4.21)$$

Заменяя a_i в (4.19) на a_i из выражения (4.21), с учетом (4.14), а также того, что из $\alpha_{0*} = 4\pi r_*^3 N/[3(V_0 + 4\pi r_*^3 N/3)] = \alpha_{00} r_*^3/[r_0^3(1 + \alpha_{00} r_*^3/r_0^3)]$ вытекает

$$r_* = r_0 \sqrt[3]{\alpha_{0*}/\alpha_{00}(1 - \alpha_{0*})},$$

получим зависимость удельной поверхности ячеек от их концентрации:

$$\frac{S_1^0}{V^0} = \frac{6}{r_* \sqrt[3]{(4\pi\sqrt{2})/3}} \sqrt[3]{\frac{1 - \alpha_{0i}}{1 - \alpha_{0*}}} \alpha_{0*} \alpha_{0i}^2 = \frac{6}{r_0} \sqrt[3]{\frac{3}{4\sqrt{2}\pi}} \alpha_{00}(1 - \alpha_{0i})\alpha_{0i}^2, \quad (4.22)$$

а следовательно, после подстановки (4.22) в (4.12) — и выражение

$$K_a(\alpha_{0*} \leq \alpha_{0i} < 1) \approx \tilde{\rho}^0 \tilde{C}_0^2 - \frac{2\gamma}{r_0} \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{9\pi}} \alpha_{00}(1 - \alpha_{0i})\alpha_{0i}^2. \quad (4.23)$$

Таким образом, из (4.9) и (4.23) формируем выражение, определяющее зависимость модуля объемной упругости жидкости, содержащей пузырьки или пенную структуру, при выполнении условия устойчивого равновесия двухфазной среды:

$$K_a = \begin{cases} \left[(1 - \alpha_{0i})\chi_0 + \frac{3\alpha_{0i}}{3(P^0 - P_2) + \frac{4\gamma}{r_0} \sqrt[3]{\frac{(1 - \alpha_{0i})\alpha_{00}}{(1 - \alpha_{00})\alpha_{0i}}}} \right]^{-1} & \text{при } 0 \leq \alpha_{0i} < \alpha_{0*}, \\ \tilde{\rho}^0 \tilde{C}_0^2 - \frac{2\gamma}{r_0} \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{9\pi}} \alpha_{00}(1 - \alpha_{0i})\alpha_{0i}^2 & \text{при } \alpha_{0*} \leq \alpha_{0i} < 1. \end{cases} \quad (4.24)$$

На рис. 5 приведены построенные по формуле (4.24) зависимости $K_a(\alpha_{0i})$ для случая водяной матрицы ($\gamma = 72,3$ г/с², $\chi_0^{-1} = K_0(\alpha_{0i} = 0) = 2,18 \cdot 10^9$ Па). Для ПГН выбрано $\tilde{C}_0 = 4 \cdot 10^4$ см/с, а плотность $\tilde{\rho}^0$ определялась с учетом равновесного состояния ячеек ($\tilde{P} = P^0$). Линии 1–3 соответствуют $P^0 = 10^5, 10^4, 2 \cdot 10^3$ Па, ограничение по условию устойчивого равновесия монодисперсных пузырьков $r_{0i} \leq 5 \cdot 10^{-3}$ см, что, согласно (4.8), отвечает $\alpha_{0i} \leq 0,11$; линия 4 — $P^0 = 0$, ограничение $\alpha_{0i} \leq 6 \cdot 10^{-6}$ ($r_{0i} \leq 4 \cdot 10^{-3}$ см).

Участки $0 \leq \alpha_{0i} \leq \alpha_{0*}$ и $\alpha_{0*} \leq \alpha_{0i} < 1$ линий 1 и 2 при $\alpha_{0i} = \alpha_{0*}$ точно не совпадают, поскольку при выводе зависимости $K_a(\alpha_{0i})$ в этой точке предполагается скачкообразный переход от пузырьковой структуры среды к ячеистой. На линии 1 точками нанесены значения, вычисленные по известной формуле модуля объемной упругости [13], которая применительно к данному случаю имеет вид $K_a = \rho_0(1 - \alpha_{0i})C_0^2(\alpha_{0i})$. Здесь ρ_0 — плотность жидкости; скорость звука в пузырьковой среде $C_0(\alpha_{0i})$ определялась по экспериментальным данным [17].

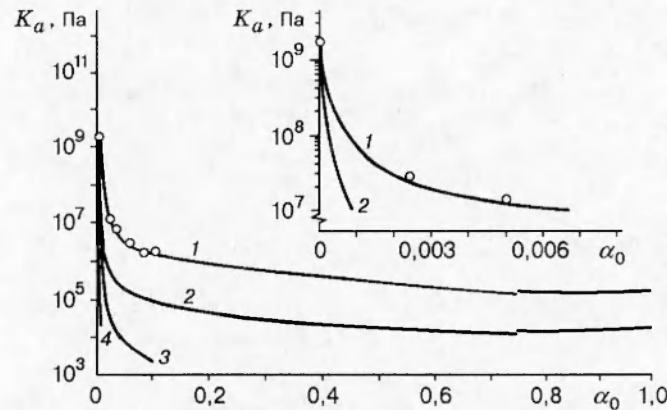


Рис. 5

Таким образом, согласно рис. 5, объемная упругость пузырьковой суспензии сильно зависит от давления в жидкой матрице. Если это давление считать равным нулю (линия 4), то растягиваемую пузырьковую среду действительно можно рассматривать, как не имеющую прочности субстанцию [9, 10]. Но в реальных процессах практически всегда на расширяющийся кавитирующий жидкий объем действует атмосферное давление, определяющее объемную упругость среды. Так, в [18] показано, что если значение кинетической энергии дивергентного течения кавитирующего жидкого объема не превышает некоторого порогового значения, то атмосферное противодействие может привести к приостановке процесса объемного расширения среды и захлопыванию пузырьковых кластеров.

Вторым реологическим параметром среды, зависящим от α_0 , является эффективная объемная вязкость ζ_1 . Но для определения этой зависимости необходимо использовать экспериментальные методики.

5. Проведем качественный анализ релаксационных свойств вязкой кавитирующей жидкости, задавая ее мгновенную деформацию в виде

$$\varepsilon_V(t) = \varepsilon_0[U(t)], \quad (5.1)$$

где

$$[U(t)] = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_1 = 0, \\ 1 & \text{при } t \geq t_1; \end{cases} \quad \frac{d[U(t)]}{dt} = [\delta(t)];$$

$[\delta(t)]$ — функция Дирака. Подставляя (5.1) в (3.4), с учетом свойств δ -функции получим уравнение

$$\ddot{\sigma}_V + \left(\frac{1}{T_0} + \frac{K_\infty - K_a}{K_0 - K_a} \frac{1}{T_1} \right) \dot{\sigma}_V + \frac{1}{T_0 T_1} \sigma_V = f(t)$$

$$\left(f(t) = \frac{K_a}{T_0 T_1} \varepsilon_0 [U(t)] + \left(\frac{K_0}{T_0} + \frac{K_\infty - K_a}{K_0 - K_a} \frac{K_a}{T_1} \right) \varepsilon_0 [\delta(t)] + K_\infty \varepsilon_0 \frac{d}{dt} [\delta(t)] \right),$$

общее решение которого имеет вид

$$\sigma_V(t) = K_a \varepsilon_0 [U(t)] + \frac{\varepsilon_0 [U(t)]}{X_1 - X_2} \left[\left(\frac{K_a}{T_0 T_1 X_1} + \frac{K_0}{T_0} + \frac{K_\infty - K_a}{K_0 - K_a} \frac{K_a}{T_1} + K_\infty X_1 \right) e^{X_1 t} - \left(\frac{K_a}{T_0 T_1 X_2} + \frac{K_0}{T_1} + \frac{K_\infty - K_a}{K_0 - K_a} \frac{K_a}{T_1} + K_\infty X_2 \right) e^{X_2 t} \right]. \quad (5.2)$$

Здесь

$$X_1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{T_0} + \frac{1}{T_1} \frac{K_\infty - K_a}{K_0 - K_a} - D \right), \quad \bar{X}_2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{T_0} + \frac{1}{T_1} \frac{K_\infty - K_a}{K_0 - K_a} + D \right),$$

$$D = \sqrt{\frac{1}{T_0^2} + \frac{1}{T_1^2} \left(\frac{K_\infty - K_a}{K_0 - K_a} \right)^2 + \frac{2}{T_0 T_1} \frac{K_\infty + K_a - 2K_0}{K_0 - K_a}}. \quad (5.3)$$

Согласно (5.2), (5.3),

$$\sigma_V(t) \rightarrow \begin{cases} K_\infty \varepsilon_0 & \text{при } t \rightarrow +0, \\ K_a \varepsilon_0 & \text{при } t \rightarrow \infty, \end{cases}$$

т. е. растягивающее напряжение со временем убывает до постоянного значения: в среде протекает релаксационный процесс, что соответствует механической модели среды (см. рис. 2).

Время релаксации растягивающих напряжений T находится из условия

$$\sigma_V(t = T) = \sigma_V(t = 0)/e \quad (e = 2,71828). \quad (5.4)$$

Подставляя (5.4) в (5.2), имеем

$$\left(\frac{K_a}{T_0 T_1 X_2} + \frac{K_0}{T_0} + \frac{K_\infty - K_a}{K_0 - K_a} \frac{K_a}{T_1} + K_\infty X_1 \right) e^{X_1 T} -$$

$$- \left(\frac{K_a}{T_0 T_1 X_2} + \frac{K_0}{T_0} + \frac{K_\infty - K_a}{K_0 - K_a} \frac{K_a}{T_1} + K_\infty X_2 \right) e^{X_2 T} = \left(\frac{K_\infty}{e} - K_a \right) (X_1 - X_2), \quad (5.5)$$

где X_1 и X_2 вычисляются из (5.3) с учетом $T_0 = \zeta_0 / (K_\infty - K_0)$, $T_1 = \zeta_1 / (K_\infty - K_a)$. Для определения таким способом T необходимо иметь численные значения реологических параметров среды, входящих в (5.4), (5.5). Здесь K_∞ , K_0 , ζ_0 , как правило, известны для большинства жидкостей, $K_a(\alpha_0)$ можно вычислить по формуле (4.24). Но определение ζ_0 из (1.1) во всем диапазоне α_0 представляется неправомерно, так как при $\alpha_0 = \alpha_{00} \rightarrow 0$ выражение (1.1) имеет в приближении несжимаемой жидкой матрицы особенность, а при больших начальных значениях $\alpha_0 = \alpha_{00}$ форма пузырьков отклоняется от сферической и необходимо учитывать их взаимодействие, что не предусмотрено при выводе формулы (1.1). Отметим, что при $\alpha_{00} = 10^{-4}$, $r_0 = 10^{-5}$ см значение T , вычисленное из (5.5) с учетом (1.1), (4.24) и (5.3), равно $1,8 \cdot 10^{-8}$ с, что достаточно близко к результату [8], где $T = 0,63 \cdot 10^{-8}$ с.

Поэтому следующим этапом работы по построению физической и математической моделей растягиваемой кавитирующей жидкой среды является создание реометрических методик, которые позволили бы найти эмпирические зависимости реологических параметров среды (в том числе ζ_1) от α_0 и скорости деформации среды.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01772).

ЛИТЕРАТУРА

1. Стебновский С. В. К построению реологической модели кавитирующих дисперсных жидких сред // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 1. С. 129–138.
2. Стебновский С. В. О механизме импульсного разрушения жидкого объема // ПМТФ. 1989. № 2. С. 126–132.

3. **Стебновский С. В.** Сдвиговая упругость жидких сред, содержащих пузырьки // Физика горения и взрыва. 1990. Т. 26, № 3. С. 127–128.
4. **Стебновский С. В.** Неустойчивость пузырьковых структур в жидкой среде // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1991. Вып. 100. С. 192–201.
5. **Иорданский С. В.** Об уравнениях движения жидкости, содержащей пузырьки газа // ПМТФ. 1960. № 3. С. 102–110.
6. **Когарко Б. С.** Об одной модели кавитирующей жидкости // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137, № 6. С. 1331–1333.
7. **Корнфельд М.** Упругость и прочность жидкостей. М.; Л.: Изд-во иностр. лит., 1951.
8. **Kedrinskii V. K.** On relation of tensile stress in a cavitating liquid // 13th Intern. Congress on Acoustics. Yugoslavia, Belgrade, 1989. P. 327–330.
9. **Станюкович К. П.** Неустановившееся движение сплошной среды. М.: Наука, 1975.
10. **Чернобаев Н. Н.** Численное моделирование начальной стадии кавитационного разрушения жидкости при ударно-волновом нагружении // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1987. Вып. 83. С. 128–138.
11. **Бэтчелор Д.** Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.
12. **Гегузин Я. Е., Дзюба А. С., Кагановский Ю. С.** Эволюция ансамбля газовых пузырьков в жидкости в условиях невесомости // Докл. АН СССР. 1981. Т. 260, № 4. С. 876–880.
13. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теория упругости. М.: Наука, 1965.
14. **Stomenovic D., Wilson T. A.** The shear modulus of liquid foams // J. Appl. Mech. 1984. V. 51, N 2. P. 229–232.
15. **Стебновский С. В.** О поведении дисперсных жидких сред при динамических нагрузках // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 5. С. 68–77.
16. **Princen H. M., Aronson M. P., Moser J. C.** Highly concentrated emulsions // J. Colloid and Interfacescience. 1980. V. 75, N 1. P. 246–270.
17. **Кутателадзе С. С., Накоряков В. Е.** Теплообмен и волны в газожидкостных системах. Новосибирск: Наука, 1984.
18. **Стебновский С. В., Чернобаев Н. Н.** Энергетический порог импульсного разрушения жидкого объема // ПМТФ. 1986. № 1. С. 57–61.

Поступила в редакцию 26/VI 1996 г.
