

УДК 539.25

## ОСОБЕННОСТИ ДИФРАКЦИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН НА РЕБРЕ КЛИНА

С. Ю. Гуревич, Х. Б. Толипов

Южно-Уральский государственный университет, 454080 Челябинск

Рассмотрены условия прохождения рэлеевских волн в упругом клине. Определены коэффициенты преломления при преобразовании исходной волны во вторичные объемные и поверхностные волны. Результаты расчета модулей коэффициентов преломления удовлетворительно согласуются с известными экспериментальными данными.

**Ключевые слова:** дифракция, рэлеевская волна, преобразования Фурье, продольный и поперечный потенциалы.

**Введение.** Дифракция поверхностных (рэлеевских) волн на клине имеет широкий спектр практических приложений (например, использование в преобразователях поверхностных волн в объемные, устранение ложных сигналов в линиях задержки и др.).

Механизм дифракции поверхностных волн может быть описан достаточно просто. Волна, распространяясь по одной грани клина, вызывает неоднородное возмущение другой поверхности на длине  $l$ , величина и форма которого зависят от угла клина и глубины рэлеевской волны (рис. 1, где  $W_1$  — падающая,  $W_2$  — преломленная волна). Это возмущение является источником вторичных волн, которые на границе плоскости математически можно представить спектром пространственных гармоник Фурье. Гармоники с волновым числом  $k = k_r$  описывают поле рэлеевских волн, с  $k < k_t$  — поле объемных волн ( $k_r, k_t$  — волновые числа рэлеевской и сдвиговой волн соответственно).

**1. Постановка задачи.** Предположим, что по первой грани клина распространяется рэлеевская волна (рис. 1), представляющая собой совокупность двух волн: продольной и сдвиговой — с потенциалами

$$\Phi = \exp [i(k_r \varepsilon - \omega t) - \sqrt{k_r^2 - k_l^2} \eta], \quad \Psi = p \exp [i(k_r \varepsilon - \omega t) - \sqrt{k_r^2 - k_t^2} \eta],$$

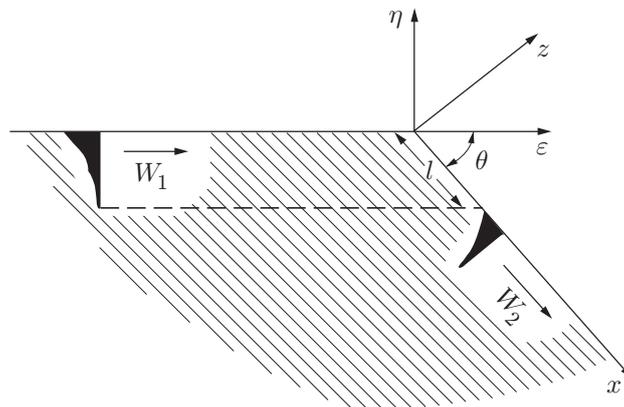


Рис. 1

$$p = -\sqrt{\frac{k_l^2 - k_r^2}{k_t^2 - k_r^2}} i, \quad k_l = \frac{\omega}{c_l}, \quad k_t = \frac{\omega}{c_t}, \quad k_r = \frac{\omega}{c_r}.$$

Здесь  $c_l, c_t, c_r$  — скорости распространения продольных, поперечных и рэлеевских волн соответственно;  $\omega$  — круговая частота. Амплитуда продольного потенциала принята равной единице. (Далее зависимость от времени  $\exp(-i\omega t)$  опускается.)

Зависящие от времени части упругих полей, создаваемые на поверхности другой грани клина падающей рэлеевской волной, определяются системой уравнений

$$\Delta\Phi + k_l^2\Phi = 0, \quad \Delta\Psi + k_t^2\Psi = 0. \quad (1)$$

Как известно, компоненты тензора напряжений вычисляются по уравнениям [1]

$$\sigma_{\tau\nu} = \mu \left( 2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau\partial\nu} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau^2} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial\nu^2} \right), \quad \sigma_{\nu\nu} = 2\mu \left( -\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2} - \frac{k_t^2}{2}\Phi + \frac{\partial^2\Psi}{\partial\tau\partial\nu} \right).$$

На поверхности второй грани клина компоненты тензора напряжений, обусловленные как падающей, так и порождаемой ею волнами, должны быть равны нулю. Если  $\sigma_{zz}^0, \sigma_{xz}^0$  — напряжения, вызываемые смещениями падающей рэлеевской волны, то граничные условия при  $z = 0$  принимают вид

$$\sigma_{zz} = -\sigma_{zz}^0, \quad \sigma_{xz} = -\sigma_{xz}^0. \quad (2)$$

Напряжения, вызываемые смещениями рэлеевской волны на поверхности первой грани, запишем в виде [2]

$$\begin{aligned} \sigma_{\varepsilon\eta} &= [P(k_r) \exp(i\sqrt{k_t^2 - k_r^2}\eta) + Q(k_r) \exp(i\sqrt{k_t^2 - k_r^2}\eta)] \exp(ik_r\varepsilon), \\ \sigma_{\eta\eta} &= [R(k_r) \exp(i\sqrt{k_t^2 - k_r^2}\eta) + S(k_r) \exp(i\sqrt{k_t^2 - k_r^2}\eta)] \exp(ik_r\varepsilon), \end{aligned}$$

где  $P(k_r) = 2k_r\sqrt{k_t^2 - k_r^2}$ ;  $Q(k_r) = 2k_r^2 - k_t^2$ ;  $R(k_r) = -\lambda k_t^2 - 2\mu(k_r^2 - k_t^2)$ ;  $S(k_r) = 2k_r\sqrt{k_t^2 - k_r^2}$ ;  $\lambda, \mu$  — постоянные Ламе. Заметим, что на второй грани клина эти напряжения в зависимости от угла клина и глубины рэлеевской волны будут изменяться как по величине, так и по направлению.

Предположим также, что ребро клина, являющееся общей границей поверхностей клина, не испытывает возмущения и, следовательно, не оказывает существенного влияния на формирование поля. Как будет показано ниже, удовлетворительное соответствие экспериментальных и теоретических кривых свидетельствует о правомерности принятого допущения.

В силу неоднородности рэлеевской волны проекции продольной и сдвиговой составляющих волнового вектора падающей волны на оси координат  $x$  и  $z$  выражаются в комплексном виде

$$\begin{aligned} k_{1x}(\theta) &= k_r \cos\theta + i\sqrt{k_r^2 - k_t^2} \sin\theta, & k_{1z}(\theta) &= k_r \sin\theta + i\sqrt{k_r^2 - k_t^2} \cos\theta, \\ k_{2x}(\theta) &= k_r \cos\theta + i\sqrt{k_r^2 - k_t^2} \sin\theta, & k_{2z}(\theta) &= k_r \sin\theta + i\sqrt{k_r^2 - k_t^2} \cos\theta. \end{aligned}$$

В этом случае граничные условия на поверхности второй грани клина ( $z = 0$ ) для поля потенциалов при разложении возмущающих сил на касательную и нормальную составляющие принимают вид

$$2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = \sigma_1 + \sigma_2, \quad -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \frac{k_t^2}{2}\Phi + \frac{\partial^2\Psi}{\partial x \partial z} = \sigma_3 + \sigma_4,$$

где

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= [P(k_{1x}) \exp(ik_{1x}x) + pQ(k_{2x}) \exp(ik_{2x}x)] \cos \theta, \\ \sigma_2 &= [P(k_{1z}) \exp(ik_{1z}z) + pQ(k_{2z}) \exp(ik_{2z}z)] \sin \theta, \\ \sigma_3 &= [R(k_{1x}) \exp(ik_{1x}x) + pS(k_{2x}) \exp(ik_{2x}x)] \cos \theta, \\ \sigma_4 &= [R(k_{1z}) \exp(ik_{1z}z) + pS(k_{2z}) \exp(ik_{2z}z)] \sin \theta.\end{aligned}$$

**2. Построение решения.** Представим искомое решение в виде преобразования Фурье по координатам  $x$  и  $z$ :

$$A_j^* = \int_{-\infty}^{\infty} A_j(k, x) \exp(ikx) dx, \quad C_j^* = \int_{-\infty}^{\infty} A_j(k, z) \exp(i(kz + 0,5\pi)) dz, \quad j = 1, 2, \quad (3)$$

$$A_1 = \Phi, \quad A_2 = \Psi.$$

Неизвестные функции  $A_j^*$  и  $C_j^*$  определяются подстановкой соотношений (3) в (1) и (2) и последующим решением обыкновенных дифференциальных уравнений.

Вначале рассмотрим решение в случае действия касательных сил. Опустив несложные выкладки, окончательно запишем

$$\begin{aligned}A_1^* &= T_1 \exp(iqz), & C_1^* &= T_2 \exp(iqz), \\ T_0 &= 4k^2qs - (k^2 + s^2)^2, & T_1 &= (T_3 + T_4)/T_0, & T_2 &= (T_5 + T_6)/T_0, & q^2 &= k^2 - k_l^2, & s^2 &= k^2 - k_t^2, \\ T_3 &= [B_1(\theta)S(k_r) - B_2(\theta)Q(k_r)] \cos \theta, & T_4 &= [B_2(\theta)S(k_r) - B_2(\theta)Q(k_r)] \sin \theta, \\ T_5 &= [B_2(\theta)P(k_r) - B_1(\theta)R(k_r)] \cos \theta, & T_6 &= [B_4(\theta)P(k_r) - B_3(\theta)R(k_r)] \sin \theta, & (4) \\ B_1 &= P(k_{1x})/(k - k_{1x}) - pQ(k_{2x})/(k - k_{2x}), & B_2 &= R(k_{1x})/(k - k_{1x}) - pS(k_{2x})/(k - k_{2x}), \\ B_3 &= P(k_{1z})/(k - k_{1z}) - pQ(k_{2z})/(k - k_{2z}), & B_4 &= R(k_{1z})/(k - k_{1z}) - pS(k_{2z})/(k - k_{2z}).\end{aligned}$$

**3. Определение поля смещения в рэлеевской волне.** В обратном преобразовании Фурье продолжим аналитически подынтегральное выражение в плоскость комплексной переменной. В этой плоскости подынтегральная функция имеет точки ветвления

$$k_{1,2} = \pm ik_l, \quad k_{3,4} = \pm ik_t$$

и простые полюса

$$k_{5,6} = \pm ik_r.$$

Ветви радикалов в (4) выберем из условия  $\arg q = \arg s = \pi/2$  при  $k > 0$ , а из точек ветвления проведем разрезы по линиям  $\operatorname{Re}(q, s) = 0$ .

Для того чтобы сместить особые точки с вещественной оси ( $-\infty < k < \infty$ ), сделаем предположение о наличии малого затухания в среде, т. е. предположим, что  $k_l$  и  $k_t$  — комплексные числа.

Интегралы по действительной оси заменим интегралом по пути  $\Gamma$ , проходящему по этой оси, дугам окружности бесконечного радиуса в верхней полуплоскости, опирающейся на действительную ось, и по берегам разрезов, проходящих через точки ветвления (рис. 2). Выбор такого контура интегрирования обусловлен тем, что подынтегральная функция удовлетворяет лемме Жордана.

Таким образом, можно записать

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(k) = \int_{\Gamma} F(k) - \int_L F(k) - \int_{L_1} F(k) - \int_{L_2} F(k) - \int_{\gamma_l} F(k) - \int_{\gamma_t} F(k). \quad (5)$$

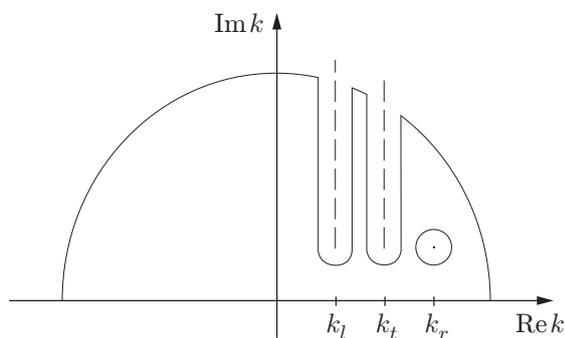


Рис. 2

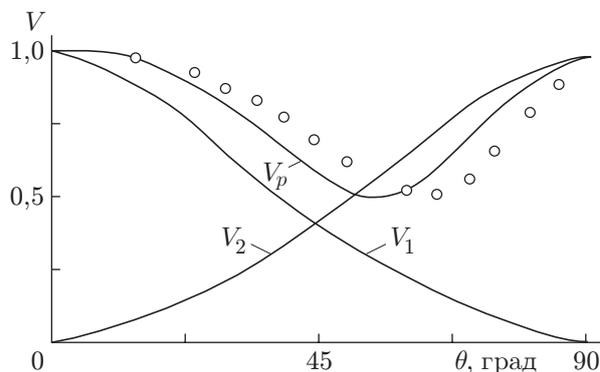


Рис. 3

Интеграл по пути  $\Gamma$  равен сумме вычетов, взятых по полюсам, находящимся внутри контура.

При действии касательных сил для коэффициента преломления получим выражение

$$V_1 = T_1 \left( \frac{d}{dk} T_0(k) \Big|_{k=k_r} \right)^{-1}.$$

Применяя изложенную выше методику для коэффициента преломления в случае нормальных возмущений, имеем

$$V_2 = T_2 \left( \frac{d}{dk} T_0(k) \Big|_{k=k_r} \right)^{-1}.$$

Общий коэффициент преломления выражается в комплексном виде, так как при прохождении волны происходит изменение фазы относительно падающей волны:

$$|V_p| e^{i\varphi} = V_1 + V_2.$$

На рис. 3 приведены результаты численного расчета модулей коэффициентов преломления рэлеевской волны (линии) и экспериментальные данные (точки), взятые из работы [1].

Как показывает анализ, при больших углах клина основной вклад в рассеянное акустическое поле вносят касательные составляющие возмущающих сил. С увеличением угла  $\theta$  вклад этих сил уменьшается, в то же время увеличивается влияние нормальной составляющей, монотонно достигающей максимума. Отметим также, что экспериментальные точки сдвинуты вправо относительно расчетной кривой. Это можно объяснить следующим образом. Согласно изложенному выше коэффициент преобразования поверхностных волн уменьшается с изменением угла клина. Если проекция волнового вектора падающей волны на свободную поверхность больше вектора объемной волны, то возбуждаемые продольная и поперечная волны являются неоднородными, вся их энергия сосредоточена вблизи поверхности [3]. Следовательно, при больших углах клина вся энергия падающей волны переходит в энергию преломленной неоднородной волны, которая затем перерождается в рэлеевскую. Таким образом, коэффициент преобразования начинает уменьшаться после возникновения объемной волны, уносящей энергию в глубь среды [4]. Это происходит в случае, когда проекция волнового вектора падающей волны на другую грань клина меньше волнового вектора сдвиговой волны. Данное условие определяется соотношением  $\theta_0 = \arccos(k_t/k_r)$ . Для выбранного материала с коэффициентом Пуассона  $\sigma = 0,34$   $\theta_0 = 15^\circ$ .

**4. Определение поля смещения объемных волн.** Если контуры  $\gamma_l$  и  $\gamma_t$  проведены через точки перевала и направление обхода по контуру интегрирования совпадает с направлением наискорейшего спуска, то определяющими в формуле (5) являются последние

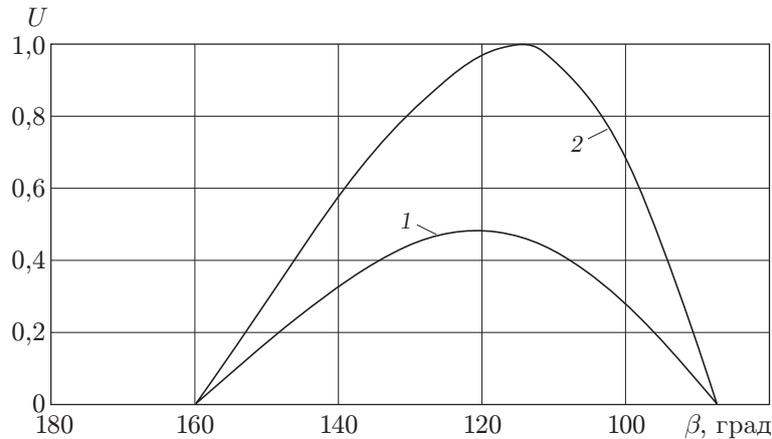


Рис. 4

слагаемые. Опуская несложные выкладки, приведем выражения для смещений продольных и поперечных волн

$$U_l = \sqrt{\frac{2\pi}{k_l \rho}} \frac{\cos^2 \omega}{k_l^3 D_l} \left[ \left( p \frac{2k_{2x}^2 - k_t^2}{k_l \sin \omega - k_{2x}} - \frac{2k_{1x} \sqrt{k_l^2 - k_{1x}^2}}{k_l \sin \omega - k_{1x}} \right) 2k_r \sqrt{k_r^2 - k_t^2} + \right. \\ \left. + \left( p \frac{2k_{2x} \sqrt{k_t^2} - k_{2x}^2}{k_l \sin \omega - k_{2x}} + \frac{2k_{1x}^2 - k_t^2}{k_l \sin \omega - k_{1x}} \right) (2k_r^2 - k_t^2) \right] \exp \left( ik_l \rho - i \frac{\pi}{4} \right),$$

$$U_t = \sqrt{\frac{2\pi}{k_t \rho}} \frac{\cos^2 \omega}{k_t^3 D_t} \left[ \left( p \frac{2k_{2x}^2 - k_t^2}{k_t \sin \omega - k_{2x}} - \frac{2k_{1x} \sqrt{k_l^2 - k_{1x}^2}}{k_t \sin \omega - k_{1x}} \right) 2k_r \sqrt{k_r^2 - k_t^2} + \right. \\ \left. + \left( p \frac{2k_{2x} \sqrt{k_t^2} - k_{2x}^2}{k_t \sin \omega - k_{2x}} + \frac{2k_{1x}^2 - k_t^2}{k_t \sin \omega - k_{1x}} \right) (2k_r^2 - k_t^2) \right] \exp \left( ik_t \rho - i \frac{\pi}{4} \right).$$

Здесь  $D_l = 4 \sin^2 \omega \cos^2 \omega \sqrt{\sin^2 \omega - \varepsilon^2} - (2 \sin^2 \omega - 1)^2$ ;  $D_t = 4 \sin^2 \omega \cos^2 \omega \sqrt{\sin^2 \omega - \varepsilon^2} - (2 \sin^2 \omega - \varepsilon^2)^2$ ;  $\varepsilon = c_l/c_t$ ;  $\omega$  — азимутальный угол, отсчитываемый от оси  $z$ .

На рис. 4 приведены амплитуды смещений объемных волн  $U$ , отнесенные к амплитуде сдвиговой волны (кривая 1 соответствует продольным волнам, кривая 2 — поперечным волнам). Максимум амплитуды пространственных волн достигается при угле клина  $\beta = 180^\circ - \theta \approx 120^\circ$ . Если рассматривать процесс рассеяния как переход энергии падающей рэлеевской волны к поверхностным и пространственным волнам, то согласно закону сохранения энергии с уменьшением энергии дифрагированных поверхностных волн должен увеличиваться вклад объемных волн. Из экспериментальных данных [1] следует, что при  $\beta \approx 120^\circ$  наблюдается минимум коэффициентов преломления.

На рис. 5, а, б приведены распределения по углам  $\omega$  амплитуд продольной и поперечной волн соответственно (кривые 1–4 —  $\beta = 150, 140, 120, 100^\circ$ ). Сравнительный анализ кривых, представленных на рис. 4, 5, показывает, что при углах  $\omega$ , близких к  $30^\circ$ , наблюдается высокий уровень смещений. При уменьшении угла клина происходит как изменение амплитуды смещений волны, так и небольшое смещение максимума кривой зависимости амплитуды от угла  $\omega$ .

При решении задачи дифракции на клине с малым углом раствора необходимо учитывать изменение скорости падающей волны при приближении к ребру клина [5].

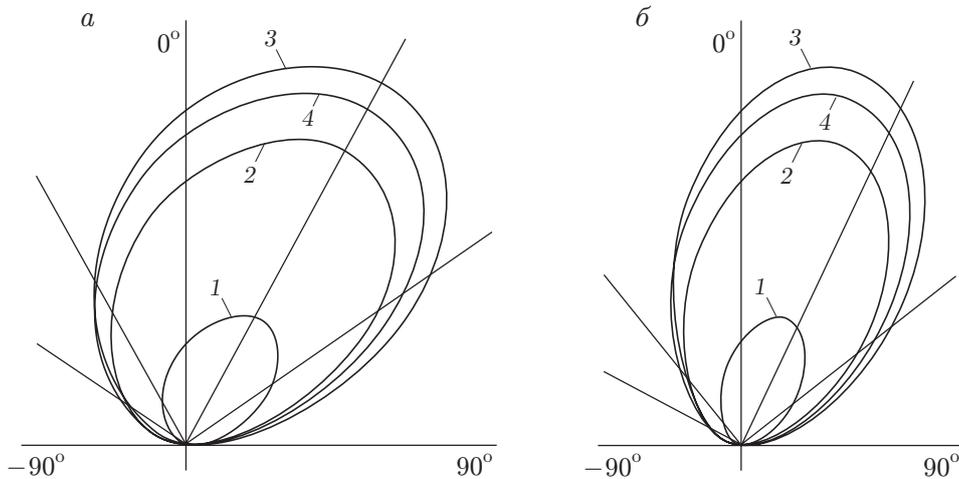


Рис. 5

Предложенная методика позволяет изучать дифракцию и на более сложных рассеивателях, составной частью которых является плоская грань.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Викторов И. А.** Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике. М.: Наука, 1966.
2. **Kane J., Spence J.** Rayleigh wave transmission in elastic wedge // *Geophysics*. 1963. V. 28, N 5. P. 715–723.
3. **Бреховских Л. М., Гончаров В. В.** Введение в механику сплошных сред. М.: Наука, 1982.
4. **Толипов Х. Б., Гуревич С. Ю.** Особенности дифракции рэлеевских волн на клине // Тез. докл. XX Урал. конф. “Контроль технологий, изделий и окружающей среды физическими методами”, 15–16 мая, 2001 г. Екатеринбург: Ин-т физики металлов УрО РАН, 2001. С. 68.
5. **Толипов Х. Б.** Динамическая задача теории упругости для угловых областей с однородными граничными условиями // *Прикл. математика и механика*. 1993. Т. 57, вып. 5. С. 120–126.

*Поступила в редакцию 14/X 2002 г.,  
в окончательном варианте — 20/I 2003 г.*