

УДК: 532.526

**РАСПРЕДЕЛЕННАЯ ДВУМЕРНАЯ  
ВОСПРИИМЧИВОСТЬ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ  
К НЕСТАЦИОНАРНЫМ ВИХРЕВЫМ  
ВОЗМУЩЕНИЯМ В ПРИСУТСТВИИ  
НЕРОВНОСТЕЙ ПОВЕРХНОСТИ\***

**В.И. БОРОДУЛИН, А.В. ИВАНОВ, Ю.С. КАЧАНОВ, В.Ю. КОМАРОВА**

*Институт теоретической и прикладной механики  
им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск*

Исследуется задача распределённого (по продольной координате) возбуждения двумерных волн Толлмина–Шлихтинга (ТШ) слабыми нестационарными вихрями внешнего потока, распространяющимися вдоль границы ламинарного пограничного слоя, нарастающего над поверхностью, с двумерными неоднородностями малой амплитуды. Вихри внешнего потока имеют ориентацию вектора завихренности по размаху модели, т. е. не зависят от поперечной координаты. Теоретический анализ соответствующего механизма возбуждения, приведенный и использованный в [1], уточнен в рамках настоящей работы, и на его основе разработан метод экспериментального определения коэффициентов распределенной вихревой восприимчивости течения и восприимчивости вихрь-неровности, основанный на аппроксимации экспериментальных распределений аналитическими решениями. В условиях возбуждения контролируемых возмущений проведены подробные термоанемометрические исследования возмущений, возбуждаемых как в свободном потоке, так и в пограничном слое для нескольких частот вихрей и периодов неровности; измерена форма контролируемых неровностей поверхности. С помощью метода точечного источника экспериментально изучены характеристики линейной трехмерной устойчивости исследуемого течения к волнам ТШ, необходимые для получения коэффициентов распределенной восприимчивости. Найдено, что вихри внешнего потока с трансверсальной ориентацией вектора завихренности возбуждают в пограничном слое волны ТШ посредством двух механизмов восприимчивости: (а) на гладкой поверхности (за счет естественной неоднородности течения) и (б) при взаимодействии вихрей с неровностями поверхности. На основе разработанного подхода экспериментально определены величины амплитуд и фаз коэффициентов распределенной вихревой восприимчивости обоих указанных типов в зависимости от параметров задачи. Обнаружено, что абсолютные величины обоих коэффициентов восприимчивости быстро растут с частотой вихрей. Показано, что наиболее эффективное распределенное возбуждение волн ТШ наблюдается в условиях выполнения резонанса продольных волновых чисел вихрей, неровности и волны ТШ, приводящего к сильному отличию инкрементов последних от инкрементов линейной устойчивости. В отсутствии резонанса наблюдаются лишь биения амплитуды возмущений пограничного слоя.

**ВВЕДЕНИЕ**

В настоящее время общепризнано, что переход к турбулентности в пограничном слое в случае не слишком больших интенсивностей внешних возмущений происходит из-за неустойчивости исходного ламинарного течения. Обнаруженная экспериментально зависимость положения перехода от внешних возмущений привела к формулировке задачи о преобразовании последних в волны неустойчивости

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 03-01-00299).

(в данном случае Толлмина–Шлихтинга), то есть к проблеме восприимчивости течения к внешним возмущениям [2, 3]. Под внешними (по отношению к пограничному слою) понимаются как возмущения, связанные с обтекаемой поверхностью (вибрации, шероховатость поверхности, тепловые возмущения и т. д.), так и возмущения, поступающие с внешней границы пограничного слоя. К одному из наиболее важных источников такого рода возмущений, наряду с акустикой, обычно относят и турбулентность набегающего потока. Состояние дел в исследовании механизма порождения пограничным слоем собственных колебаний и соответствующий обзор литературы довольно подробно представлены в работе [1], где также разрабатывается метод экспериментального определения коэффициентов восприимчивости течения к вихревым возмущениям в случае, когда вихри свободного потока сносятся вдоль границы пограничного слоя. Здесь мы сталкиваемся с задачей так называемой распределенной вихревой восприимчивости. Основной задачей [1] было изучение возможности порождения волн неустойчивости пограничного слоя нестационарными вихрями потока, имеющими нормальную к стенке ориентацию вектора завихренности, и оценка величин амплитуд и фаз коэффициентов распределенной вихревой восприимчивости, а также выяснение роли резонансного механизма порождения, связанного с присутствием неровности поверхности. Эти задачи решались в трехмерной постановке для фиксированной частоты вихрей и периода неровности.

Первое экспериментальное исследование двумерной задачи распределенной нестационарной восприимчивости, в случае когда вектор завихренности ориентирован параллельно передней кромке, было выполнено в [4]. Значения амплитуд и фаз комплексных коэффициентов вихревой восприимчивости на гладкой поверхности и восприимчивости вихрь–неровность впервые были оценены для фиксированной частоты вихрей и фиксированного продольного волнового числа неровности.

В настоящей работе, являющейся развитием [4], ставилась цель расширить знания о механизме двумерной распределенной вихревой восприимчивости и, используя экспериментальный подход, в основном развитый в [1], получить ответы на следующие вопросы.

Во-первых, выяснить зависимость величин коэффициентов распределенной двумерной вихревой восприимчивости от частоты вихревых возмущений. Во-вторых, изучить влияние продольного масштаба неровностей на возбуждение волн ТШ и прояснить роль резонанса продольных волновых чисел возмущений. Задача формулируется в линейной постановке в том смысле, что отношение амплитуды возбужденной волны ТШ к произведению амплитуд внешних возмущений (вихрей и неровностей), характеризующее степень восприимчивости течения, не зависит от всех указанных амплитуд (см. также [1]). Такая восприимчивость обычно наблюдается при относительно малых интенсивностях внешних возмущений.

## **1. КОЭФФИЦИЕНТЫ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ВИХРЕВОЙ ВОСПРИИМЧИВОСТИ В ПРИСУТСТВИИ НЕРОВНОСТЕЙ ПОВЕРХНОСТИ. МЕТОДИКА ИХ НАХОЖДЕНИЯ**

### **1.1. Эволюция возмущений пограничного слоя и коэффициенты распределенной вихревой восприимчивости**

Следуя работам [5] и [1], можно показать, что для гармонической (по продольной координате  $x$ ) двумерной неровности основное уравнение, описывающее развитие гармонических по времени возмущений пограничного слоя при их

распределенном порождении гармоническими же вихрями свободного потока (той же частоты), можно записать в виде:

$$d\bar{B}^d(x, y_m)/dx = i\bar{\alpha}(x)\bar{B}^d(x, y_m) + \bar{B}_v(x, y)|_{y=\delta} \left[ \bar{G}_v^d(x) + \bar{G}_{vs}^d(x) \left( \bar{H}(x) + \overline{\bar{H}}(x) \right) / 2 \right], \quad (1)$$

где  $y$  — нормальная к стенке координата,  $y_m$  — расстояние от стенки амплитудного максимума волны ТШ с данной частотой  $f$ ,  $\delta$  — толщина пограничного слоя,  $\bar{B}^d(x, y)$  — комплексная амплитуда волны ТШ,  $\bar{\alpha}(x) = \alpha_r(x) + i\alpha_i(x)$  — комплексное продольное волновое число волны ТШ (все комплексные функции помечены сверху черточкой, как векторы.),  $\bar{B}_v(x, y)$  — комплексная амплитуда вихря свободного потока. Безразмерная вещественная форма неровности описывается функцией  $H(x) = Y(x)/\delta_1(x) = \left( \bar{H}(x) + \overline{\bar{H}}(x) \right) / 2$ , где  $Y(x)$  — соответствующая размерная вещественная форма неровности, а  $\bar{H}(x)$  — безразмерная комплексная форма и  $\delta_1(x)$  — толщина вытеснения пограничного слоя. В отличие от [1], в этой работе используется уточненное описание формы неровности поверхности.

Коэффициенты  $\bar{G}_v^d(x)$  и  $\bar{G}_{vs}^d(x)$  в выражении (1) характеризуют восприимчивость исследуемого течения, причем  $\bar{G}_v^d(x)$  — это функция распределенной вихревой восприимчивости для гладкой поверхности, а  $\bar{G}_{vs}^d(x)$  — функция распределенной восприимчивости вихрь–неровность. Обе эти функции не зависят от формы неровности поверхности, но зависят от характеристик основного потока.

В условиях настоящего эксперимента (как и в работе [1]) функции  $\bar{B}_v(x)$ ,  $\bar{G}_v^d(x)$ ,  $\bar{G}_{vs}^d(x)$  и  $\bar{H}(x)$  можно представить в виде:

$$\begin{cases} \bar{B}_v(x) = \bar{B}_{v0} \exp(i\bar{\alpha}_v x) = B_{v0} \exp(i\phi_{v0}) \exp(-\alpha_{vi} x) \exp(i\alpha_{vr} x) \\ \bar{G}_v^d = G_{v0}^d \exp(i\lambda_{v0}^d) \\ \bar{G}_{vs}^d = G_{vs0}^d \exp(i\lambda_{vs0}^d) \\ \bar{H}(x) = \bar{h}_{10} \exp(i\bar{\alpha}_s x) = h_1 \exp(i\phi_1) \exp(-\alpha_{si} x) \exp(i\alpha_{sr} x), \end{cases} \quad (2)$$

где комплексные волновые числа

$$\begin{cases} \bar{\alpha}_v = \alpha_{vr} + i\alpha_{vi} \\ \bar{\alpha}_s = \alpha_{sr} + i\alpha_{si} \end{cases} \quad (3)$$

постоянны. Этот случай соответствует синусоидальной форме неровности. Для комплексно сопряженной функции формы неровности соответственно имеем:

$$\overline{\bar{H}}(x) = \overline{\bar{h}_{10}} \exp(-i\overline{\bar{\alpha}}_s x) = h_1 \exp(-i\phi_1) \exp(-\alpha_{si} x) \exp(-i\alpha_{sr} x), \text{ где } \overline{\bar{\alpha}}_s = \alpha_{sr} - i\alpha_{si}.$$

С целью упрощения формул, в этом разделе считается, что начало координаты  $x$  находится в первой точке диапазона измерений восприимчивости (которая в настоящей работе соответствует расстоянию от передней кромки 450 мм). Соответственно, амплитуда  $\bar{B}_{v0}$  и фаза  $\phi_{v0}$  вихревых возмущений имеют смысл

начальных, как и амплитуда  $h_1$  и фаза  $\phi_1$  неровностей поверхностей. При этом амплитуды  $G_{v0}^d$ ,  $G_{vs0}^d$  и фазы  $\lambda_{v0}^d$ ,  $\lambda_{vs0}^d$  коэффициентов распределенной восприимчивости считаются постоянными в сравнительно короткой области проведения основных измерений.

Как и в работе [1], для нахождения коэффициентов распределенной вихревой восприимчивости будет использоваться метод аппроксимации продольных распределений измеренных амплитуд и фаз возмущений пограничного слоя аналитическими решениями уравнения (1) при выполнении соотношений (2) и (3). Общее решение уравнения (1) имеет в этом случае вид (см., например, [6])

$$\bar{B}^d(x) = e^{i\bar{\alpha}x} \left\{ \bar{B}_{v0} \bar{G}_{v0}^d \int_0^x e^{i\bar{\sigma}s} ds + \frac{1}{2} \bar{B}_{v0} \bar{G}_{vs0}^d \left[ \bar{h}_{10} \int_0^x e^{i\bar{\sigma}_s s} ds + \bar{h}_{10} \int_0^x e^{i\bar{\sigma}_{s1} s} ds \right] + \bar{B}_0^d \right\}, \quad (4)$$

где

$$\bar{B}_0^d = B_0^d \exp(i\phi_0^d) \quad (5)$$

— это начальная (при  $x = 0$ ) комплексная амплитуда возмущения пограничного слоя,  $B_0^d$  и  $\phi_0^d$  — соответствующие вещественные начальные амплитуда и фаза, а

$$\begin{cases} \bar{\sigma} = \sigma_r + i\sigma_i = \bar{\alpha}_v - \bar{\alpha} \\ \bar{\sigma}_s = \sigma_{sr} + i\sigma_{si} = \bar{\alpha}_v + \bar{\alpha}_s - \bar{\alpha} \\ \bar{\sigma}_{s1} = \sigma_{s1r} + i\sigma_{s1i} = \bar{\alpha}_v - \bar{\alpha}_s - \bar{\alpha} \end{cases} \quad (6)$$

— расстройки комплексных продольных волновых чисел. Для реальной и мнимой частей по отдельности имеем соответственно:

$$\begin{cases} \sigma_r = \alpha_{vr} - \alpha_r \\ \sigma_{sr} = \alpha_{vr} + \alpha_{sr} - \alpha_r \\ \sigma_{s1r} = \alpha_{vr} - \alpha_{sr} - \alpha_r, \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \sigma_i = \alpha_{vi} - \alpha_i \\ \sigma_{si} = \alpha_{vi} + \alpha_{si} - \alpha_i \\ \sigma_{s1i} = \alpha_{vi} + \alpha_{si} - \alpha_i. \end{cases} \quad (8)$$

Заметим, что  $\sigma_{s1r} = \sigma_{sr} - 2\alpha_{sr}$  и  $\sigma_{s1i} = \sigma_{si}$ .

Из уравнения (4) видно, что комплексные параметры  $\bar{\sigma}$ ,  $\bar{\sigma}_s$  и  $\bar{\sigma}_{s1}$  являются резонансными расстройками для распределенной вихревой восприимчивости в отсутствие ( $\bar{\sigma}$ ) и в присутствии ( $\bar{\sigma}_s$  и  $\bar{\sigma}_{s1}$ ) неровностей поверхности. Если  $\bar{\sigma} = 0$ ,  $\bar{\sigma}_s = 0$ , или  $\bar{\sigma}_{s1} = 0$ , то соответствующие члены в решении (4) становятся резонансными, потому что в них остается только одно вещественное волновое число  $\alpha_r$  (в комплексной экспоненте  $e^{i\bar{\alpha}x}$ ), а соответствующий член в фигурных скобках становится просто комплексной амплитудой (зависящей от  $x$ ). В этих случаях решение соответствует резонансному возбуждению волн ТШ механизмом распределенной вихревой восприимчивости. Ниже будет показано (см. раздел 7.1), что

в условиях данного эксперимента полный резонанс не существует ни в случае гладкой поверхности (т. е.  $\bar{\sigma} \neq 0$ ), ни в присутствии неровности (т. е.  $\bar{\sigma}_s \neq 0$  и  $\bar{\sigma}_{s1} \neq 0$ ). Поэтому интегралы в (4) равны

$$\int_0^x e^{i\bar{\sigma}s} ds = (1/i\bar{\sigma})(e^{i\bar{\sigma}x} - 1), \quad \int_0^x e^{i\bar{\sigma}_s s} ds = (1/i\bar{\sigma}_s)(e^{i\bar{\sigma}_s x} - 1),$$

$$\int_0^x e^{i\bar{\sigma}_{s1}s} ds = (1/i\bar{\sigma}_{s1})(e^{i\bar{\sigma}_{s1}x} - 1). \quad (9)$$

Соответствующее нерезонансное решение имеет вид

$$\bar{B}^d(x) = e^{i\bar{\alpha}x} \left\{ \frac{\bar{B}_{v0}\bar{G}_{v0}^d}{i\bar{\sigma}}(e^{i\bar{\sigma}x} - 1) + \frac{1}{2} \bar{B}_{v0}\bar{G}_{vs0}^d \left[ \frac{\bar{h}_{10}}{i\bar{\sigma}_s}(e^{i\bar{\sigma}_s x} - 1) + \frac{\bar{h}_{10}}{i\bar{\sigma}_{s1}}(e^{i\bar{\sigma}_{s1}x} - 1) \right] + \bar{B}_0^d \right\}. \quad (10)$$

Это решение и будет использоваться в данной работе для аппроксимации экспериментально полученных распределений.

Отметим, однако, что обсуждавшиеся выше резонансы представляют собой полные резонансы, т. е. когда и вещественные и мнимые части комплексных резонансных расстроек  $\bar{\sigma}$ ,  $\bar{\sigma}_s$  и  $\bar{\sigma}_{s1}$  равны нулю. Но существует другой тип резонансов — резонансы продольных волновых чисел, которые могут играть очень важную роль в возбуждении волн ТШ. В этих резонансах только вещественные части комплексных расстроек ( $\sigma_r$ ,  $\sigma_{sr}$  и  $\sigma_{slr}$ ) равны нулю (а мнимые не равны), приводя к фазовому синхронизму между вихрями свободного потока и волнами ТШ. В связи с неравенством нулю  $\bar{\sigma}$ ,  $\bar{\sigma}_s$  и  $\bar{\sigma}_{s1}$  “нерезонансное” решение (10) справедливо для резонансов вещественных продольных волновых чисел.

Как будет показано ниже, в пограничном слое Блазиуса резонанс волновых чисел возможен (см. раздел 6.1), но только в присутствии неровности стенки. (На гладкой стенке он невозможен из-за большого отличия скоростей распространения вихревых возмущений свободного потока и волн ТШ.)

## 1.2. Методика определения коэффициентов распределенной восприимчивости

Решение (10) использовалось для аппроксимации экспериментальных данных с целью получения коэффициентов распределенной вихревой восприимчивости. Для эффективного использования оно записывалось для реальной ( $B_r^d(x)$ ) и мнимой ( $B_i^d(x)$ ) частей комплексной функции  $\bar{B}^d(x)$  по отдельности.

Чтобы получить коэффициенты распределенной восприимчивости необходимо провести два типа экспериментов: по устойчивости и собственно по восприимчивости. Обозначим их как  $S$  (устойчивость) и  $DR$  (распределенная восприимчивость). Помимо этого, необходимо измерить вихри свободного потока и форму неровностей поверхности.

В результате измерений в эксперименте  $S$  получаем величины инкрементов  $\alpha_i$  и продольных волновых чисел  $\alpha_r$ . В измерениях  $DR$  получаем экспериментальные распределения  $B_r^d(x)$  и  $B_i^d(x)$  для возмущений пограничного слоя.

В рамках этого эксперимента нужно также получить характеристики вихрей свободного потока ( $B_{v0}$ ,  $\phi_{v0}$ ,  $\alpha_{vi}$  и  $\alpha_{vr}$ ) на границе пограничного слоя. Измерения формы неровности поверхности дают нам значения амплитуды  $h_k$  и фазы  $\phi_k$ , а также продольное волновое число неровности  $\alpha_{sr}$  и инкремент неровности  $-\alpha_{si}$ . Величины расстройек  $\sigma_r$ ,  $\sigma_i$ ,  $\sigma_{sr}$ ,  $\sigma_{si}$ ,  $\sigma_{slr}$  и  $\sigma_{sli}$  определяются из (7) и (8). Все функции и параметры, перечисленные выше, представляют собой известные из эксперимента “входные” величины, которые необходимы для нахождения неизвестных функций распределенной восприимчивости, как для гладкой поверхности, так и для поверхности с неровностью. Вообще говоря, в эксперименте DR имеется 4 неизвестных параметра:  $G_{v0}^d$ ,  $\lambda_{v0}^d$  — для восприимчивости на гладкой поверхности и  $G_{vs0}^d$ ,  $\lambda_{vs0}^d$  — для восприимчивости вихрь–неровность. Однако в настоящей работе начальная амплитуда  $B_0^d$  и фаза  $\phi_0^d$  возбуждаемых волн пограничного слоя также рассматривались как неизвестные, хотя они были известны из результатов измерений и могли просто подставляться в аналитическое решение. Это делалось потому, что при достаточно большом количестве экспериментальных точек по координате  $x$  (как в данной работе) можно определить значения  $B_0^d$  и  $\phi_0^d$  по результатам аппроксимации, уменьшив, таким образом, ошибку их непосредственного определения в эксперименте (по одной точке).

Аппроксимация экспериментальных распределений реальной ( $B_r^d(x)$ ) и мнимой ( $B_i^d(x)$ ) частей комплексной функции  $\bar{B}^d(x)$  производилась путем минимизации среднеквадратичного (по всем значениям координаты  $x$ ) безразмерного расстояния между измеренными ( $\bar{B}_{\text{exp}}^d(x)$ ) и аппроксимированными ( $\bar{B}_{\text{apr}}^d(x)$ ) точками в пространстве безразмерных амплитуд и фаз. Это расстояние (отклонение) определялось как

$$\Delta B_{\text{rel}}^d = \sqrt{\overline{\delta B_{\text{rel}}^d(x)^2}}, \quad (11)$$

где двойная черта означает осреднение по всем пространственным точкам, а относительное процентное отклонение в каждой точке

$$\begin{aligned} \delta B_{\text{rel}}^d(x) = \\ = \sqrt{\left[ \left( B_{\text{exp}}^d(x) - B_{\text{apr}}^d(x) \right) / B_m^d(x) * 100\% \right]^2 + \left[ \left( \phi_{\text{exp}}^d(x) - \phi_{\text{apr}}^d(x) \right) / 360 * 100\% \right]^2} / 2, \quad (12) \end{aligned}$$

здесь среднее значение амплитуды в каждой пространственной точке

$$\begin{aligned} B_m^d(x) = \left| \bar{B}_{\text{exp}}^d(x) + \bar{B}_{\text{apr}}^d(x) / 2 \right| = \\ = \sqrt{\left[ \text{Re}\left\{ \bar{B}_{\text{exp}}^d(x) \right\} + \text{Re}\left\{ \bar{B}_{\text{apr}}^d(x) \right\} / 2 \right]^2 + \left[ \text{Im}\left\{ \bar{B}_{\text{exp}}^d(x) \right\} + \text{Im}\left\{ \bar{B}_{\text{apr}}^d(x) \right\} / 2 \right]^2}. \quad (13) \end{aligned}$$

Аппроксимация показала, что этот критерий хорошо работает на практике.

## 2. МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

### 2.1. Аэродинамическая труба.

#### Методы измерений в потоке. Создание неровностей

Эксперименты проводились в дозвуковой малотурбулентной аэродинамической трубе Т-324 Института теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН (г. Новосибирск). Рабочая часть трубы имеет квадратное сечение  $1 \times 1$  м и длину 4 м. В условиях эксперимента степень турбулентности свободного потока в диапазоне частот от 1 Гц и выше составляла менее 0,02. Пограничный слой Блазиуса создавался на плоской пластине, помещенной в рабочей части трубы горизонтально под нулевым углом атаки. Пластина была изготовлена из оргстекла размерами  $1485 \times 1000 \times 10$  мм, имела переднюю кромку эллиптической формы и была снабжена закрылком.

В работе использованы следующие системы координат. Ось  $x$  направлена вниз по потоку вдоль оси рабочей части ( $x = 0$  на передней кромке пластины на оси модели), ось  $z$  — параллельно передней кромке пластины по нормали к набегающему потоку, ось  $y$  ориентирована нормально к поверхности пластины.

Принципиальная схема эксперимента приведена на рис. 1. Измерения выполнялись при скорости набегающего потока  $U_\infty = 9,18$  м/с с помощью однониточного датчика термоанемометра. В поток контролируемым образом вводились возмущения. К ним относятся: вихревые возмущения набегающего потока, волны ТШ, возбуждаемые точечным источником, вмонтированным в поверхность пластины, и неровности поверхности, наклеивавшиеся на модель. Измерения выполнены в диапазоне значений координаты  $x$  от 450 до 700–750 мм.

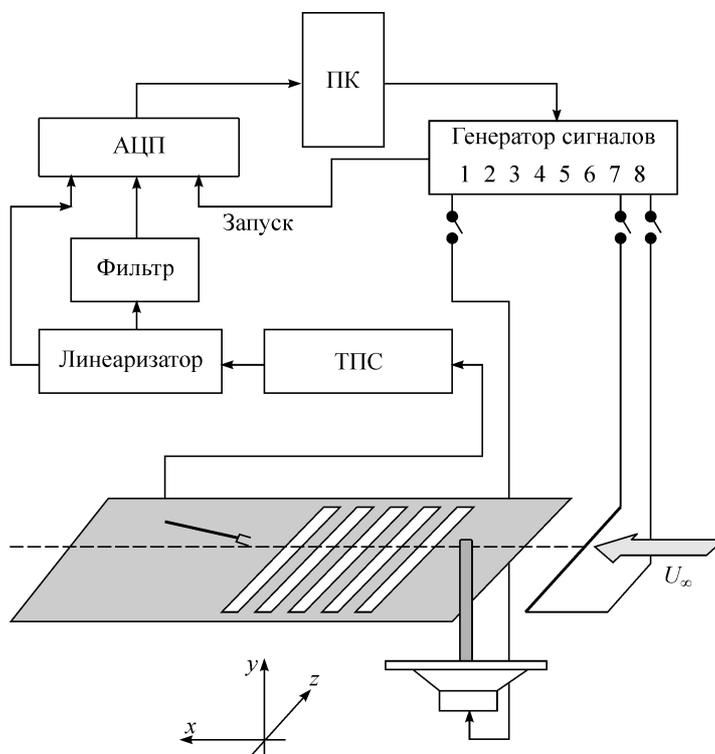


Рис. 1. Схема измерений в аэродинамической трубе.

Постоянная составляющая сигнала на выходе линейризатора, пропорциональная величине средней скорости потока, регистрировалась интегрирующим цифровым вольтметром и подавалась на один из портов АЦП, соединенный с ПК. Переменная составляющая после блока фильтров DISA 55D25, вырезающего колебания с частотой ниже 1 Гц и высокочастотные тепловые шумы измерительного моста, подавалась на другой порт АЦП.

Источники возмущений (вибрирующая проволочка для генерации вихрей свободного потока и точечный источник волн ТШ) возбуждались сигналами, генерируемыми универсальным восьмиканальным модулем ВС-II. Все необходимые сигналы загружались в память блока ВС-II в цифровой форме из компьютера. Во время эксперимента содержимое памяти преобразовывалось в аналоговые сигналы. Частота преобразования задавалась внешним генератором и контролировалась частотомером. Таким образом, все используемые в эксперименте сигналы были когерентными.

В отличие от работ [1] и [4] в данном эксперименте использовались неровности синусоидальной формы с различными амплитудами и длинами волн. Процедура выбора продольных длин волн описана в разделе 2.3. Неровности изготавливались методом выдавливания эпоксидной смолы из промежутка между волнообразной (синусоидальной) матрицей и плоской пластиной. Форма всех изготовленных для эксперимента неровностей была тщательно измерена с помощью лазерного измерителя смещений поверхности (Micro-Epsilon optoNCDT 1605). Результаты измерений приведены в разделе 3.2. Использование синусоидальных неровностей дает преимущество по сравнению с используемыми ранее наклейками в более точном соответствии условий этого эксперимента условиям проведенного анализа, а также дает возможность увеличить амплитуду волнистости без риска появления возможных микроотрывов.

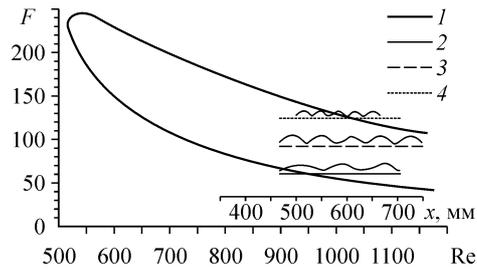
## 2.2. Возбуждение вихрей и волн неустойчивости

Как отмечено в разделе 1.2, для исследования характеристик распределенной восприимчивости пограничного слоя к вихревым возмущениям необходимо было провести эксперименты двух типов: собственно по восприимчивости (эксперимент *DR*) и по линейной устойчивости (эксперимент *S*). Соответственно, гармонические во времени возмущения вводились в поток двумя способами.

В эксперименте *DR* вихревые возмущения внешнего течения возбуждались с помощью тонкой (диаметром 50 микрон) вольфрамовой проволочки, натянутой в набегающем потоке перед моделью (при  $x = -280$  мм,  $y = 20$  мм), перпендикулярной вектору средней скорости и параллельной передней кромке пластины, и колеблющейся по гармоническому закону в направлении по нормали к стенке. Измерения показали, что такой генератор возбуждал в потоке антисимметричную вихревую дорожку типа дорожки Кармана, характеристики которой описаны в разделе 4.1. Отметим, что в такой вихревой дорожке вектор пульсаций завихренности течения ориентирован параллельно поверхности обтекаемой модели и возмущение однородно по размаху, т. е. двумерно.

В эксперименте (*S*) необходимые характеристики устойчивости двумерной волны были получены подобно работе [1] — с помощью возбуждения контролируемых волн точечным источником.

Рис. 2. Области основных измерений на диаграмме устойчивости.  
Нейтральная кривая — 1,  $f = 53,73$  (2), 81,4 (3), 109,1 (4) Гц.



### 2.3. Выбор частот вихревых возмущений и периодов неровностей

Распределенная вихревая восприимчивость (эксперименты *DR*) исследована в четырех различных режимах возбуждения возмущений (*R1*, *R2*, *R3* и *N1*) для трех частот вихрей (и, следовательно, волн ТШ) и трех продольных периодов неровностей. Перечень исследованных режимов с указанием их основных параметров приведен в табл. 1.

Частоты вихрей выбирались из тех соображений, чтобы в областях основных измерений волны ТШ, возбуждаемые ими, соответствовали области нарастания на диаграмме линейной устойчивости. При этом наименьшая из выбранных частот соответствовала окрестности нижней ветви кривой нейтральной устойчивости, а наибольшая — окрестности верхней ветви. Положение области измерений относительно теоретической кривой нейтральной устойчивости показано на рис. 2 в координатах ( $Re$ ,  $F$ ), где  $Re = \delta_1 U_e / \nu$  — локальное число Рейнольдса ( $\delta_1$  — экспериментально измеренная толщина вытеснения пограничного слоя, см. раздел 3.1), а  $F = 2\pi f \nu / U_e^2$  — безразмерный частотный параметр, принятый в теории устойчивости вязких течений. В условиях эксперимента (кинематическая вязкость воздуха  $\nu = 1,52 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ ) выбранные частоты соответствовали частотным параметрам, указанным в табл. 1 (от  $F = 62,1 \cdot 10^{-6}$  до  $124,1 \cdot 10^{-6}$ ), а диапазоны основных измерений характеристик распределенной восприимчивости (от  $x = x_{\min} = 450$  мм до  $x = x_{\max} = 685 \div 730$  мм) соответствовали диапазонам чисел Рейнольдса от  $Re_{\min} = 895$  до  $Re_{\max}$ , значения которых указаны в той же таблице.

Учитывая постоянство скорости потенциального потока  $U_e = 9,18$  м/с во всех исследованных режимах и примерное постоянство кинематической вязкости воздуха, ось  $x$  взаимнооднозначно соотносится в условиях данного эксперимента с локальным числом Рейнольдса. Эта ось также нанесена на диаграмму, приведенную на рис. 2. Указанное взаимнооднозначное соответствие позволяет также схематически нанести на диаграмму устойчивости формы неровностей поверхности (см. рис. 2, волнистые линии). Отметим, что шкала дополнительной координаты  $x$

Таблица 1

Основные параметры режимов измерений восприимчивости (эксперименты *DR*)

Название режима	Тип режима	$f$ [Гц]	$F \cdot 10^6$	Номер неровности	$\lambda_{xx}$ [мм]	$\alpha_{sr}$ [рад/мм]	$Re_{\max}$
<i>R1</i>	резонансный	53,7	62,1	1	85,7	0,0733	1148
<i>R2</i>	резонансный	81,4	92,6	2	63,5	0,0989	1156
<i>R3</i>	резонансный	109,1	124,1	3	47,3	0,1327	1117
<i>N1</i>	нерезонансный	81,4	92,6	1	85,7	0,0733	1148

(и, соответственно, длина наклеек) в таком представлении неравномерна, в отличие от основной шкалы чисел Рейнольдса.

В соответствии с теоретическим описанием исследуемой задачи (см. раздел 1), контролируемые неровности поверхности пластины были двумерными и периодическими в продольном направлении. В трех из четырех изученных режимов измерений (режимы *R1*, *R2* и *R3*) периоды неровностей  $\lambda_{xx} = 2\pi/\alpha_{sr}$  выбирались такими, чтобы для них примерно выполнялось условие резонанса волновых чисел  $\sigma_{sr} = 0$  (см. раздел 1.1). В соответствии с (7) резонансное волновое число неровности определялось из соотношения  $\alpha_{sr} = \alpha_r - \alpha_{vr}$ .

При изготовлении неровностей (до начала измерений в потоке) величины продольных волновых чисел вихрей внешнего потока оценивались следующим образом. Поскольку слабые вихри сносятся со скоростью свободного потока  $U_e$  (см. результаты прямых измерений в разделе 4.2), то волновое число вихря  $\alpha_{vr}$  может быть оценено как  $\alpha_{vr} = \omega/U_e$ , где  $\omega = 2\pi f$  — угловая частота вихрей (равная частоте возбуждаемых волн неустойчивости). Продольное же волновое число чистой волны ТШ  $\alpha_r$  было оценено, основываясь на результатах предыдущих исследований [7, 8].

Высота неровностей выбиралась исходя из следующих требований. Возмущения, возбуждаемые в пограничном слое из-за взаимодействия вихрей внешнего потока с неровностью поверхности, должны иметь достаточно большую (измеряемую) амплитуду. Однако высота неровности не должна быть и чрезмерно большой, чтобы не возникало существенных нелинейных искажений среднего потока (связанных, в основном, с возникновением микроотрывов на кромках неровности), и, соответственно, исследуемый механизм восприимчивости должен быть линейным. В результате измерений обнаружено, что использованные неровности указанным требованиям удовлетворяют.

#### 2.4. Порядок измерений и обработки результатов

В каждом исследованном режиме измерения содержали в себе:

- а) измерения в потоке при включенной вибрирующей провололке, но выключенном точечном источнике волн ТШ (эксперименты *DR*);
- б) измерения в потоке при выключенной вибрирующей провололке, но включенном точечном источнике (эксперименты *S*);
- в) измерения формы неровности.

Часть *a* состояла из измерений внутри пограничного слоя (для исследования возбужденных волн ТШ), вне пограничного слоя (для исследования свойств вихрей внешнего течения) и профилей по нормальной к стенке координате  $y$ . Часть *б* состояла из измерений внутри пограничного слоя распределений амплитуд и фаз возмущений вниз по потоку. Как в *a*, так и в *б* измерения внутри пограничного слоя производились на фиксированном безразмерном расстоянии от стенки  $y/\delta_1 = 0,77$  ( $U/U_e = 0,425$ ), которое примерно соответствует максимуму амплитуд волн ТШ.

В процессе измерений переменная составляющая сигнала с датчика термометра осреднялась по 15 реализациям синхронно с опорным сигналом. Каждая из реализаций содержала 10 периодов основной частоты возмущения, по которым также производилось осреднение при нахождении спектров сигнала в процессе измерения. Поэтому фактически осреднение производилось по 150 периодам.

В каждой точке измерений в потоке регистрировались четыре величины, относящиеся к  $x$ -компоненте скорости течения: амплитуда и фаза возмущения на исследуемой частоте, интегральная по спектру среднеквадратичная интенсивность пульсаций и величина средней скорости. Эти величины записывались в файл-протокол для последующей обработки. Форма осциллограмм и спектров пульсаций также наблюдалась в процессе измерений в каждой пространственной точке.

Часть *в* состояла из измерений формы неровностей в плоскости  $(x, y)$ , секущей поверхность вблизи центра по размаху модели (по  $z$ ) области измерений в потоке.

### 3. ИССЛЕДУЕМОЕ ТЕЧЕНИЕ И СВОЙСТВА НЕРОВНОСТЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

#### 3.1. Характеристики пограничного слоя.

##### Сравнение с пограничным слоем Блазиуса

Измерения, проведенные вне пограничного слоя, показали, что скорость потенциального потока над моделью  $U_e$  не зависит ни от продольной ни от трансверсальной координаты во всей области измерений (как это было и в предыдущих исследованиях на аналогичных плоских пластинах, см., например, [7, 8]).

На рис. 3 приведены некоторые из результатов измерений профилей средней скорости потока в пограничном слое при различных значениях продольной координаты  $x$ , полученные в режимах измерений  $R1$  и  $R3$ , в сравнении с теоретическим

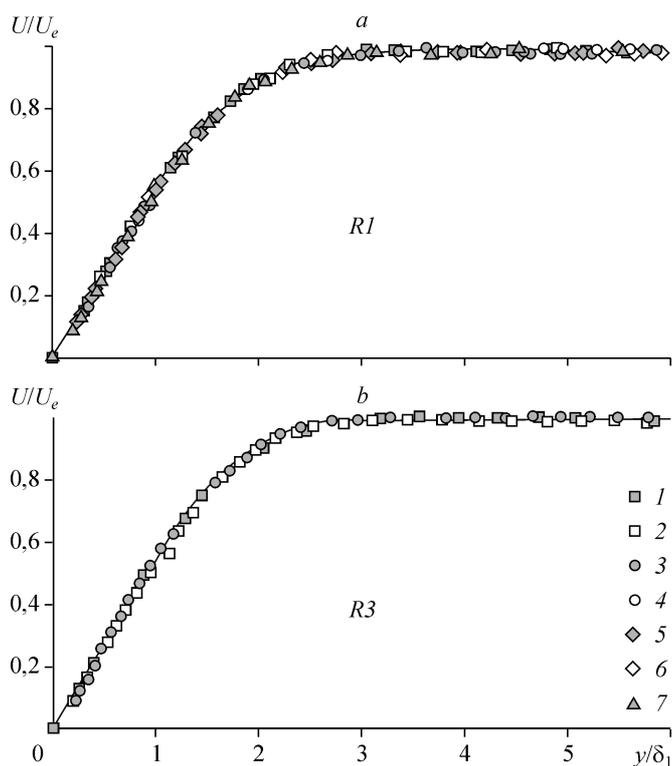


Рис. 3. Профили скорости в режимах  $R1$  (а) и  $R3$  (б) в сравнении с профилем Блазиуса при  $z = 500$  мм.

$a$  —  $x = 450$  (1), 483,1 (2), 526,2 (3), 569,3 (4), 612,4 (5), 655,5 (6), 700 (7);  $b$  —  $x = 480$  (1), 605,8 (2), 748,4 (3) мм; линия — профиль Блазиуса.

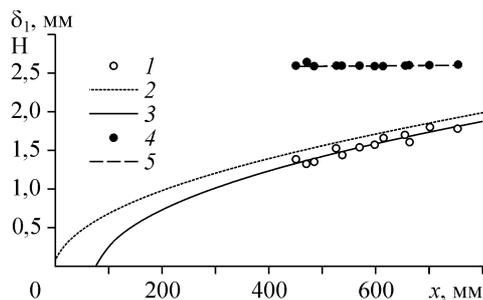


Рис. 4. Зависимости экспериментальных значений толщины вытеснения и формпараметра пограничного слоя от продольной координаты в сравнении с теоретическими.

1 — эксперимент, 2 — закон Блазиуса, 3 — закон Блазиуса со смещением, 4 — эксперимент (H), 5 — формпараметр (H) для закона Блазиуса.

профилем Блазиуса. Значения скорости нормированы на скорость течения в свободном потоке  $U_e$ , а значения нормальной к стенке координаты  $y$  нормированы на локальную толщину вытеснения  $\delta_1$ . Как видно, все профили практически совпадают между собой и с профилем Блазиуса, что свидетельствует об автомодельности исследуемого течения и о его локальном соответствии идеализированному течению на бесконечно тонкой пластине. Аналогичные результаты были получены и для двух других режимов измерений ( $R2$  и  $NI$ ).

Зависимость толщины вытеснения пограничного слоя  $\delta_1$  от продольной координаты представлена на рис. 4 для всех исследованных режимов. Экспериментальные точки хорошо ложатся на соответствующую теоретическую зависимость для пограничного слоя Блазиуса:  $\delta_1 = 1,7208(\nu x/U_e)^{1/2}$  после смещения эффективного положения передней кромки вдоль оси  $x$ . Смещение связано с ненулевым продольным градиентом давления на реальной пластине в районе передней кромки, однако это смещение не влияет на результаты измерений и их анализ, поскольку в данной работе при нахождении локальных чисел Рейнольдса использовалась не теоретическая формула для толщины вытеснения, приведенная выше, а экспериментально измеренные значения  $\delta_1$ .

На рис. 4 представлено также распределение по продольной координате измеренных величин формпараметра пограничного слоя  $H = \delta_1/\delta_2$  (где  $\delta_2$  — толщина потери импульса) в сравнении с теоретическим значением для профиля Блазиуса. Видно, что и это распределение хорошо согласуется с теорией.

Суммируя все результаты, представленные в этом разделе, можно заключить, что пограничный слой, исследуемый в данном эксперименте, с хорошей степенью точности соответствует пограничному слою Блазиуса и присутствие малых неровностей поверхности не оказывает на него заметного влияния.

### 3.2. Форма контролируемых неровностей поверхности

Как отмечалось выше, в данном эксперименте исследования проводились в присутствии трех типов неровностей, наклеивавшихся на поверхность пластины и имевших форму, близкую к синусоидальной. Измерения формы неровностей показали следующее.

Типичная форма неровности (в данном случае № 2) в плоскости  $(x, y)$  показана на рис. 5. Распределения, полученные для двух значений координаты  $z$  (т. е. по размаху модели), аппроксимировались по методу наименьших квадратов функциями  $Y(x) = h_1 \delta_{10} \cos(\alpha_{sr} x + \varphi_1)$  путем подбора коэффициентов  $h_1$ ,  $\alpha_{sr}$  и  $\varphi_1$ , представляющих собой амплитуду неровности, ее продольное волновое число и фазу (отсчитываемую от начала координаты  $x$ , помещенного в точку начала неровности). Результаты аппроксимации также показаны на рис. 5. Видно, что форма

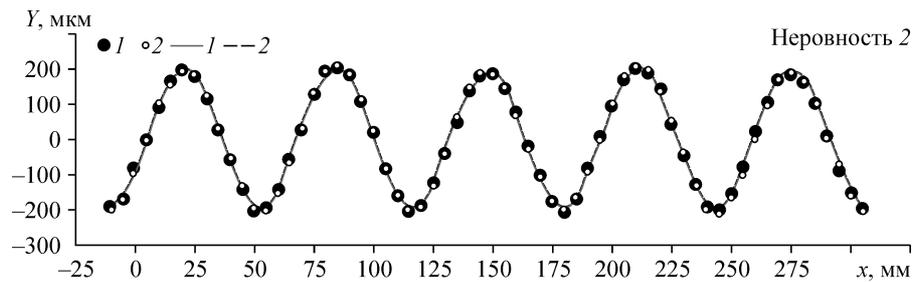


Рис. 5. Форма неровности 2 в двух сечениях по размаху и ее аппроксимация косинусами. Точки: темные — измерение 1, светлые — измерение 2; линии: сплошная — аппроксимация 1, пунктир — аппроксимация 2.

неровности очень близка к гармонической и не зависит от положения по размаху. Аналогичные результаты были получены и для двух других неровностей. Полученные в результате аппроксимаций величины указанных коэффициентов осреднялись для обоих значений координаты  $z$  (для каждой неровности отдельно).

Измерения показали, что неровности 1, 2 и 3 имеют продольные волновые числа  $\alpha_{sr}$  (и соответствующие им периоды  $\alpha_{sx}$ ), указанные в табл. 1. Размерные амплитуды неровностей  $h_1\delta_{10}$  оказались равными 193, 199 и 190 микрон. После нормировки на толщину вытеснения пограничного слоя в начальном сечении (при  $x = 450$  мм), равную  $\delta_{10} = 1,35$  мм, безразмерные амплитуды составляли:  $h_1 = 0,143$ ,  $0,147$  и  $0,141$  соответственно. Начальные фазы  $\varphi_1$  неровностей 1, 2 и 3 оказались равные  $-141,1$ ;  $-118,7$  и  $-95,8$  градусов. Именно эти значения и использовались позже при нахождении коэффициентов распределенной вихревой восприимчивости путем аппроксимации экспериментальных распределений аналитическими решениями.

#### 4. СВОЙСТВА ВОЗМУЩЕНИЙ СВОБОДНОГО ПОТОКА И ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

##### 4.1. Форма и положение вихревых дорожек относительно стенки

Примеры формы вихревых дорожек, возбуждаемых в потоке, и их положение относительно стенки показаны на рис. 6 и 7 для режимов  $R2$  и  $N1$  соответственно. На них приведены профили по нормали к стенке амплитуд в процентах от скорости свободного потока (рисунки  $a$ ) и фаз (рисунки  $b$ ) возмущений потока, возбуждаемых вибрирующей проволочкой в экспериментах  $DR$ . В каждом режиме измерений профили получены в нескольких сечениях по продольной координате  $x$ . Аналогичные результаты получены и для остальных режимов.

Видно, что вихревое возмущение внешнего потока представляет собой антисимметричную дорожку с двумя примерно равными по величине максимумами амплитуды и со скачком фазы на  $180$  градусов в минимуме между ними. Размерное расстояние между максимумами составляет около  $3-4$  мм и примерно соответствует размаху колебаний вибрирующей проволочки. Амплитуда возмущения  $A_v$  в максимумах составляет около  $0,35-0,40$  % от  $U_e$  и затухает вниз по потоку. Однако в районе границы пограничного слоя (отмеченной на рис. 6 и 7 пунктирной линией), где  $y/\delta_1 = 2,85$ , это затухание почти компенсируется смещением вихревой дорожки в направлении стенки (в безразмерных единицах  $y/\delta_1$ ).

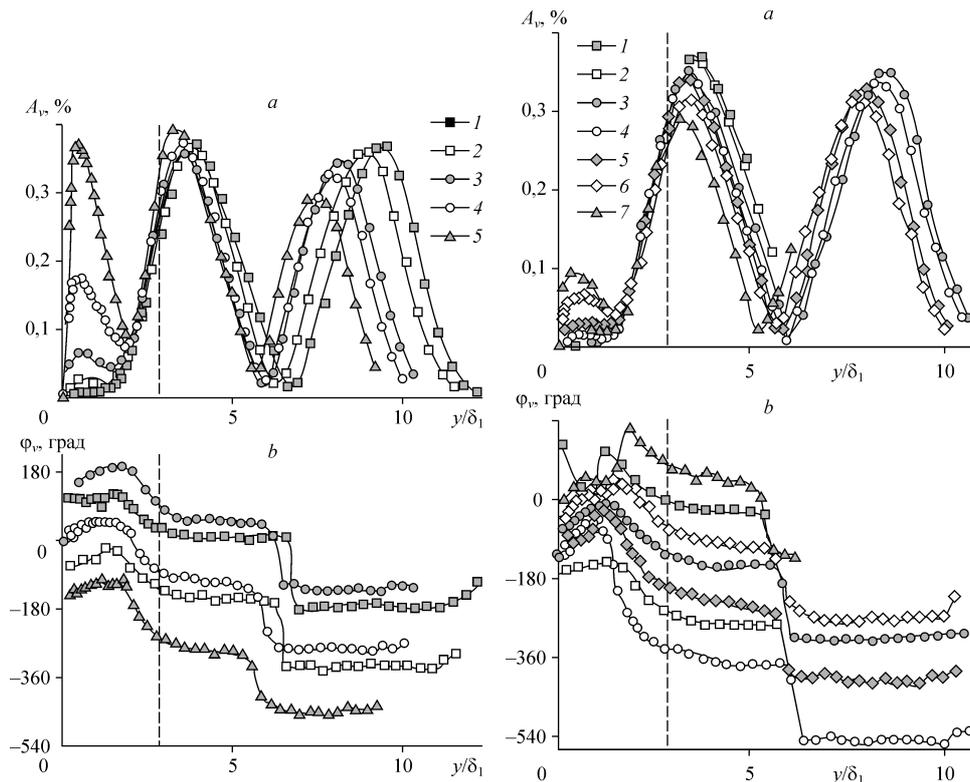


Рис. 6. Профили амплитуд (а) и фаз (b) возмущений скорости потока по нормали к стенке, измеренные в эксперименте DR в резонансном режиме R2 в зависимости от координаты  $x$ .

$x = 471,8$  (1),  $535,5$  (2),  $598,8$  (3),  $662,3$  (4),  $725,8$  (5) мм; граница пограничного слоя — пунктир.

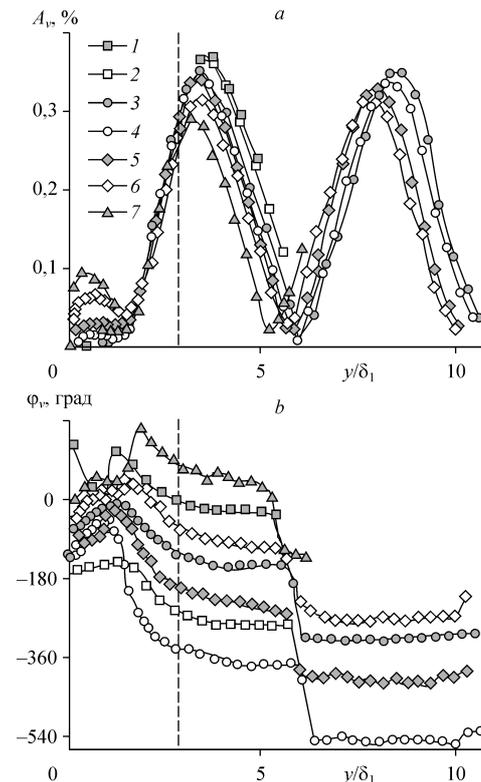


Рис. 7. Профили амплитуд (а) и фаз (b) возмущений скорости потока по нормали к стенке, измеренные в эксперименте DR в не резонансном режиме NI в зависимости от координаты  $x$ .

$x = 450$  (1),  $483,1$  (2),  $526,2$  (3),  $569,3$  (4),  $612,4$  (5),  $655,5$  (6),  $700$  (7) мм; граница пограничного слоя — пунктир.

В результате во всех исследованных режимах амплитуда вихрей на границе пограничного слоя остается почти постоянной по продольной координате, лишь слегка затухая или нарастая. Именно эта амплитуда фигурирует в уравнениях раздела 1, а также в соответствующих аналитических решениях, используемых для нахождения коэффициентов распределенной вихревой восприимчивости.

#### 4.2. Эволюция вихревых возмущений вниз по потоку

Эволюция амплитуд и фаз вихревых возмущений вниз по потоку, полученная в экспериментах DR в режимах R2 и NI, проиллюстрирована на рис. 8 и 9 соответственно. Кривые нарастания (затухания) амплитуд возмущений показаны на рисунках (а), а соответствующих им фаз — на рисунках (b). И амплитуды и фазы определены для  $y = \delta$  ( $y/\delta_1 = 2,85$ ) путем интерполяции данных такого же типа, что представлены на рис. 6 и 7. Аналогичные распределения были получены и в других исследованных режимах.

Видно, что инкременты вихревых возмущений потока очень малы. В режиме R2 (см. рис. 8, а) амплитуда возмущений слегка нарастает, а в режиме NI (см. рис. 9, а) — слегка затухает. В этих режимах частоты вихрей практически одинаковы и различие в инкрементах связано лишь с небольшим отличием положения

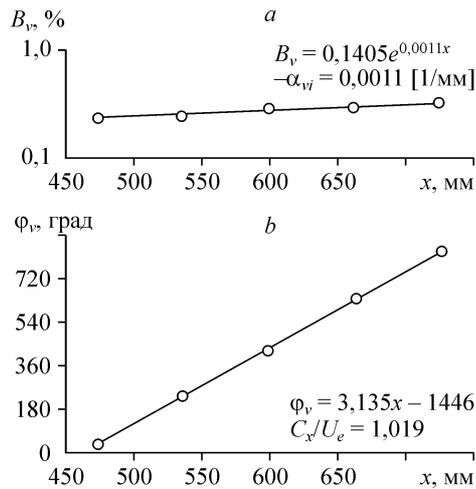


Рис. 8. Эволюция амплитуд (а) и фаз (b) вихревых возмущений на границе пограничного слоя вниз по потоку в режиме R2. Точки — эксперимент, линии — аппроксимации: экспоненциальная (а), линейная (b).

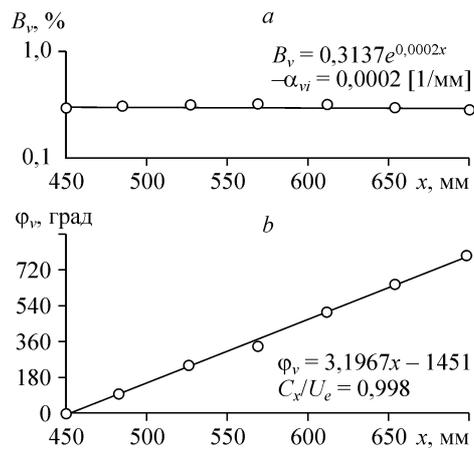


Рис. 9. Эволюция амплитуд (а) и фаз (b) вихревых возмущений на границе пограничного слоя вниз по потоку в режиме N1. Точки — эксперимент, линии — аппроксимации: экспоненциальная (а) линейная (b).

центра вихревой дорожки относительно пластины и с ошибкой измерений. По указанным выше причинам впоследствии, при нахождении коэффициентов восприимчивости с помощью аппроксимации экспериментальных распределений аналитическими решениями, во всех исследованных режимах инкременты вихревых возмущений ( $-\alpha_{vj}$ ) считались равными нулю.

Фазы вихревых возмущений (см. рис. 8, b и 9, b) быстро нарастают по линейному закону. Их аппроксимация прямыми линиями (также показанными на рисунках) дает величины продольных волновых чисел вихрей внешнего потока  $\alpha_{vr}$  как тангенсы угла наклона аппроксимирующих прямых. В режимах R1, R2, R3 и N1 величины  $\alpha_{vr}$  оказались равные 0,0366, 0,0547, 0,0748 и 0,0558 рад/мм соответственно. По этим значениям были определены фазовые скорости вихрей свободного потока на границе пограничного слоя  $C_{vx}/U_e = (\omega/\alpha_{vr})/U_e$ . В режимах R1, R2, R3 и N1 они оказались равные 1,006, 1,019, 0,999 и 0,998 соответственно. Как и ожидалось, фазовые скорости вихрей практически равны скорости внешнего потока, что согласуется с физическими представлениями о сносе потоком слабых вихрей. Полученные значения продольных волновых чисел вихревых возмущений ( $\alpha_{vr}$ ) использовались в процедуре нахождения величин коэффициентов распределенной восприимчивости течения (см. раздел 6).

### 4.3. Возникновение возмущений пограничного слоя. Сравнение профилей возмущений с собственной функцией волны ТШ

Несмотря на то, что вихри внешнего потока затухают, вообще говоря, по направлению к стенке, амплитудные профили, приведенные на рис. 6 и 7, показывают, что внутри пограничного слоя возникает и начинает усиливаться определенное возмущение с максимумом, находящимся вблизи стенки (при  $y/\delta_1 \approx 0,5$ ). Амплитуда этого возмущения, ассоциируемого с возбуждаемой волной ТШ, существенно зависит от режима возбуждения. Интересно отметить, что в резонансном режиме

$R2$  (см. рис. 6) амплитуда волны ТШ намного больше, чем в соответствующем ему нерезонансном режиме  $N1$  (см. рис. 7), отличающимся от режима  $R2$  только продольным масштабом неровности (см. табл. 1).

Соответствие пристенного максимума волне ТШ подтверждается на рис. 10,  $a, b$ , где профили амплитуд и фаз возмущений, измеренные при  $x = 725,8$  мм (в режиме  $R2$ ), сопоставляются с амплитудной и фазовой частью собственной функции двумерной волны ТШ, полученной в работе [8] (для примерно той же скорости потока и частоты возмущения при  $x = 450$  мм). Профили из работы [8] нормированы таким образом, чтобы соответствовать амплитуде и фазе возмущений, наблюдаемых в данном эксперименте, в пристенной области (при  $y/\delta_1 < 1,5$ ). Поскольку вдали от стенки вихри внешнего потока имеют сравнительно большие амплитуды, они экранируют “хвост” волны ТШ при  $y/\delta_1 > 1,5$ . Однако в пристенной области форма измеренных амплитудных и фазовых распределений очень близка к форме соответствующих распределений в волне ТШ.

Из рис. 10 также видно, что безразмерное расстояние от стенки  $y/\delta_1 = 0,77$ , используемое для основных измерений в пограничном слое (и примерно соответствующее  $U/U_e = 0,425$ ), действительно близко к положению амплитудного максимума возмущения, возбуждаемого вихрями в пристенной области.

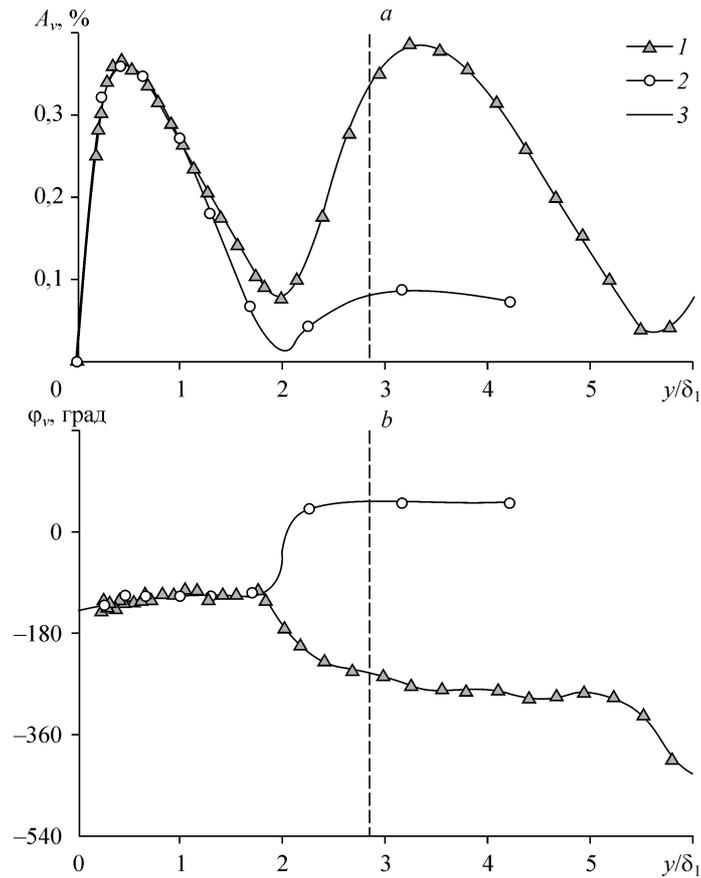


Рис. 10. Сравнение амплитудных ( $a$ ) и фазовых ( $b$ ) профилей возмущений в режиме  $R2$  с собственной функцией волны ТШ, измеренной в работе [30].

$x = 725,8$  мм — 1, эксперимент из работы [31] — 2; аппроксимация эксперимента [31] — 3, граница пограничного слоя — пунктир.

Основной вывод из представленных на рис. 10 профилей заключается в том, что возникающее в пограничном слое возмущение действительно обладает свойствами волны Толлмина–Шлихтинга.

## 5. ЗАКОНЫ РАЗВИТИЯ ЧИСТЫХ ВОЛН НЕУСТОЙЧИВОСТИ

### 5.1. Волны Толлмина–Шлихтинга и их спектры по поперечным волновым числам

Эксперименты  $S$  по исследованию устойчивости были проведены в пяти режимах, указанных в табл. 2. (Отметим, что в данной работе в экспериментах по восприимчивости неровность № 4 не использовалась, а ее амплитуда была примерно такой же, как у других неровностей (215 мкм)). В отличие от возмущений, возбуждаемых вихрями свободного потока в экспериментах  $DR$ , возмущения, генерируемые в пограничном слое точечным источником (эксперименты  $S$ ), оказались существенно трехмерными, поскольку они были локализованы по размаху модели. Для получения характеристик чистых волн ТШ (т. е. в отсутствии их распределенного порождения) для всех исследованных частот были измерены распределения по координате  $z$  в нескольких сечениях по продольной координате  $x$  на расстоянии от стенки примерно соответствующем максимуму волн ТШ ( $U/U_e = 0,425$ ,  $y/\delta_1 = 0,77$ ).

Пример спектров волн ТШ, возбуждаемых в пограничном слое точечным источником (эксперименты  $S$ ), по поперечным волновым числам  $\beta$  представлен на рис. 11 для режима  $S12$ . Спектры получены с помощью фурье-преобразования распределений по координате  $z$ , приведенных на рис. 11, и типичны для спектров волновых поездов (см., например, эксперименты [30]). Как и соответствующие распределения по размаху модели (см. рис. 11), спектры волн ТШ практически симметричны. Максимальные величины спектральных амплитуд (см. рис. 12,  $a$ ) достигаются при  $\beta \approx \pm(0,10-0,17)$  рад/мм. Амплитудные спектры показывают также, что моды ТШ с волновыми числами  $\beta$ , меньшими по модулю примерно 0,27 рад/мм, нарастают, а более трехмерные моды — затухают. Спектральные фазы (см. рис. 12,  $b$ ) нарастают вниз по потоку; скорость нарастания наибольшая для двумерной моды, т.е. для моды с поперечным волновым числом  $\beta = 0$ . (На рис. 12,  $b$ , для удобства изображения, распределения фаз приведены с произвольными сдвигами на величины  $2k\pi$ .) Аналогичные спектры были получены и для других режимов измерений (см. табл. 2).

Таблица 2

Основные параметры режимов измерений устойчивости (эксперименты  $S$ )

Название режима	$f$ [Гц]	$F \cdot 10^6$	Номер неровности	$\lambda_{sx}$ [мм]	$\alpha_r$ [рад/мм]	$-\alpha_i$ [1/мм]	$C_x/U_e$
$S11$	53,7	62,1	1	85,7	0,113	0,0072	0,323
$S01$	53,7	62,1	нет	—	0,112	0,0073	0,327
$S12$	81,4	92,6	1	85,7	0,160	0,0113	0,349
$S02$	81,4	92,6	нет	—	0,158	0,0110	0,353
$S53$	109,1	124,1	4	69,8	0,204	0,0108	0,366

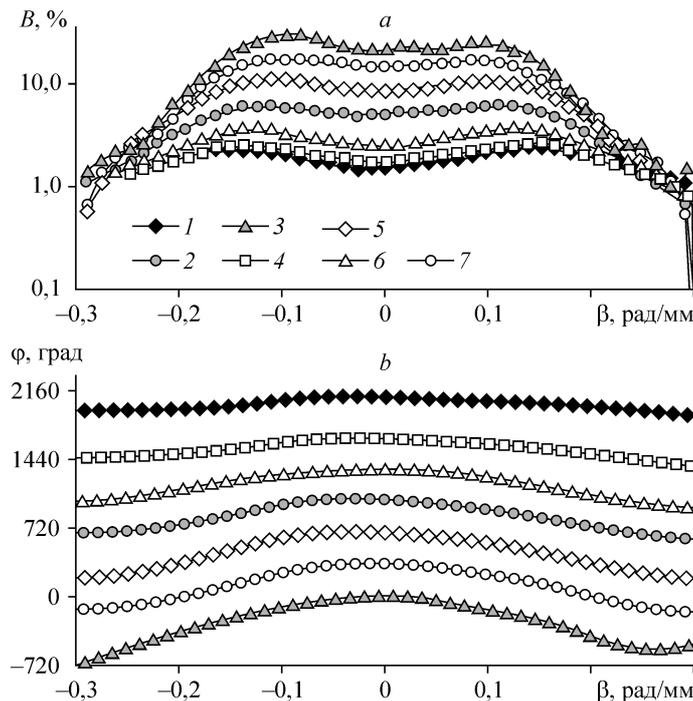
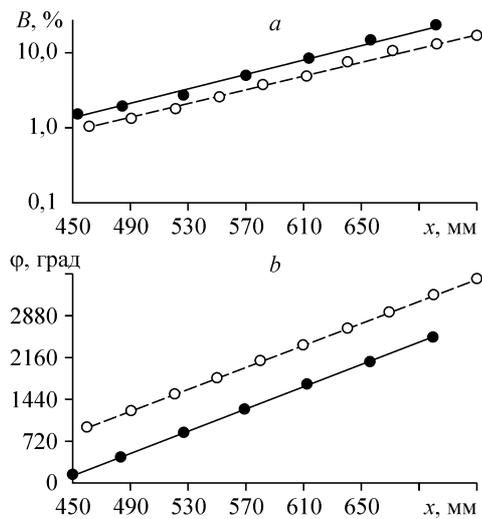


Рис. 11. Эволюция вниз по потоку амплитудных (а) и фазовых (b)  $\beta$ -спектров возмущений пограничного слоя, возбуждаемых точечным источником в режиме  $S12$ .  
 $x = 450$  (1),  $569,3$  (2),  $700$  (3),  $483,1$  (4),  $612,4$  (5),  $526,2$  (6),  $655,5$  (7) мм.

### 5.2. Инкременты, волновые числа и фазовые скорости двумерных волн неустойчивости

Поскольку в данной работе исследуется задача двумерной вихревой восприимчивости, то в спектрах волн ТШ (таких, как показаны на рис. 11) интерес представляли именно двумерные моды ( $\beta = 0$ ), характеристики развития которых были подробно исследованы с целью определения их инкрементов ( $-\alpha_i$ ) и продольных волновых чисел  $\alpha_r$ , а также фазовых скоростей  $C_x$ , которые были получены по методике, разработанной в [9] и подробно описанной в [7].



На рис. 12, а, b приведены примеры распределений по продольной координате спектральных амплитуд и фаз, полученных для двумерной моды ТШ частотой  $f = 81,4$  Гц в режимах  $S12$  (неровность № 1) и  $S02$  (гладкая поверхность) с помощью сечения  $\beta$ -спектров (такого же типа, что и на рис. 11) при  $\beta = 0$ . Экспериментальные

Рис. 12. Пример кривых нарастания амплитуд (а) и фаз (b) чистых двумерных волн ТШ, полученных на частоте  $f = 81,4$  Гц в режимах  $S12$  (темные точки, неровность 1) и  $S02$  (светлые точки, гладкая стенка). Экспоненциальные аппроксимации точек, полученных в режимах  $S12$  (линия),  $S02$  (пунктир).

точки аппроксимированы по методу наименьших квадратов экспонентами для амплитуд (см. рис. 12, *a*) и прямыми линиями для фаз (см. рис. 12, *b*). Видно, что аппроксимирующие кривые хорошо согласуются с экспериментальными точками. По результатам аппроксимации были определены величины инкрементов ( $-\alpha_i$ ) и продольных волновых чисел ( $\alpha_r$ ) чистых волн ТШ. Аналогичные результаты получены и в других режимах экспериментов *S* (для частот  $f = 53,7$  и  $109,1$  Гц). Полученные величины приведены в табл. 2, из которой видно, что скорости нарастания амплитуд и фаз не зависят, в пределах точности измерений, от присутствия неровности поверхности. Для нахождения коэффициентов распределенной вихревой восприимчивости в режимах *R1*, *R2*, *R3* и *N1* (см. табл. 1) величины инкрементов и волновых чисел для одинаковых частот были осреднены. Для частот  $f = 53,7$ ,  $81,4$  и  $109,1$  Гц они составили:  $-\alpha_i = 0,0072$ ,  $0,0112$ ,  $0,0108$  1/мм и  $\alpha_r = 0,113$ ,  $0,159$ ,  $0,204$  рад/мм. Эти величины использовались также для построения кривых нарастания амплитуд и фаз чистых волн ТШ, приведенных ниже (см. разделы 6.2 и 6.3).

По найденным значениям продольного волнового числа  $\alpha_r$  чистых волн ТШ были также определены средние фазовые скорости последних (как  $C_x = \omega/\alpha_r$ ). Безразмерные значения  $C_x/U_e$  приведены в табл. 2. В среднем для частот  $f = 53,7$ ,  $81,4$ ,  $109,1$  Гц они составили  $0,325$ ,  $0,351$ ,  $0,366$  соответственно. Такие величины скоростей весьма характерны для волн ТШ (см., например, [8]).

## 6. РАСПРЕДЕЛЕННОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН НЕУСТОЙЧИВОСТИ И ВИХРЕВАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

В этом разделе приведены основные результаты настоящей работы, полученные на завершающих этапах анализа данных в соответствии с процедурой, описанной в разделе 1.

### 6.1. Величины резонансных расстройек

В соответствии с методикой, представленной в разделе 1, для получения комплексных коэффициентов распределенной вихревой восприимчивости  $\bar{G}_v^d$  и  $\bar{G}_{vs}^d$  (см. (1) и (2)) нужно аппроксимировать распределения комплексной амплитуды волн пограничного слоя  $\bar{B}^d(x)$  аналитическими решениями. Для реализации этой процедуры необходимо определить величины резонансных расстройек комплексных волновых чисел (6).

Результаты экспериментов *DR* и *S* показали, что абсолютные величины всех комплексных расстройек ( $\bar{\sigma}$ ,  $\bar{\sigma}_s$  и  $\bar{\sigma}_{s1}$ ) всегда отличны от нуля, поэтому ни одно из условий полного резонанса не выполняется ни в одном из исследованных режимов. Следовательно, нерезонансное решение (10) применимо во всех исследованных случаях. В то же время резонанс вещественных продольных волновых чисел может реализоваться в присутствии неровностей. Действительно, расстройки  $\sigma_r$ , соответствующие вихревой восприимчивости на гладкой поверхности (см. (7)), в режимах *R1*, *R2*, *R3* и *N1* составляли  $-0,076$ ,  $0,103$ ,  $-0,129$  и  $0,103$  рад/мм соответственно, т. е. были очень велики (с периодами соответствующих пространственных биений  $2\pi/\sigma_r = 83$ ,  $61$ ,  $49$  и  $61$  мм). Однако величины резонансных расстройек  $\sigma_{sr}$  составляли  $-0,0026$ ,  $-0,0054$ ,  $+0,0035$  и  $-0,030$  рад/мм в режимах *R1*, *R2*, *R3* и *N1* соответственно. Таким образом, в резонансных режимах *R1*, *R2* и *R3* условие резонанса  $\sigma_{sr} = 0$  действительно выполнялось на практике с большой точностью, приводя к продольным периодам пространственных биений  $\lambda_{bx} = 2\pi/\sigma_{sr} = 2417$ ,  $1164$ ,  $1795$  мм, что во много раз превышает длину всей области измерений (около

300 мм). В нерезонансном же режиме  $NI$  период биений составлял всего 210 мм, что даже меньше длины области измерений, и дополнительное усиление волн ТШ из-за механизма распределенной восприимчивости быстро (через 105 мм) сменялось в этом режиме подавлением их роста. Отметим также, что расстройки  $\sigma_{slr}$  имели во всех режимах большие (отрицательные) значения, очень далекие от резонанса (между 0,15 и 0,26 рад/мм).

Из этих результатов следует два основных вывода. Во-первых, в условиях данного эксперимента первый член в фигурных скобках в уравнении (10), соответствующий механизму вихревой восприимчивости на гладкой поверхности, всегда является нерезонансным. Во-вторых, однако, второй член в фигурных скобках в уравнении (10), соответствующий механизму восприимчивости вихрь–неровность, с первым сомножителем в квадратных скобках может соответствовать резонансу вещественных волновых чисел, поскольку величина расстройки  $\sigma_{sr}$  очень близка к нулю в режимах  $R1$ ,  $R2$  и  $R3$ .

## 6.2. Сравнительная эволюция возмущений пограничного слоя в экспериментах $DR$ и $S$

Кривые нарастания амплитуд и фаз возмущений, возбуждаемых вихрями в пограничном слое в экспериментах  $DR$ , приведены на рис. 13,  $a, b$ –16,  $a, b$  (точки 1, 2, 3, 5) для режимов  $R1$ ,  $R2$ ,  $R3$  и  $NI$  соответственно. Для сравнения на этих же рисунках показаны соответствующие кривые нарастания, полученные в экспериментах  $S$  для чистых волн ТШ (т. е. в отсутствие их распределенной генерации вихрями внешнего потока). Непосредственно измеренные величины показаны крестиками, а их аппроксимация экспонентами (для амплитуд) — толстыми кривыми. Начальные амплитуды и фазы чистых волн ТШ (при  $x = 450$  мм) сделаны, для удобства сопоставления, равными соответствующим величинам в эксперименте  $DR$ . Неровности поверхности показаны схематически внизу графиков. На рис. 13,  $c$ –16,  $c$  (точки 1) показаны соответствующие траектории в плоскости комплексной амплитуды возмущения (полученные в эксперименте  $DR$ ), где продольная координата играет роль параметра. Траектория имеет форму раскручивающейся вниз по потоку спирали.

Из рис. 13,  $a, b$ –16,  $a, b$  видно, что поведение возмущений, в особенности амплитуд, существенно отличается в экспериментах  $S$  и  $DR$ . В первом случае нарастание плавное, а во втором присутствуют биения по продольной координате. В резонансных режимах  $R1$ ,  $R2$  и  $R3$  (см. рис. 13,  $a$ –16,  $a$ ) амплитуды распределенно генерируемых волн пограничного слоя (эксперименты  $DR$ ) нарастают в среднем существенно быстрее, чем соответствующие чистые волны ТШ (эксперименты  $S$ ). Природа этих биений и отличие среднего нарастания от чистой волны ТШ связана с суперпозицией ранее возбужденной волны ТШ и волн, вновь возбуждаемых вихрями внешнего потока в каждой точке пространства. Причем в этом случае может работать как механизм вихревой восприимчивости на гладкой поверхности, так и механизм, связанный с присутствием периодической неровности (см. раздел 1). В то же время в нерезонансном режиме  $NI$  нарастание амплитуд в среднем (по периодам биений) одинаково в экспериментах  $DR$  и  $S$  (см. рис. 16,  $a$ ). Это факт показывает очень важную роль резонанса волновых чисел в механизме распределенной вихревой восприимчивости.

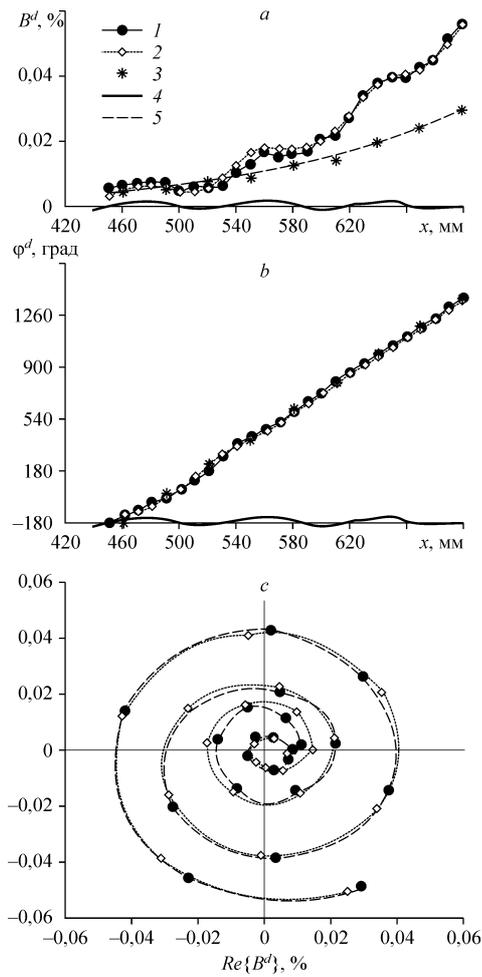


Рис. 13. Нарастание кривых амплитуд (а) и фаз (b) и траектория комплексной амплитуды (с) возмущений, возбуждаемых в пограничном слое в эксперименте DR в резонансном режиме R1 (1), и их аппроксимация решением (10) (2) в сравнении с кривыми для чистых волн ТШ (эксперимент S) (3); неровность 1 (4), экспоненциальная аппроксимация эксперимента S (5).

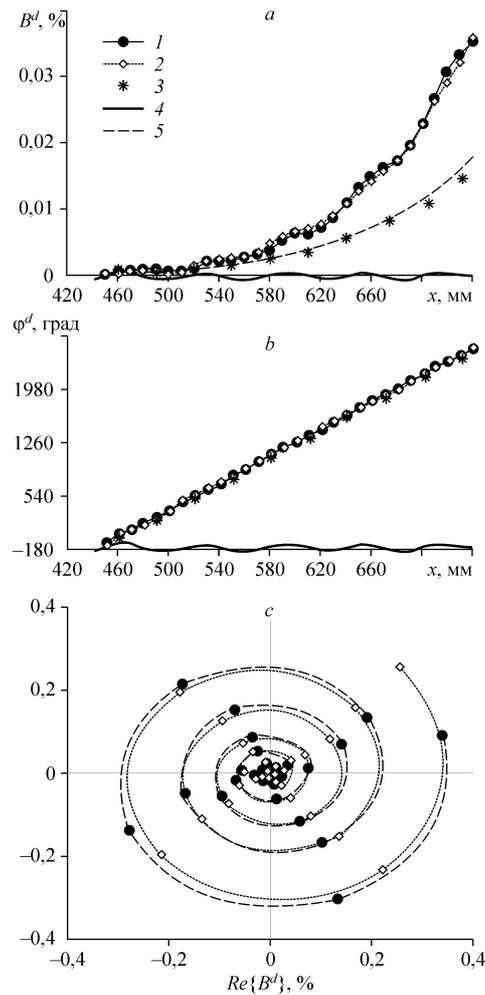


Рис. 14. То же, что на рис. 13, но в резонансном режиме R2.

### 6.3. Результаты аппроксимации экспериментальных распределений аналитическими решениями

Помимо полученных экспериментальных распределений на рис. 13, а, b, с–16, а, b, с (точки 2) приведены также результаты их аппроксимации аналитическим решением (10). Прежде всего, отметим, что весьма сложные кривые нарастания комплексных амплитуд волн пограничного слоя, найденные в эксперименте DR, действительно хорошо аппроксимируются указанным аналитическим решением. Это в равной степени относится как к амплитудам и фазам (см. рис. 13, а, b–16, а, b), так и к соответствующим траекториям в комплексной плоскости (см. рис. 13, с–16, с).

Все полученные амплитудные распределения (см. рис. 13, а–16, а) демонстрируют биения, связанные с нерезонансными членами, включающими в себя ненулевые расстройки  $\sigma_r$  (вихревая восприимчивость на гладкой поверхности),  $\sigma_{s1r}$

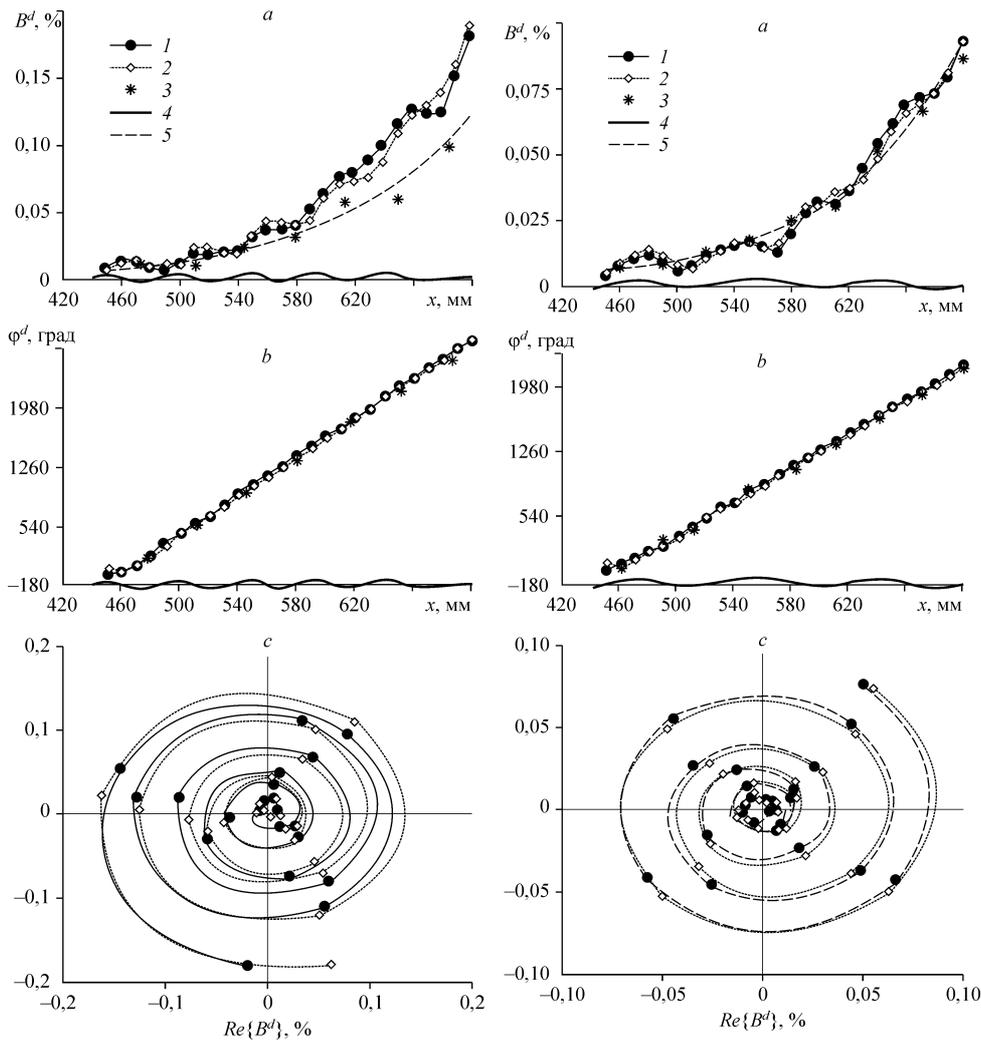


Рис. 15. То же, что на рис. 13 и 14, но в резонансном режиме R3.

Рис. 16. То же, что на рис. 13, 14 и 15, но в нерезонансном режиме N1.

(нерезонансный член восприимчивости вихрь-неровность) и  $\sigma_{sr}$  (только в режиме N1, см. рис. 16, а, также относящийся к восприимчивости вихрь-неровность). В среднем более быстрый рост амплитуд возмущений по сравнению с чистой волной ТШ, наблюдаемый в режимах R1, R2 и R3 (см. рис. 13, а–16, а), связан с резонансом волновых чисел  $\sigma_{sr} = 0$  в восприимчивости вихрь-неровность. Фазовые распределения (см. рис. 13, б–16, б) показывают во всех случаях средний наклон, соответствующий фазовой скорости, близкой к чистой волне ТШ, но несколько отклоняющейся от нее на отдельных участках.

#### 6.4. Коэффициенты распределенной вихревой восприимчивости пограничного слоя

Величины амплитуд и фаз коэффициентов распределенной вихревой восприимчивости пограничного слоя на гладкой поверхности ( $G_{v0}^d \delta_{1m}$  и  $\lambda_{v0}^d$ ) и в присутствии неровности ( $G_{vs0}^d \delta_{1m}$  и  $\lambda_{vs0}^d$ ), найденные экспериментально в данной работе с помощью процедуры аппроксимации, приведены на рис. 17 и 18 соответственно,

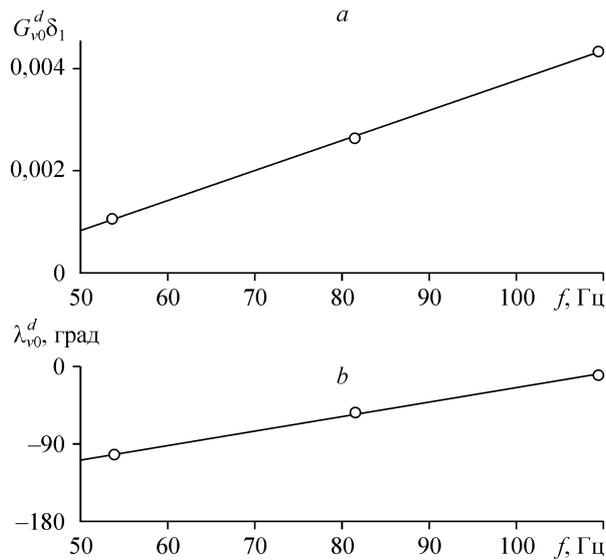


Рис. 17. Величины амплитуд (а) и фаз (b) коэффициентов распределенной вихревой восприимчивости на гладкой поверхности в зависимости от частоты возмущений.

Точки — эксперимент, линия — линейная аппроксимация.

в зависимости от частоты возмущений. Все амплитуды восприимчивости обезразмерены на среднюю (на участке измерения) величину толщины вытеснения пограничного слоя  $\delta_{1m} = 1,35$  мм.

Прежде всего видно, что амплитуда распределенной вихревой восприимчивости на гладкой поверхности ( $G_{v0}^d \delta_{1m}$ ) очень сильно зависит от частоты возмущения и увеличивается более чем в 4 раза при возрастании частоты от 53,7 до 109,1 Гц (см. рис. 17, а). Фаза ( $\lambda_{v0}^d$ ) коэффициента распределенной вихревой восприимчивости на гладкой поверхности (см. рис. 17, b) также возрастает с частотой примерно от  $-110$  до  $+10^\circ$ .

Частотная зависимость амплитуды коэффициента распределенной восприимчивости вихрь–неровность ( $G_{vs0}^d \delta_{1m}$ ) существенно слабее (см. рис. 18, а). В исследованном частотном диапазоне она увеличивается всего лишь на 50%. В то же

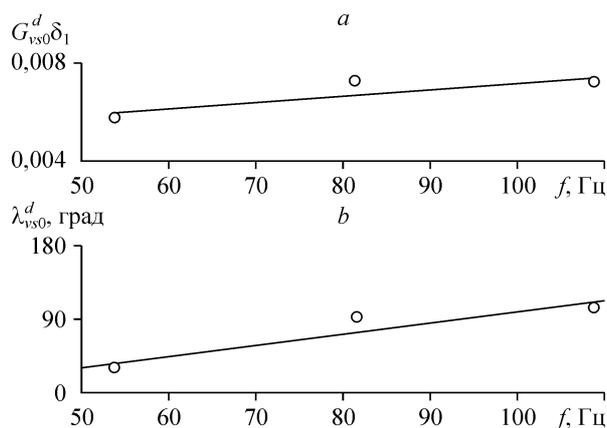


Рис. 18. Величины амплитуд (а) и фаз (b) коэффициентов распределенной восприимчивости вихрь–неровность в зависимости от частоты возмущений.

Точки — эксперимент, линия — линейная аппроксимация.

время фаза восприимчивости вихрь-неровность ( $\lambda_{vs0}^d$ ) нарастает с частотой примерно так же быстро, как и фаза восприимчивости на гладкой стенке (приблизительно на  $140^\circ$ ).

Полученные средние величины амплитуды восприимчивости на гладкой поверхности ( $G_{v0}^d \delta_{1m}$ ) заметно отличаются от величин амплитуды восприимчивости вихрь-неровность ( $G_{vs0}^d \delta_{1m}$ ). Однако в силу их различного определения (см. раздел 1.1) прямое сравнение этих двух амплитуд можно провести лишь при фиксированной безразмерной амплитуде неровности поверхности  $h_1$ . Пренебрегая слабой зависимостью безразмерной высоты неровности от  $x$ , пороговое (критическое) значение  $h_1 = h_{1k}$ , при котором вклад обоих механизмов восприимчивости в порождение волны ТШ сравнивается, можно оценить из соотношения  $G_{v0}^d = G_{vs0}^d h_{1k}$ , вытекающего из (1). В данном случае оказывается, что  $h_{1k}$  изменяется от 20 до 54 % от толщины вытеснения пограничного слоя  $\delta_1$  при увеличении частоты от 53,7 до 109,1 Гц. Что примерно соответствует размерным амплитудам неровности от 320 до 870 микрон. При меньших высотах неровностей преобладает восприимчивость на гладкой поверхности, а при больших — восприимчивость вихрь-неровность. Отметим, что в условиях данного эксперимента  $h_1 \approx 14,5\%$ , т. е. вклад восприимчивости вихрь-неровность в суммарный коэффициент восприимчивости (выражение в квадратных скобках в (1)) меньше вклада восприимчивости на гладкой поверхности.

В то же время, несмотря на указанное соотношение амплитуд вихревой восприимчивости на гладкой поверхности и восприимчивости вихрь-неровность, их роли в порождении волн ТШ заметно отличаются. Это отличие связано с существенно не резонансным характером возбуждения волн неустойчивости в первом случае и с возможностью резонансного возбуждения во втором. Дело в том, что коэффициенты распределенной вихревой восприимчивости  $\bar{G}_{v0}^d$  и  $\bar{G}_{vs0}^d$  являются, по определению, локальными по продольной координате свойствами исследуемого течения (см. раздел 1.1), в то время как свойство резонанса вообще и резонанса волновых чисел в частности проявляется лишь на конечных расстояниях  $\Delta x$ , сравнимых с длиной волны ТШ (или превосходящих ее). Резонанс продольных волновых чисел приводит к фазовой синхронизации волн неустойчивости, вновь генерируемых в каждой точке по  $x$ , с волной ТШ, порожденной этим же механизмом выше по потоку, обеспечивая, таким образом, эффективную подкачку энергии к возмущениям пограничного слоя и увеличение скорости их нарастания по сравнению с чистой волной ТШ (см. раздел 6.3). При этом резонанс не влияет на величины локальных коэффициентов порождения (т. е. коэффициентов распределенной восприимчивости  $\bar{G}_{v0}^d$  и  $\bar{G}_{vs0}^d$ ) в каждой точке пространства. Именно поэтому фактическое выполнение условия резонанса волновых чисел  $\sigma_{sr} = 0$  для восприимчивости вихрь-неровность в режимах  $R1$ ,  $R2$ , и  $R3$  приводит к существенному увеличению средней скорости нарастания волны ТШ (см. рис. 13,  $a-16, a$ ), в то время как нерезонансная восприимчивость на гладкой пластине способна приводить лишь к модуляции амплитуды возбуждаемой волны, но не способна изменить ее нарастание на больших интервалах продольной координаты (см. рис. 16,  $a$ ).

Представляет интерес сопоставление полученных величин коэффициентов вихревой восприимчивости с результатами других исследований.

Сравнение с результатами работы [1] показывает, что ориентация вектора завихренности течения оказывает весьма существенное влияние на распределенную вихревую восприимчивость пограничного слоя. В работе [1] ось вихревой дорожки

была ориентирована нормально к поверхности пластины, и амплитуды коэффициентов восприимчивости для двумерных возмущений получились равны  $G_{vs0}^d \delta_{1m} = 0,109$  и  $G_{vs0}^d \delta_{1m} = 0,162$ . Оба коэффициента намного (на 1–2 порядка) превосходят те, что получены в данной работе. Общим свойством является только меньшее значение амплитуды вихревой восприимчивости на гладкой поверхности по сравнению с амплитудой восприимчивости вихрь-неровность.

В экспериментах [10] исследовалась похожая задача вихревой восприимчивости, как локальной, так и распределенной. Однако, к сожалению, провести сравнение с результатами настоящего исследования не представляется возможным, т. к. глубокого анализа данных по распределенной вихревой восприимчивости в этой работе не проводилось, и соответствующие коэффициенты восприимчивости получены не были.

Отметим в заключение, что в рамках используемой модели восприимчивости (описанной в разделе 1), амплитуда  $G_{vs0}^d$  и фаза  $\lambda_{vs0}^d$  распределенной восприимчивости вихрь-неровность, а также эти параметры, определенные экспериментально, не зависят от высоты периодической неровности и от ее положения на поверхности модели.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты и выводы данного исследования:

1. Проведено прямое количественное экспериментальное исследование зависимости характеристик двумерной распределенной восприимчивости пограничного слоя к нестационарным вихревым возмущениям внешнего потока (с ориентацией вектора завихренности по размаху модели) в присутствии распределенной неровности поверхности от частоты вихрей и продольного масштаба неровности. Эксперименты выполнены в условиях контролируемых возмущений при возбуждении в потоке периодических вихревых дорожек, создании на поверхности обтекаемой модели (плоской пластины) контролируемых периодических неровностей и при возбуждении чистых волн Толлмина–Шлихтинга точечным источником;

2. Показано, что исследуемый пограничный слой с хорошей точностью соответствует пограничному слою Блазиуса как на гладкой стенке, так и в присутствии использованных малых неровностей поверхности;

3. На основе теоретического анализа указанной задачи даны определения коэффициентов распределенной вихревой восприимчивости двух типов: для гладкой поверхности и для взаимодействия вихрей с неровностью. Приведено общее аналитическое решение основного уравнения, описывающее развитие возмущений пограничного слоя, возбуждаемых вихрями внешнего потока с заданными (неизвестными в рамках анализа) параметрами восприимчивости, и описана методика нахождения коэффициентов распределенной вихревой восприимчивости течения по экспериментальным данным;

4. Для трех частот возмущений экспериментально найдены коэффициенты распределенной вихревой восприимчивости течения и для гладкой поверхности и для поверхности с неровностью. Обнаружено, что амплитуды обоих коэффициентов восприимчивости возрастают с увеличением частоты возмущений; наиболее сильное нарастание (более чем в 4 раза при увеличении частоты вдвое) обнаруживает амплитуда восприимчивости на гладкой поверхности. Фазы коэффициентов восприимчивости также увеличиваются с частотой (примерно одинаковым образом для указанных типов восприимчивости);

5. Показано, что наиболее эффективное порождение волн ТШ происходит за счет восприимчивости, связанной с рассеянием вихрей на неровностях поверхности, в случае присутствия резонанса продольных волновых чисел. В отсутствие

резонанса оба исследованных механизма восприимчивости приводят лишь к пространственным биениям амплитуды волны ТШ, не изменяя в среднем ее нарастания;

б. Сопоставление с результатами экспериментов работы [1] показало, что ориентация вектора завихренности возмущений в вихревой дорожке по размаху модели (как в настоящей работе) приводит к величинам коэффициентов распределенной вихревой восприимчивости пограничного слоя на один-два порядка меньшим, чем с нормальной к стенке ориентацией вектора завихренности.

Полученные количественные результаты могут быть использованы для верификации теорий двумерной распределенной вихревой восприимчивости и для оценки степени влияния вихревых возмущений внешнего потока на переход пограничного слоя к турбулентности.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бородулин В.И., Иванов А.В., Качанов Ю.С., Феденкова А.А.** Распределенная восприимчивость пограничного слоя к нестационарным вихревым возмущениям с нормальной к стенке завихренностью в присутствии неровностей поверхности // Теплофизика и аэромеханика. — 2004. — Т. 11, № 3. — С. 365–403.
2. **Качанов Ю.С., Козлов В.В., Левченко В.Я.** Возникновение турбулентности в пограничном слое. — Новосибирск: Наука, 1982. — 149 с.
3. **Kachanov Y.S.** Three-dimensional receptivity of boundary layers // Eur. J. Mech., B/Fluids. — 2000. — Vol. 19, No. 5. — P. 723–744.
4. **Borodulin V.I., Ivanov A.V., Kachanov Y.S., Komarova V.Y.** An experimental approach to investigation of distributed boundary-layer receptivity at scattering of non-stationary 2D free stream vortices on surface waviness // XII Intern. Conf. on Methods of Aerophysical Res. Proc. Part II. — Novosibirsk: Inst. Theor. & Appl. Mech., 2004. — P. 24–30.
5. **Wuerz W., Herr S, Wagner S., Kachanov Y.S.** A first experimental approach to the distributed 3D vortex receptivity of a boundary layer on an airfoil // XI Intern. Conf. on Methods of Aerophysical Res. Proc. Part 2. — Novosibirsk: Inst. Theor. & Appl. Mech., 2002. — P. 173–178.
6. **Понтрягин Л.С.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Москва: Наука, 1974. — 331 с.
7. **Kachanov Y.S., Michalke A.** Three-dimensional instability of flat-plate boundary layers: Theory and experiment // Eur. J. Mech. B/Fluids. — 1994. — Vol. 13, No. 4. — P. 401–422.
8. **Качанов Ю.С., Оболенцева Т.Г.** Развитие трехмерных возмущений в пограничном слое Блазиуса. 2. Характеристики устойчивости // Теплофизика и аэромеханика. — 1997. — Т. 4, № 4. — С. 403–415.
9. **Гилёв В.М., Качанов Ю.С., Козлов В.В.** Развитие пространственного волнового пакета в пограничном слое // Известия СО АН СССР. Сер. техн. наук. — 1983. — Вып. 3, № 13. — С. 27–37.
10. **Dietz A.J.** Local boundary-layer receptivity to a convected free-stream disturbances // J. Fluid Mech. — 1999. — Vol. 378. — P. 291–317.

*Статья поступила в редакцию 11 ноября 2005 г.*