

**К ОЦЕНКЕ РОЛИ ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ РАСЧЕТЕ ТЕПЛООБМЕНА
В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ**

С. С. Кутателадзе, А. И. Леонтьев, Н. А. Рубцов

(Новосибирск)

Интерес к исследованиям, учитывающим влияние теплового излучения на процессы теплообмена, за последнее время заметно увеличился в связи с все возрастающим практическим применением высокотемпературных процессов.

Излучение вносит в процесс теплообмена как прямой, так и косвенный вклад. Последний определяется влиянием излучения на температурное поле, а следовательно, и на процессы переноса тепла теплопроводностью и конвекцией.

Ниже дается оценка роли излучения при расчетах теплообмена в турбулентном пограничном слое высокотемпературного газа. При этом использованы относительные предельные законы теплообмена и трения турбулентного пограничного слоя сжимаемой жидкости [1].

Известно, что в ядре плоского турбулентного пограничного слоя плотность теплового потока по нормали к обтекаемой поверхности определяется выражением

$$q = -c_p \gamma \langle v_y \theta \rangle (1 - \beta_T) \quad (1)$$

где β_T — коэффициент, учитывающий влияние пульсаций плотности на турбулентный перенос тепла; $\langle v_y \theta \rangle$ определяется гипотезой Прандтля

$$\langle v_y \theta \rangle = l_T^2 \frac{\partial w_x}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2)$$

Здесь l_T — длина пути теплового смещения. При $c_p = \text{const}$ из (1) и (2) может быть получено искусственно выражение для суммарного, комбинированного критерия Стентона S , отображающего турбулентно-лучистый перенос тепла на стенку

$$S = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{1}{\Phi} l_T^2 \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} (1 - \beta_T) \quad (3)$$

Здесь

$$\omega = \frac{w_x}{w_0}, \quad \vartheta = \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0}, \quad \Phi = \frac{q}{q_1''} \quad (q_1'' = q_1 + E_1)$$

Индексы 0 и 1 обозначают значение величин соответственно в невозмущенном потоке и на стенке, q_1'' — общий (q_1 — конвекция и E_1 — излучение) поток на стенке, ρ , ρ_0 — плотность газов в пределах пограничного слоя и невозмущенного потока.

Анализируемый критерий S относится к значению критерия S_0 , подсчитанному в условиях обтекания пластины неизлучающим потоком с физическими параметрами, не изменяющимися по толщине пограничного слоя ($\rho = \rho_0$)

$$\frac{S}{S_0} = \frac{\rho}{\rho_0} l_T^2 \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)^2 \frac{1}{\varepsilon} (1 - \beta_T) \frac{1}{S_0 \Phi_0} \frac{\Phi_0}{\Phi}$$

Здесь ε — коэффициент неподобия полей температур и скоростей.

Это соотношение позволяет получить, так же как и в работе [1], для предельных переходов при $R \rightarrow \infty$ интегральные выражения

$$\Psi_s = \left(\int_0^1 \left(\frac{\rho \Phi_0}{\rho_0 \Phi \varepsilon} \right)^{1/2} d\vartheta \right)^2 \quad \text{или} \quad \int_0^1 \frac{d\vartheta}{V \Psi_s (\Phi / \Phi_0) (\rho_0 / \rho)} = 1 \quad \left(\Psi_s = \left(\frac{S}{S_0} \right)_{RT}^{**} \right) \quad (4)$$

позволяющие косвенно рассчитывать теплообмен на поверхности пластины, обтекаемой излучающим турбулентным потоком. Здесь Ψ_s — безразмерный параметр лучисто-конвективного теплообмена, R — число Рейнольдса.

Для установления влияния излучения на суммарный эффект переноса тепла следует отнести Ψ_s и Ψ_q , рассчитанному при тех же условиях, но без учета излучения. Роль излучения может быть оценена из следующего общего соотношения:

$$\frac{S}{S_q} = \frac{1}{\Psi_q} \left(\int_0^1 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \frac{\varphi_0}{\varphi} \right)^{1/2} d\theta \right)^2 \quad (5)$$

Критерий S дает результирующий эффект лучисто-конвективного теплового переноса, отображающий взаимодействие излучения с турбулентным переносом в пределах пограничного слоя. Это взаимодействие скрыто в безразмерном потоке тепла Φ . Анализ такого взаимодействия может быть проведен путем отнесения разности между S и S_q к лучистому критерию S_E

$$\frac{S - S_q}{S_E} = \frac{1}{\Psi_E} \left[\left(\int_0^1 \left(\frac{\rho \varphi_0}{\rho_0 \varphi} \right)^{1/2} d\theta \right)^2 - \Psi_q \right] \quad (6)$$

где

$$S_E = \frac{E_1}{c_p \gamma_0 w_0 (T_1 - T_0)}, \quad S_q = \frac{q_1}{c_p \gamma_0 w_0 (T_1 - T_0)}, \quad \Psi_p = \frac{S_q}{S_0}, \quad \Psi_E = \frac{S_E}{S_0}$$

Здесь Ψ_q и Ψ_E — безразмерные параметры соответственно турбулентного (без излучения) и лучистого теплообмена, q_1 и E_1 — турбулентный и лучистый результирующие потоки тепла на поверхности обтекаемой стенки.

Заметим, что Ψ_E и соответственно E_1 определяются существующими решениями относительно результирующей плотности излучения.

Применим эти соотношения к теплообмену на пластине, обтекаемой турбулентным потоком излучающего газа. Набегающий поток рассматривается как серая среда со средними интегральными, оптическими свойствами ($k = \alpha + \beta$, $\beta = 0$). Здесь k — коэффициент ослабления среды, складывающийся в общем случае из коэффициентов поглощения α и рассеяния β . Эти свойства среды считаются не зависящими от температуры ($k = \text{const}$). Поверхность пластины — серое тело, $A_1 = \text{const}$ при температуре $T_1 = \text{const}$. Невозмущенная часть потока за пределами пограничного слоя излучает как объемное серое тело $\epsilon_0 = \text{const}$, не отражающее со своей поверхности и находящееся при температуре невозмущенного потока, $T_0 = \text{const}$.

Как следует из соотношения (4), вычисление Ψ_s сопряжено с отысканием параметра φ_0 / φ , который является также неизвестным.

Как обычно, тепловой поток φ_0 аппроксимируем полиномом третьей степени

$$\varphi_0 = 1 - 3\xi_T^2 + 2\xi_T^3$$

коэффициенты которого определяются из граничных условий

$$\varphi = 0, \quad \partial \varphi / \partial \xi_T = 0 \quad \text{при } \xi_T = 1.0, \quad \varphi = 1 - \varphi_{1,E} \quad \text{при } \xi_T = 0 \quad (7)$$

и уравнения энергии

$$\partial \varphi / \partial \xi_T = - \partial \varphi_E / \partial \xi_T |_{\xi_T \approx 0} \quad (8)$$

в околостеночной области.

Искомый безразмерный параметр φ_0 / φ записывается следующим образом:

$$\frac{\varphi_0}{\varphi} = \left(1 - \varphi_{1,E} - \frac{\partial \varphi_E}{\partial \xi_T} \xi_T f(\xi_T) \right)^{-1} \quad (9)$$

Входящее в это выражение $\varphi_{1,E}$ и $\partial \varphi_E / \partial \xi_T$ определяются оптико-геометрическими и режимными параметрами излучающей системы и будут в общем случае функциями сложного вида. Их определение может быть проведено, исходя из общих выражений [2], для объемной (η) и поверхностной (E) плотностей результирующего излучения в некоторых точках соответственно объема V и поверхности F

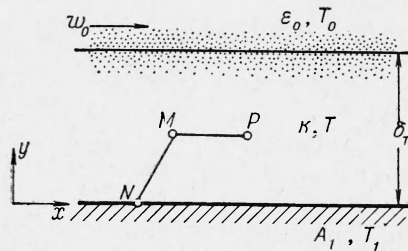
$$\begin{aligned} -\eta(M) &= \eta_-(M) - \alpha(M) \int_F \Gamma_1(M, N) E_-(N) dF_N - \\ &- \alpha(M) \int_V L_1(M, P) \eta_-(P) dV_P \quad (M \in U_V) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} E(M) &= A(M) \int_E A(N) \Gamma(M, N) E_0(N) dF_N + \\ &+ 4A(M) \int_V \alpha(P) L(M, P) E_0(P) dV_P - A(M) E_0(M) \quad (M \in U_F) \end{aligned}$$

Здесь

$$\eta_-(M) = 4\alpha(M) E_0(M), \quad E_0(M) = \sigma_0 T^4(M), \quad E_-(N) = A(N) E_0(N)$$

Через $\Gamma_1(M, N)$, $L_1(M, P)$, $\Gamma(M, N)$ и $L(M, P)$ в (8) обозначено разрешение ядра соответствующих интегральных уравнений излучения [2], имеющие физический смысл разрешающих угловых коэффициентов излучения между



Фиг. 1. Схема пограничного слоя

элементарными площадками в фиксированной точке M текущих точках N и P . В общем случае разрешающие угловые коэффициенты определяются интегральными соотношениями. В частном случае, когда излучающая система приближенно представлена плоскопараллельной схемой пограничного слоя (фиг. 1) с оптическими свойствами, указанными выше, может быть учтено лишь однократное отражение от поверхности диффузно излучающей пластины.

Указанные обстоятельства позволяют свести уравнения (10) к выражениям, записанным для условий околостеночной области

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial y} \Big|_{y \approx 0} &= 4\sigma_0 k T_1^4 - 2\sigma_0 k \varepsilon_0 [K_1(k\delta_T) - 2R_1 K_2(k\delta_T)] T_0^4 + \\ &+ 2\sigma_0 k^2 \int_0^{\delta_T} [\text{Ei}(-k\zeta) - 2R_1 K_1(k\zeta)] T^4(\zeta) d\zeta \quad (11) \\ E_1 &= -2\sigma_0 A_1 \varepsilon_0 K_2(k\delta_T) T_0^4 - \sigma_0 A_1 T_1^4 + 2\sigma_0 k A_1 \int_0^{\delta_T} K_1(k\zeta) T^4(\zeta) d\zeta \end{aligned}$$

Здесь использованы специальные функции [3] вида

$$K_1(x) = x \operatorname{Ei}(-x) + e^{-x}, \quad K_2(x) = \frac{1}{2} [xK_1(x) - e^{-x}]$$

$$\left(\operatorname{Ei}(-x) = - \int_x^\infty \frac{e^{-\xi}}{\xi} d\xi \right)$$

Ограничимся рассмотрением случая интенсивного теплообмена ($T_0 \gg T_1$). В связи с этим, уравнения (11) упрощаются и могут быть представлены в безразмерном виде

$$\varphi_{1,E} = - \frac{A_1 N}{S} \left[2\varepsilon_0 K_2(B) - 2B \int_0^1 K_1(B\xi) \vartheta^4(\xi) d\xi \right] \quad (12)$$

$$\frac{\partial \varphi_E}{\partial \xi_T} = \frac{2BN}{S} \left\{ \varepsilon_0 [K_1(B) + 2R_1 K_2(B)] - \right.$$

$$\left. - B \int_0^1 [\operatorname{Ei}(-B\xi) - 2R_1 K_1(B\xi)] \vartheta^4(\xi) d\xi \right\} \quad (13)$$

$$\left(N = \frac{\varepsilon_0 T_0^3}{c_p \gamma_0 W_0}, \quad B = kV_T \right)$$

Здесь B — критерий Бугера.

В соответствии с (9), (12) и (13) составляется соотношение φ / φ_0 . При этом, следуя работе [1], полагаем $f(\xi_T) \approx 1$ и ξ_T выражаем через ϑ посредством соотношения $\xi_T = \vartheta^7$ при значении числа Прайдтля $P = 1$. Подставляя значения ρ_0 / ρ и $\Psi_s \varphi / \varphi_0$ при $R_1 = 1 - A_1 \approx 0$, сводим решение задачи к отысканию Ψ_s из интегрального соотношения

$$\int_0^1 \{ \vartheta [\Psi_s + a(\xi) + b(\xi) \vartheta^7] \}^{-1/2} d\vartheta = 1 \quad (14)$$

Здесь

$$a(\xi) = \frac{2N}{S_0} \left[\varepsilon_0 K_2(B) - B \int_0^1 K_1(B\xi) \vartheta^4(\xi) d\xi \right]$$

$$b(\xi) = \frac{2BN}{S_0} \left[\varepsilon_0 K_1(B) - B \int_0^1 \operatorname{Ei}(-B\xi) \vartheta^4(\xi) d\xi \right] \quad (15)$$

Решение интегрального соотношения (14) относительно Ψ_s может быть получено приближенно, путем разложения подынтегральной функции в ряд. Вводя подстановку $\theta = \vartheta^7$, а затем разлагая подынтегральную функцию в биномиальный ряд относительно θ и интегрируя его почленно, уравнение (14) запишем в виде соотношения

$$(\Psi_s + a)^{-1/2} \left\{ 2 - \frac{1}{15} b (\Psi_s + a)^{-1} + \frac{3}{4 \cdot 29} b^2 (\Psi_s + a)^{-2} - \right.$$

$$\left. - \frac{5}{8 \cdot 43} b^3 (\Psi_s + a)^{-3} + \dots \right\} = 1$$

Анализируя постоянные ряда, представленного фигурными скобками, отмечаем, что $b \ll (\Psi_s + a)$. Это определяет быструю сходимость знакопеременного ряда. Ограничиваясь его первыми двумя членами, получаем

$$(\Psi_s + a)_{n+1} = [2 - 1/15 b (\Psi_s + a)_n^{-1}]^2 \quad (16)$$

Эта формула позволяет сравнительно просто определять численные значения Ψ_s методом последовательных приближений. Здесь n — порядок приближения.

Соотношение (16), представленное в каноническом виде

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0 \quad (B = 0)$$

позволяет в качестве первого приближения использовать приближенное решение, действительный корень которого $x_3 = A$ ($|A| = 2$). Это определяется тем, что [4]

$$|A| \gg E, \quad E^3 = C = x_1 x_2 x_3 = 1/15 b$$

Третье приближение ($n = 2$) позволяет получить решение (16) относительно $(\Psi_s + a)$ с точностью до четвертого знака. Входящие в (16) коэффициента $a(\zeta)$ и $b(\zeta)$ могут быть представлены в форме, весьма удобной для вычислений, если приближенно полагать $\vartheta(\zeta) \approx \zeta^{1/4}$. В действительности показатель степени при ζ меньше ($\vartheta = \zeta^{1/4}$). Однако в данном случае это не существенно в связи с тем, что при малых оптических плотностях пограничного слоя ($B < 0.4$) рассматриваемый член, отображающий роль собственного излучения пограничного слоя в переносе тепла на стенку, пренебрежим (< 0.2), а при больших оптических плотностях ($B > 0.4$) сказывается допущение $T_1 \ll T_0$. В общем же случае рассматриваемое приближение $\vartheta \approx \zeta^{1/4}$ несколько завышает собственное излучение пограничного слоя. Однако это позволяет осуществить линеаризацию подынтегральных функций и легко получить квадратуры соответствующих интегралов в выражениях для $a(\zeta)$ и $b(\zeta)$. Интеграл в первом равенстве (15) вычисляется следующим образом

$$B \int_0^1 K_1(B\zeta) \zeta d\zeta = \frac{1}{B} \int_0^B K_1(B\zeta) (B\zeta) d(B\zeta)$$

и, анализируя затем правый интеграл, имеем

$$\int_0^B K_1(x) x dx = e \int_0^B e^{-x} x dx + \int_0^B x^2 \text{Ei}(-x) dx$$

Известно [5], что

$$\begin{aligned} \int_0^B x^2 \text{Ei}(-x) dx &= - \int_0^B x^2 E_1(x) dx = \\ &= -2 \left\{ \frac{1}{3} - \left[\frac{B^2}{2} E_2(B) + B E_3(B) + E_4(B) \right] \right\} \end{aligned}$$

Используя далее соотношения между функциями $E_n(x)$ различных порядков

$$nE_{n+1}(x) = e^{-x} - xE_n(x)$$

получаем в окончательном виде

$$2 \frac{BN}{S_0} \int_0^1 K_1(B\zeta) \vartheta^4(\zeta) d\zeta \approx \frac{2N}{3BS_0} [1 - e^{-B} + 2BK_2(B)]$$

Аналогичным образом в (15) получаем

$$B \int_0^1 \text{Ei}(-B\zeta) \vartheta^5(\zeta) d\zeta \approx - \frac{1}{2B} [1 - e^{-B} - BK_1(B)]$$

