

УДК 621.396.96:621.26

## ИЗМЕРЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННОГО ПАРАМЕТРА СИГНАЛА ПРИ ВЫСОКОМ УРОВНЕ АДДИТИВНЫХ И МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ПОМЕХ

© В. М. Артюшенко<sup>1</sup>, В. И. Воловач<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>Технологический университет им. дважды Героя Советского Союза,  
лётчика-космонавта А. А. Леонова,

141070, г. Королёв Московской обл., ул. Гагарина, 42

<sup>2</sup>Поволжский государственный университет сервиса,  
445017, г. Тольятти, ул. Гагарина, 4

<sup>3</sup>Воронежский государственный университет,  
394018, г. Воронеж, пл. Университетская, 1

E-mail: artuschenko@mail.ru, volovach.vi@mail.ru

Рассмотрено и проанализировано влияние одновременно воздействующих аддитивных и флуктуационных мультипликативных помех с высоким уровнем на точность измерения информационного параметра сигнала. Получены выражения, определяющие условные вероятности правильного измерения информационного параметра и ложного отсчёта. Определены плотности вероятностей каналов для  $N$ -канального приёмника, рассмотрен частный случай двухканального приёмного устройства. Вероятность правильного измерения параметра при высоком уровне мультипликативных помех приближённо равна вероятности обнаружения сигнала в том канале, где присутствует неискажённая часть сигнала. Определено значение порогового напряжения  $N$ -канального приёмника, которое позволяет получить заданные вероятностные характеристики измерения. Получены зависимости, характеризующие вероятность правильного измерения от уровня неискажённой части сигнала, для случая колоколообразного распределения мощности флуктуаций искажённого сигнала по каналам приёмного устройства при различных ширине спектра функции помеховой модуляции и числе каналов приёмного устройства. Доказано, что в случае большого числа каналов или при симметричном относительно  $k$ -го канала распределении мощности флуктуаций помеховой составляющей сигнала, искажённого мультипликативной помехой, среднее значение ошибок измерения (ложных отсчётов) равно нулю, т. е. систематические ошибки измерения отсутствуют.

**Ключевые слова:** мультипликативная (модулирующая) помеха, аддитивная помеха, точность измерения, высокий уровень помех, вероятность правильного измерения, вероятность ложного отсчёта, интервал дискретности параметра.

DOI: 10.15372/AUT20240604

EDN: GKADMV

**Введение.** Как правило, в различных работах рассматривается задача оценки влияния флуктуационных мультипликативных (модулирующих) помех на точность измерения неэнергетических параметров сигнала при низком уровне аддитивных и мультипликативных помех [1–7 и др.]. Однако используемая при этом методика становится неприемлемой при высоком уровне помех в связи с резким изменением характера возможных ошибок.

Действительно, по мере увеличения уровня помех повышается вероятность появления больших «выбросов» выходного эффекта приёмника при значениях измеряемого параметра  $l$ , существенно отличающихся от его истинного значения  $l_0$ . Указанные выбросы могут быть обусловлены как аддитивными помехами, так и помеховой составляющей сигнала, появившейся вследствие действия мультипликативных помех.

Таким образом, при высоком уровне помех первой и основной является задача различения выброса, определяющего истинное значение параметра, среди ложных выбросов.

В данной постановке сформулированная задача близка к задаче оценки влияния помех на точность измерения дискретного параметра, который с равной вероятностью может принимать любое из  $N$  значений [8].

Цель представленной работы — оценить влияние одновременного воздействия аддитивных и мультипликативных помех, обладающих высоким уровнем, на точность измерения дискретного информационного параметра, принимающего с равной вероятностью любое из  $N$  возможных значений.

Будем полагать, что приёмное устройство оптимально при оценке неэнергетического информационного параметра  $l_0$  полезного сигнала  $s(t, l_0)$  со случайной начальной фазой  $\varphi_0$  и неизвестной амплитудой на фоне аддитивного белого шума  $n(t)$  с комплексной огибающей  $N'(t)$ .

Задача измерения дискретного параметра представляется более простой, поэтому позволяет получить решение при произвольном уровне помех, если сигналы, отличающиеся по измеряемому параметру на величину дискретности параметра  $\delta l$ , являются ортогональными:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} U'(l)U^*(l + m\delta l) dl \right|_{m \neq 0} = 2E|\rho'(m\delta l)|_{m \neq 0} = 0, \quad (1)$$

где  $E$  — энергия неискажённого сигнала  $u(t)$ ;  $\rho'(l)$  — функция автокорреляции сигнала по параметру  $l$ ;  $U'$  и  $U^*$  — комплексная огибающая и комплексно-сопряжённая огибающая сигнала соответственно.

Из ортогональности сигналов следует, что при отсутствии мультипликативных помех данный сигнал создаёт выходной эффект лишь в одном канале приёмного устройства, который в дальнейшем будем обозначать индексом  $k$ , все другие каналы — индексом  $m$ .

В случае отсутствия мультипликативных помех интервал дискретности параметра  $\delta l$ , при котором хотя бы приближённо выполняется соотношение (1), в практических задачах принимается равным ширине функции автокорреляции сигнала по параметру  $l$ . Это обусловлено тем, что реальные сигналы, как правило, не обеспечивают строгого выполнения условия (1), если  $\delta l$  меньше  $L$ , являющейся полной протяжённостью сигнала по параметру  $l$ . Если  $l$  — это время, то  $L$  — полная длительность сигнала; если  $l$  — частота, то  $L$  — ширина спектра сигнала.

В связи с этим на практике величину  $\delta l$  определяют из условия приблизительной ортогональности:  $|\rho'(\delta l)| \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — некий уровень отсчёта меньший единицы.

Чаще всего в качестве интервала  $\delta l$  принимают величину, равную эквивалентной протяжённости функции  $|\rho(l)|^2$  по параметру  $l$ :

$$\delta l = \int_{-\infty}^{\infty} |\rho'(l)|^2 dl.$$

При наличии флуктуационных мультипликативных помех в качестве интервала ортогональности  $\delta l$  естественно принять интервал корреляции флуктуаций сигнала на выходе линейной части приёмного устройства, который при сравнительно быстрых мультипликативных помехах практически равен ширине функции автокорреляции неискажённого сигнала.

В дальнейшем будем рассматривать именно этот случай.

Приведённая в данной работе модель приёмного устройства совпадает с моделью  $N$ -канального приёмника [8], причём сигналы на выходе смежных каналов как при наличии мультипликативных помех, так и в их отсутствие являются статистически независимыми.

В качестве измеряемого значения параметра в рассматриваемой модели приёмного устройства естественно принять значение, соответствующее тому каналу, в котором в момент измерения сигнал будет наибольшим.

Согласно [9], такое приёмное устройство по принятой реализации

$$y_{\text{вх}}(t) = s(t, l_0) + n(t)$$

образует функцию  $\Lambda(l)$ , равную логарифму функции правдоподобия

$$\Lambda(l) = \ln I_0[Z(l)],$$

где  $I_0(x)$  — функция Бесселя нулевого порядка мнимого аргумента;  $Z(l)$  — огибающая сигнала на выходе линейной части оптимального измерителя по параметру  $l$ , которая записывается в виде

$$Z(l) = \frac{1}{2} \left| \int_0^{T_{\text{н}}} N'(t) U_0(t, l) \exp \{-j\Phi(t, l)\} dt + \exp \{j\varphi_0\} \times \right. \\ \left. \times \int_0^{T_{\text{н}}} U(t, l_0) U_0(t, l) \exp \{j[\Phi(t, l_0) - \Phi(t, l)]\} dt \right|,$$

где  $T_{\text{н}}$  — интервал наблюдения;  $U(t, l_0)$  — информационный сигнал;  $U_0(t, l)$  — опорный сигнал;  $\Phi(t, l_0)$  — закон фазовой модуляции информационного сигнала;  $\Phi(t, l)$  — закон фазовой модуляции опорного сигнала.

Выражения для  $\Lambda(l)$  и  $Z(l)$  описывают структуру оптимального приёмного устройства для измерения одного информационного параметра сигнала со случайной начальной фазой на фоне аддитивных помех (рис. 1) [10], где  $\omega_c$  — частота сигнала.

Поступающая на вход многоканального приёмного устройства аддитивная смесь сигнала и помехи умножается на опорный сигнал с комплексной огибающей  $U'_0(t, l)$  со всеми возможными значениями параметра  $l$  и интегрируется линейной системой в течение времени наблюдения  $T_{\text{н}}$ .

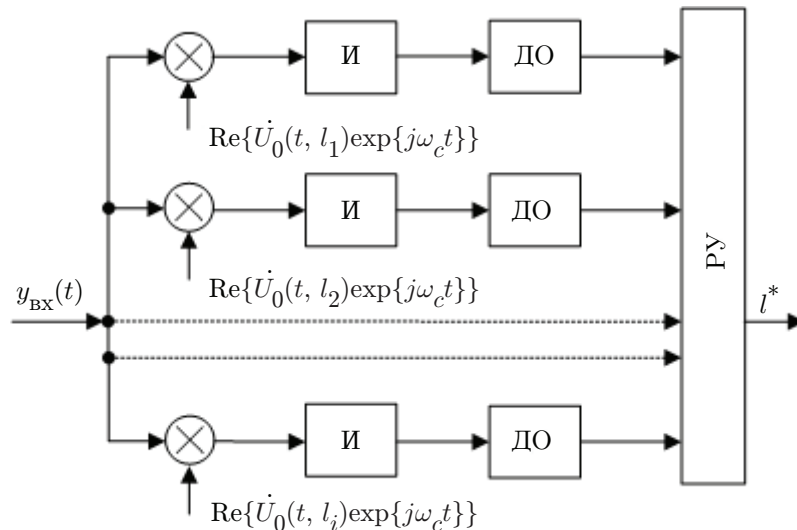


Рис. 1. Структурная схема оптимального приёмного устройства. Обозначения:  
И — интегратор, ДО — детектор огибающей, РУ — решающее устройство

После каждой линейной системы стоит детектор огибающей с характеристикой  $\ln I_0(Z)$ . Решающее устройство выбирает канал с тем значением параметра  $l$ , при котором функция  $\Lambda(l)$  достигает максимума.

Поскольку при наличии помех сигнал  $\Lambda(l)$  на выходе решающего устройства может иметь несколько пиков, то в качестве оценочного значения параметра принимается значение, соответствующее наибольшему из них. При низком уровне помех, надёжном измерении параметра пики, обусловленные наличием помех, с высокой вероятностью будут существенно меньше основного пика функции  $\Lambda(l)$ , сигнала на входе решающего устройства и поэтому не могут быть приняты за истинный сигнал. При этом влияние помех сведётся лишь к искажению формы основного пика.

В данном случае измеренное (оценочное) значение параметра  $l^*$  определяется как решение уравнения правдоподобия относительно измеряемого параметра  $l$  [9]:

$$\frac{d}{dl} \Lambda(l) = \frac{d}{dl} Z(l) = 0.$$

Решение данного уравнения при наличии амплитудных помех и вышеуказанные статистические характеристики ошибок измерения параметра (среднее значение и дисперсия) получены, в частности, в работе [9].

**Вероятность правильного измерения информационного параметра.** Пусть заранее известно, что сигнал присутствует, а истинное значение информационного параметра сигнала соответствует  $k$ -му каналу. Плотность вероятности выходного сигнала  $k$ -го канала обозначим  $p_k(Z)$ ,  $m$ -го канала —  $p_m(Z)$  ( $m \neq k$ ). Если сигнал на выходе  $k$ -го канала имеет значение  $Z$ , то условная вероятность того, что  $Z$  есть наибольший среди выходных сигналов, определяется выражением

$$P_{0k.z} = \prod_{i=1, i \neq k}^N \left[ 1 - \int_Z^\infty p_i(Z) dZ \right] = \prod_{i=1, i \neq k}^N [1 - D_{ik}(Z)], \quad (2)$$

где  $D_{ik}(Z)$  — вероятность обнаружения параметра  $l$  в  $k$ -м канале.

Вероятность правильного измерения параметра  $l$  при условии, что сигнал присутствует, с учётом (2) равна

$$P_{0k} = \int_0^\infty p_k(Z) \prod_{i=1, i \neq k}^N [1 - D_{ik}(Z)] dZ. \quad (3)$$

Вероятность того, что в качестве истинного будет принято значение параметра, соответствующее  $m$ -му каналу (вероятность ложного отсчёта), по аналогии с (3) определяется соотношением

$$P_{0m} = \int_0^\infty p_m(Z) \prod_{i=1, i \neq m}^N [1 - D_{im}(Z)] dZ, \quad (4)$$

где  $D_{im}(Z)$  — вероятность ложного отсчёта параметра  $l$  в  $m$ -м канале.

Приведённые выражения для вероятностей правильного измерения и ложных отсчётов справедливы при условии, что факт присутствия сигнала на входе приёмника установлен, т. е. вероятности  $P_{0k}$ ,  $P_{0m}$  являются условными. Однако в дальнейшем для краткости вместо термина «условная вероятность» будем использовать термин «вероятность».

Совокупность значений вероятностей правильного и ложных отсчётов даёт плотность вероятностей ошибок измерения дискретного параметра  $\Delta l = l^* - l_0$ ,

$$p(\Delta l) = P_{0k}\delta(0) + \prod_{m=1, m \neq k}^N P_{0m}\delta(k - m). \quad (5)$$

Систематическая ошибка измерения (смещение оценки) будет отсутствовать при выполнении следующих двух условий: плотность вероятностей ошибок измерения  $p(\Delta l)$  целиком лежит внутри интервала  $1 \leq |\Delta l|/\delta l \leq N$  и является симметричной функцией относительно  $l = k\delta l$ , т. е.  $p(\Delta l) = p(-\Delta l)$ .

При отсутствии систематической ошибки измерения дисперсия ошибок измерения с учётом (5) равна

$$\sigma_l^2 = \delta l^2 \sum_{m=1}^N (m - k)^2 P_{0m}. \quad (6)$$

Как уже отмечалось выше, рассматриваемая в данном исследовании модель приёмного устройства совпадает с моделью  $N$ -канального приёмника.

Воспользовавшись результатами [11], запишем, что плотности вероятностей выходных сигналов  $k$ -го и  $m$ -го каналов при наличии аддитивных и мультипликативных помех высокого уровня являются обобщённой рэлеевской и рэлеевской соответственно:

$$p_k(Z_M) = \frac{Z_M}{\sigma_k^2} \exp \left\{ -\frac{Z_M^2 + \alpha_0^2 E}{2\sigma_k^2} \right\} I_0 \left( \frac{\alpha_0 \sqrt{E}}{\sigma_k^2} Z_M \right), \quad (7)$$

$$p_m(Z_M) = \frac{Z_M}{\sigma_m^2} \exp \left\{ -\frac{Z_M^2}{2\sigma_m^2} \right\}, \quad (8)$$

где  $Z_M$  — выходной сигнал, подверженный мультипликативной помехе;  $\alpha_0$  — относительный уровень неискажённой части сигнала;  $\sigma_k^2$ ,  $\sigma_m^2$  — дисперсии сигнала  $k$ -го и  $m$ -го каналов.

Подставляя (7), (8) в (4)–(6), можно определить все величины, характеризующие точность измерения дискретного параметра при высоком уровне аддитивных и мультипликативных помех. Однако при большом числе каналов приёмного устройства непосредственно использовать приведённые соотношения крайне затруднительно. Поэтому прежде чем переходить к приближённому анализу общего случая, когда число каналов  $N$  велико, рассмотрим простейший случай двухканального приёмного устройства, когда измеряемый параметр имеет лишь два дискретных значения. Данный случай представляет интерес, например, при анализе влияния мультипликативных помех на системы связи с «активной паузой».

При  $N = 2$  из (3) имеем

$$P_{01} = \int_0^\infty p_1(Z_M)[1 - D_{21}(Z_M)] dZ_M,$$

где принято, что истинное значение параметра соответствует 1-му каналу; здесь  $D_{21}(Z)$  — вероятность обнаружения параметра  $l$  в 1-м канале при двухканальной схеме приёмного устройства.

После подстановки в последнее выражение функции  $p_1(Z_M)$  в виде (7) и функции  $D_{21}(Z_M)$  в виде

$$D_{21}(Z_M) = \int_{Z_M}^{\infty} \frac{Z}{\sigma_2^2} \exp \left\{ -\frac{Z^2}{2\sigma_2^2} \right\} dZ = \exp \left\{ -\frac{Z_M^2}{2\sigma_2^2} \right\}$$

с учётом табличного интеграла [11] получим для вероятности правильного измерения

$$P_{01} = 1 - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \exp \left\{ -\frac{\alpha_0^2 E}{2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2} \right\}. \quad (9)$$

Вероятность ложного отсчёта

$$P_{02} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \exp \left\{ -\frac{\alpha_0^2 E}{2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2} \right\}. \quad (10)$$

При большом числе каналов  $N$  для получения приближённых соотношений, определяющих вероятность правильного измерения в замкнутом виде, можно аппроксимировать функцию  $P_{0k.z} = \prod_{i=1, i \neq k}^N [1 - D_{ik}(Z)]$  ступенчатой функцией, как это предложено в [9]:

$$P_{0k.z} \simeq \begin{cases} 0, & Z < Z_{\Pi}; \\ 1, & Z > Z_{\Pi}, \end{cases} \quad (11)$$

где  $Z_{\Pi}$  — пороговое выходное напряжение.

Такая аппроксимация использована в [9] для случая измерения параметра сигнала на фоне аддитивной помехи в виде белого шума, когда параметры функций плотности вероятности выходных сигналов отдельных каналов одинаковы при всех  $m \neq k$ . В указанном случае аппроксимация (11) обеспечивает высокую точность определения вероятности  $P_{0k}$  уже при  $N = 16$ .

В рассматриваемом нами случае совместного действия аддитивных и мультипликативных помех параметры функции  $p_m(Z_M)$ , как правило, неодинаковы вследствие различного уровня мощности помеховой составляющей сигнала, искажённого мультипликативной помехой, в различных каналах. Однако приведённые ниже расчёты показывают, что при высоком уровне мультипликативных и аддитивных помех и большом числе каналов приёмного устройства изменения характера функции  $P_{0k.z}$ , связанные с тем, что параметры функции  $p_m(Z_M)$  неодинаковы, относительно невелики, и, следовательно, аппроксимация (11) может быть применена для приближённой оценки вероятности  $P_{0k}$ .

Подставляя (11) в (2), получим

$$P_{0k} \simeq \int_{Z_{\Pi}}^{\infty} p_k(Z_M) dZ_M = D_{m.k}(Z_{\Pi}), \quad (12)$$

где  $D_{m.k}(Z_{\Pi})$  — вероятность обнаружения сигнала в  $k$ -м канале при пороге, равном  $Z_{\Pi}$ .

Таким образом, вероятность правильного измерения параметра при высоком уровне мультипликативных помех приближённо равна вероятности обнаружения сигнала в том канале, где присутствует неискажённая часть сигнала при пороге, равном  $Z_{\Pi}$ .

При принятых в данной работе условиях после подстановки (7) в (12) получим следующее выражение для вероятности правильного измерения:

$$P_{0k} \simeq Q(q_m, q_{\Pi.m}), \quad (13)$$

где  $Q(x, y) = \int_y^\infty Z \exp \left\{ -\frac{Z^2 + x^2}{2} \right\} I_0(Zx) dZ$  —  $Q$ -функция;  $q_m = \alpha_0 q / \sqrt{1 + \delta_{k1}^2}$ ;  $q_{п.м} = q_{п.} / \sqrt{1 + \delta_{k1}^2 q^2}$ ;  $q = \sqrt{2E/N_0}$ ;  $q_{п.} = Z_{п.} / \sqrt{N_0/2}$ ;  $N_0$  — спектральная плотность шума.

Значение функции  $\delta_{k1}^2$  полностью определяется формой сигнала и функцией помеховой модуляции (ФПМ) и даёт значение нормированной мощности помеховой составляющей на выходе линейной части  $k$ -го канала приёмника.

Используем введённую аппроксимацию (11) для приближённого определения вероятностей ложных отсчётов.

$$\text{Обозначим } P_{0m.z} = \prod_{i=1, i \neq m}^N [1 - D_{ik}(Z)].$$

Тогда

$$P_{0m.z} = [1 - D_{kk}(Z)][1 - D_{mk}(Z)]^{-1} P_{0k.z}. \quad (14)$$

С учётом введённой аппроксимации для  $P_{0k.z}$  (11)

$$P_{0m.z} \approx \begin{cases} 0, & Z < Z_{п.}; \\ [1 - D_{kk}(Z)][1 - D_{mk}(Z)]^{-1}, & Z > Z_{п.} \end{cases} \quad (15)$$

Для дальнейших расчётов используем разложение входящей в (15) функции  $[1 - D_{mk}(Z)]^{-1}$  в ряд по степеням  $D_{mk}(Z)$ .

Опуская громоздкие промежуточные вычисления, получаем, что вероятность ложных отсчётов может быть найдена исходя из выражения:

$$\begin{aligned} P_{0m} \simeq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{1+i^2} \exp \left\{ -\frac{q_{п.}^2(1+i^2)}{2(1+q^2\delta_{m1}^2)} \right\} - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{1+i^2} \left[ Q(q_m, q_{п.м}) \exp(-a_i q_{п.м}^2) - \right. \\ \left. - \frac{1}{1+2a_i} Q\left(\frac{q_m}{\sqrt{1+2a_i}}, q_{п.м}\sqrt{1+2a_i}\right) \exp\left\{ -\frac{q_m^2 a_i}{1+2a_i} \right\} \right], \end{aligned} \quad (16)$$

$$\text{где } a_i = \frac{1+i^2}{2} \frac{1+q^2\delta_{k1}^2}{1+q^2\delta_{m1}^2} = \frac{q_{п.}^2}{q_{п.м}^2} \frac{1+i^2}{2(1+q^2\delta_{m1}^2)}.$$

Ряд (16) даёт точное выражение для  $P_{0m}$  при принятой аппроксимации функции  $P_{0m.z}$  (15), однако при этом оказывается достаточно сложным.

При большом числе каналов приёмного устройства функция  $D_{mk}(Z)$  при  $Z \geq Z_{п.}$  много меньше единицы. Тогда в рядах (16) можно учитывать лишь члены с  $i = 0$ .

Полагая  $i = 0$ , из (16) получим

$$\begin{aligned} P_{0m} \simeq \exp \left\{ -\frac{q_{п.}^2}{2(1+q^2\delta_{m1}^2)} \right\} [1 - Q(q_m, q_{п.м})] + \\ + \frac{1}{1+2a_0} Q\left(\frac{q_m}{\sqrt{1+2a_0}}, q_{п.м}\sqrt{1+2a_0}\right) \exp \left\{ -\frac{q_m^2 a_0}{1+2a_0} \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Возможен также другой подход к получению приближённого выражения для  $P_{0m}$ . Воспользуемся тем обстоятельством, что при малых значениях вероятности правильного обнаружения (меньших 0,3–0,4) и относительно больших вероятностях ложной тревоги

( $10^{-3}$ – $10^{-1}$ ) кривые обнаружения сигнала со случайной начальной фазой, которые определяются формулой, аналогичной (13), весьма близки к кривым обнаружения сигнала со случайной начальной фазой и флуктуирующей по рэлеевскому закону амплитудой [12].

Воспользовавшись результатами [12], получим следующее соотношение для приближённого определения  $P_{0m}$ :

$$P_{0m} \simeq \exp \left\{ -\frac{q_{\Pi}^2}{2(1 + q^2 \delta_{m1}^2)} \right\} \left[ 1 - \frac{P_{0k}}{1 + (1 + q^2 \delta_{m1}^2)/(1 + q^2 \delta_{k1}^2)(1 + q_m^2/2)} \right]. \quad (18)$$

Дальнейшее упрощение (18) можно провести в случае очень сильных мультипликативных помех, когда  $P_{0k} \ll 1$ . При этом

$$P_{0m} \simeq D_{mk}(Z_{\Pi}) = \exp \left\{ -\frac{q_{\Pi}^2}{2(1 + q^2 \delta_{m1}^2)} \right\}, \quad (19)$$

а относительная величина ошибки, допускаемой при замене (18) на (19), не превышает  $P_{0k}$ .

Найдём величину  $Z_{\Pi}$ , входящую в (11) и последующие соотношения. В [9] она определяется исходя из соотношения

$$P_{0k.z}(Z_{\Pi}) = 0,5. \quad (20)$$

При больших значениях вероятности правильного измерения параметра такой способ определения  $Z_{\Pi}$  даёт, как видно из приведённых в [9] данных, достаточно точные результаты. При малых же значениях  $P_{0k}$ , которые могут иметь место при высоком уровне мультипликативных и аддитивных помех, используемое соотношение (20) приводит к существенным неточностям при оценке значений  $P_{0k}$ ,  $P_{0m}$ .

Можно показать, что в случае, когда вероятности получения всех значений отсчёта параметра одинаковы, что может иметь место в отсутствие мультипликативных помех при  $q^2 \rightarrow 0$ , а при наличии мультипликативных помех при  $\alpha_0^2 \rightarrow 0$ ,  $\sigma_k^2 = \sigma_m^2 = \text{const}$ , данный способ определения  $Z_{\Pi}$  даёт значение этих вероятностей, равное  $0,69/(N-1)$ , вместо истинного значения  $1/N$ , сумма вероятностей равна  $0,69/(N-1)$  вместо единицы.

Целесообразно определить  $Z_{\Pi}$  из очевидного условия: при одинаковой вероятности получения всех  $N$  значений отсчёта параметра вероятность каждого значения должна составлять  $1/N$ . Исходя из этого и учитывая соотношение (19), которое в данном случае при  $\alpha_0^2 \rightarrow 0$ ,  $\sigma_k^2 = \sigma_m^2 = \text{const}$  будет достаточно точным, получим следующее соотношение для определения  $Z_{\Pi}$  в этом случае:

$$P_{0k.z}(Z_{\Pi}) = [1 - D_{mk}(Z_{\Pi})]^{N-1} = \left( \frac{N-1}{N} \right)^{N-1}. \quad (21)$$

При большом числе каналов  $\left( \frac{N-1}{N} \right)^{N-1} \simeq \frac{1}{e}$ , и соотношение (21) будет

$$P_{0k.z}(Z_{\Pi}) = \left( \frac{N-1}{N} \right)^{N-1} \simeq \frac{1}{e}. \quad (22)$$

В общем случае с учётом (2) вместо (21) следует записать

$$\prod_{i=1, i \neq k}^N [1 - D_{ik}(Z_{\Pi})] = \left( \frac{N-1}{N} \right)^{N-1}. \quad (23)$$



Отметим, что при больших значениях вероятности правильного определения параметра применение соотношения (21) даёт практически такие же результаты, как и (20). Так, например, при  $q^2 = 10$  и  $N = 16$  с использованием (21) получаем  $P_{0k} = 0,78$ , а с использованием (20)  $P_{0k} = 0,76$ .

Учитывая, что при большом числе каналов  $D_{mk}(Z_{\Pi}) \simeq P_{0m} \ll 1$  при любых  $m$  и что при этом условии  $\ln [1 - D_{mk}(Z_{\Pi})] \simeq -D_{mk}(Z_{\Pi})$ , получим из (23)

$$\sum_{m=1, m \neq k}^N D_{mk}(Z_{\Pi}) = (N-1) \ln \frac{N}{N-1}. \quad (24)$$

В качестве примера использования приведённых выше соотношений рассмотрим случай, когда величина  $\delta_{m1}^2$ , определяющая мощность помеховой составляющей на выходе линейной части приёмного устройства в  $m$ -м канале, изменяется в соответствии с кривой колоколообразной формы

$$\delta_{m1}^2 = \chi \exp \{-b^2(m-k)^2\}, \quad (25)$$

где  $\chi, b$  — коэффициенты, определяющие форму колоколообразной кривой.

Такая форма зависимости  $\delta_{m1}^2$  от номера канала имеет место при колоколообразном спектре функции помеховой модуляции для случаев измерений частоты сигнала произвольной формы и времени прихода частотно-модулированного сигнала, а также в ряде других случаев.

В случае измерения частоты радиосигнала при  $\xi = \Delta\Omega_M T / (2\pi) = \Delta F_M T \gg 1$  (где  $\xi$  — параметр, характеризующий отношение ширины спектра ФПМ к ширине спектра, огибающей сигнала;  $\Delta\Omega_M, \Delta F_M$  — ширина энергетического спектра ФПМ;  $T$  — длительность сигнала), опуская промежуточные выкладки, имеем

$$\delta_{m1}^2 = \delta_{k1}^2 \exp \left\{ -\frac{\pi \delta\Omega^2 (m-k)^2}{\Delta\Omega_M^2} \right\} = \delta_{k1}^2 \exp \left\{ -\frac{\pi (m-k)^2}{\xi^2} \right\}, \quad (26)$$

где  $\delta\Omega$  — частотный интервал между каналами, причём принято, что  $\delta\Omega = 2\pi/T$ .

В случае измерения времени прихода частотно-модулированного сигнала с девиацией частоты  $\Delta\omega_d$  при  $3 \ll \xi \ll Q_y$  и  $\Omega = 0$  после необходимых преобразований имеем

$$\delta_{m1}^2 = \delta_{k1}^2 \exp \left\{ -\frac{\pi}{\Delta\Omega_M^2} \left[ \frac{\Delta\omega_d}{T} \delta\tau (m-k)^2 \right] \right\} = \delta_{k1}^2 \exp \left\{ -\frac{\pi (m-k)^2}{\xi^2} \right\}, \quad (27)$$

где  $\delta\tau$  — временной интервал между каналами, который принят равным  $T/Q_y$ ,  $Q_y = \Delta\omega_d T / (2\pi)$ .

Как видно из (26), (27), в обоих случаях величина  $\delta_{m1}$  определяется одинаковыми зависимостями.

Для вычисления всех величин, характеризующих точность измерения дискретного параметра, необходимо прежде всего найти пороговое значение  $Z_{\Pi}$  (или  $q_{\Pi}$ ), которое с учётом (26), (27) и (24) определяется из соотношения

$$\sum_{m=1, m \neq k}^N \exp \left\{ -\frac{q_{\Pi}^2}{2 + 2q^2 \delta_{k1}^2 \exp \{-\pi(m-k)^2/\xi^2\}} \right\} = (N-1) \ln \frac{N}{N-1}. \quad (28)$$

Соотношение (28) является сложным, однако, по крайней мере, в двух случаях оно может быть существенно упрощено.

Пусть функция  $\exp \{-\pi(m-k)^2/\xi^2\}$  мало изменяется на интервале  $|m-k| < N$ . Данный случай представляет самостоятельный интерес. Он может иметь место при условии, что  $\xi > N$ , т. е. при достаточно быстрых мультипликативных помехах, когда мощность флуктуаций, обусловленных наличием мультипликативных помех, приблизительно одинакова во всех каналах вне зависимости от формы энергетического спектра ФПМ.

Учитывая, что в данном случае показатель экспоненты в (28) не зависит от  $m$  и равен  $q_{\text{п.}m}^2/2$ , получим следующее соотношение для определения  $q_{\text{п.}m}$ :

$$q_{\text{п.}m}^2 = -2 \ln \left( \ln \frac{N}{N-1} \right). \quad (29)$$

Можно показать, что в отсутствие мультипликативных помех ( $\delta_{k1}^2 = 0$ ) параметр  $q_{\text{п}}$  равен  $q_{\text{п.}m}$  и определяется формулой (29).

С учётом (29) вероятность правильного измерения параметра и вероятности ложных отсчётов, одинаковые в данном случае для всех каналов, равны

$$P_{0k} = Q \left[ \frac{\alpha_0^2 q}{\sqrt{1 - q^2 \delta_{k1}^2}}, \sqrt{-2 \ln \left( \ln \frac{N}{N-1} \right)} \right], \quad P_{0m} = \frac{1 - P_{0k}}{N-1}. \quad (30)$$

Выше при получении приведённых соотношений для  $P_{0m}$  было принято, что эквивалентная вероятность ложной тревоги, соответствующая вероятности правильного измерения параметра  $P_{0k}$ , имеет порядок  $1/N$ . Докажем это, исходя из (30).

Известно, что при вероятности правильного обнаружения, определяемой  $Q$ -функцией  $Q(x, y)$ , вероятность ложной тревоги равна  $Q(0, y) = \exp \{-y^2/2\}$ , т. е. в нашем случае равна  $\exp \left\{ -\ln \left( \ln \frac{N}{N-1} \right) \right\}$ . При  $N \gg 1$   $\ln \frac{N}{N-1} \simeq \frac{1}{N}$ , что и требовалось доказать.

На рис. 2 приведены зависимости вероятности правильного измерения  $P_{0k}$  и ложных отсчётов  $P_{0m}$  параметра от относительного уровня неискажённой части сигнала при

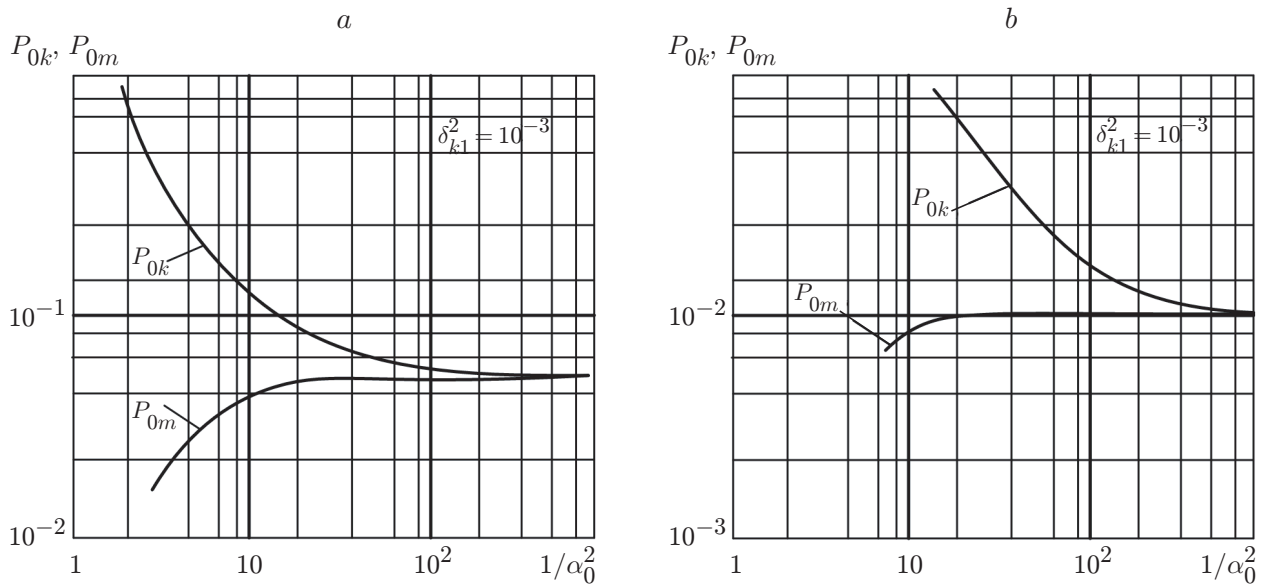


Рис. 2. Зависимости вероятности правильного измерения и ложных отсчётов информационного параметра от относительного уровня неискажённой части сигнала: а — при  $N = 20$ ; б — при  $N = 100$

одинаковой мощности помеховой составляющей во всех каналах приёмного устройства ( $\delta_{k1} = \delta_{m1} = \text{const}$ ) для вероятности правильного измерения параметра в отсутствие мультипликативных помех  $P_{0k,a}$ , равной 0,99, и при различном числе каналов приёмного устройства  $N$ .

Упрощение формулы (28) возможно также в случае, когда  $\xi^2 \gg 1$ , но  $\xi^2 \gg N^2$ , т. е. когда число каналов, в которых присутствует помеховая составляющая, мало по сравнению с общим числом каналов. В данном случае экспоненту в знаменателе (28) можно заменить эквивалентным по площади прямоугольником. Ширина этого прямоугольника, как нетрудно видеть, равна  $\xi$ . С учётом сделанных предположений (28) приобретает вид

$$(N - \xi) \exp \left\{ -\frac{q_{\Pi}^2}{2} \right\} + (\xi - 1) \exp \left\{ -\frac{q_{\Pi}^2}{2(1 + q^2 \delta_{k1}^2)} \right\} = (N - 1) \ln \frac{N}{N - 1}.$$

При  $N \gg 1$   $(N - 1) \ln \frac{N}{N - 1} \simeq 1$ , тогда

$$(N - \xi) \exp \left\{ -\frac{q_{\Pi}^2}{2} \right\} + (\xi - 1) \exp \left\{ -\frac{q_{\Pi}^2}{2(1 + q^2 \delta_{k1}^2)} \right\} = 1. \quad (31)$$

Пределы применимости соотношения (31) можно установить путём сравнения результатов расчётов вероятностей  $P_{0k}$ ,  $P_{0m}$  при колоколообразном распределении мощности флуктуаций по каналам, полученным на основе точного соотношения (28) и приближённого (31). Такие расчёты показали, что уже при отношении  $\xi/N \leq 0,5$  ошибка в вычислении  $P_{0k}$ , связанная с использованием приближённой формулы, составляет единицы процентов.

На рис. 3 приведены зависимости вероятности правильного измерения  $P_{0k}$  от уровня неискажённой части сигнала для случая колоколообразного распределения мощности флуктуаций искажённого сигнала по каналам приёмного устройства при различных ширине спектра ФПМ (её определяет параметр  $\xi$ ) и числе каналов приёмного устройства.

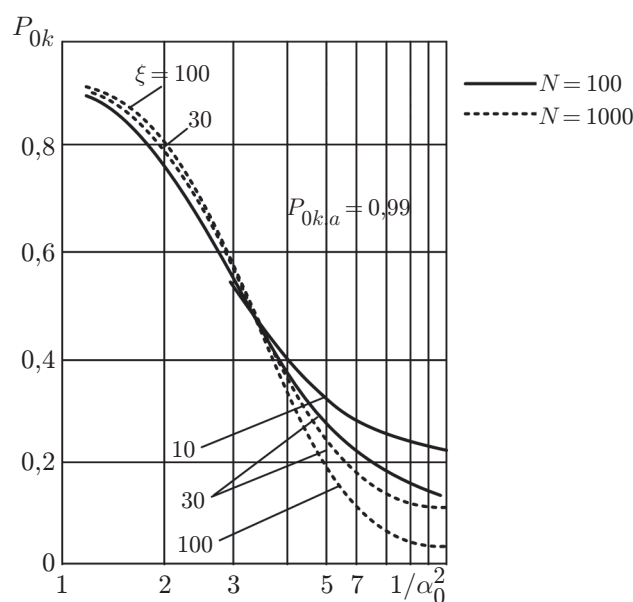


Рис. 3. Зависимости вероятности правильного измерения информационного параметра от уровня неискажённой части сигнала

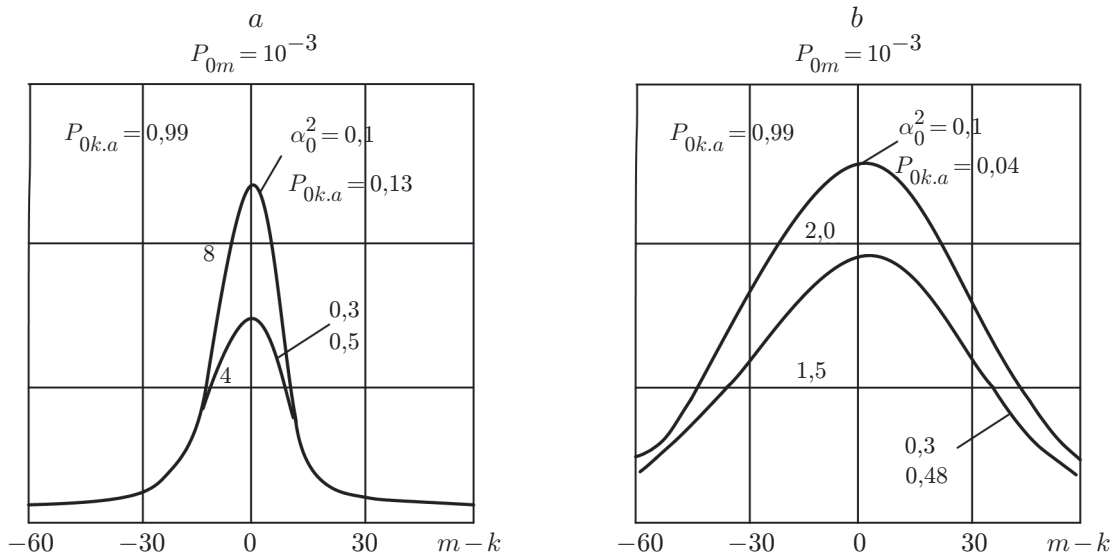


Рис. 4. Распределения вероятностей ложных отсчётов: *a* — при  $N = 100$ ,  $\xi = 30$ ; *b* — при  $N = 1000$ ,  $\xi = 100$

На рис. 4 проиллюстрированы распределения вероятностей ложных отсчётов по каналам приёмного устройства. При расчётах предполагалось, что мультипликативные помехи не изменяют средней мощности сигнала, т. е.  $\delta_{k1}^2 \simeq (2 - \alpha_0^2)/2\xi$ .

Как следует из рис. 4, в случае большого числа каналов ( $N \gg \xi$ ) или при симметричном относительно  $k$ -го канала ( $k = N/2$ ) распределении мощности флуктуаций помеховой составляющей сигнала, искажённого мультипликативной помехой, среднее значение ошибок измерения (ложных отсчётов) равно нулю, т. е. систематические ошибки измерения отсутствуют, и дисперсия ошибок измерения может быть вычислена по формуле (6).

В рассматриваемом примере параметры функции распределения выходного эффекта  $p_m(Z_m)$  (8) резко отличаются в разных каналах. Поэтому данный случай является весьма характерным для оценки применимости ступенчатой аппроксимации функции  $P_{0k.z}$  (11) при неодинаковых параметрах функции  $p_m(Z_m)$ .

В этих целях представляет интерес сравнение вида функции  $P_{0k.z}$ , которая получается в рассматриваемом примере, с аналогичной функцией для случая, когда параметры распределений  $p_m(Z_m)$  во всех каналах одинаковы.

На рис. 5 приведены графики функции  $P_{0k.z}$  для этих двух случаев при одинаковых значениях уровня неискажённой части сигнала  $\alpha_0^2 = 10^{-2}$ .

Кривая 1, соответствующая колоколообразному закону изменения  $\delta_{m1}^2$  по каналам, рассчитана по формуле

$$P_{0k.z} = \sum_{m=1, m \neq k}^N \left[ 1 - \exp \left\{ - \frac{Z^2}{N_0} \frac{1}{1 + q^2 \delta_{k1}^2 \exp \{ -\pi(m-k)^2/\xi^2 \}} \right\} \right],$$

при  $\xi = 11$ ,  $\delta_{k1}^2 = (1 - \alpha_0^2)/(2\xi)$ . Кривая 2, соответствующая случаю  $\delta_{m1}^2 = \text{const}$ , рассчитана по формуле

$$P_{0k.z} = \left[ 1 - \exp \left\{ - \frac{Z^2}{N_0} \frac{1}{1 + q^2 \delta_{k1}^2} \right\} \right]^{N-1},$$

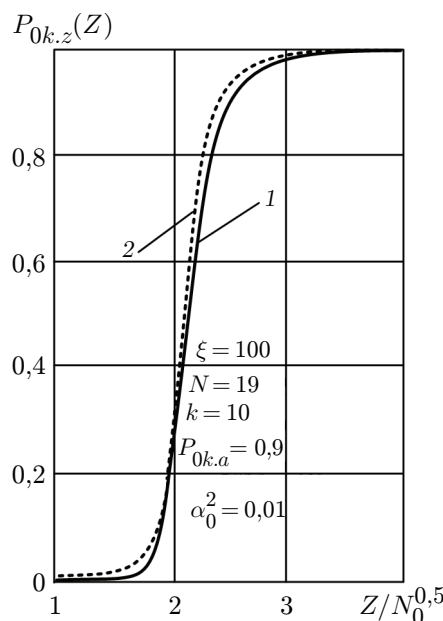


Рис. 5. Графики функции  $P_{0k.z}$  в зависимости от  $Z/N_0^{0,5}$ : 1 —  $\delta_{m1}^2$  изменяется по колоколообразному закону; 2 —  $\delta_{m1}^2 = \text{const}$

причём величина  $\delta_{k1}^2$  выбрана из условия равномерного распределения мощности помеховой составляющей по всем каналам:

$$\delta_{k1}^2 = \frac{1 - \alpha_0^2}{2N}.$$

Как видно из рис. 5, кривые 1 и 2 весьма близки, хотя при тех значениях параметров  $(\xi, N)$ , которые были использованы при построении кривой 1, неравномерность значений  $\delta_{m1}^2$  в различных классах весьма велика, так как эквивалентная ширина области, занимаемой флюктуациями искажённого сигнала, составляет лишь около 0,6 от общего числа каналов.

В итоге различие значений  $\delta_{m1}^2$  в отдельных каналах оказало малое влияние на характер кривой  $P_{0k.z}$ . Очевидно, это влияние будет ещё меньше при  $\xi/N \ll 1$ . Следовательно, принятая нами ступенчатая аппроксимация (11) функции  $P_{0k.z}$  при существенных отличиях параметров функции распределения  $p_m(Z_m)$  в различных каналах так же правомерна, как и при одинаковых параметрах, когда  $p_m(Z_m) = \text{idem}$ .

**Закключение.** Таким образом, осуществлён анализ измерения информационного параметра сигнала при высоком уровне аддитивных и мультипликативных помех.

Показано, что по мере увеличения уровня помех повышается вероятность появления больших «выбросов» выходного эффекта приёмника, обусловленных как аддитивными помехами, так и помеховой составляющей сигнала, появившейся вследствие действия мультипликативных помех при значениях измеряемого параметра, существенно отличающихся от истинного значения. Основной задачей при высоком уровне помех является различение выброса среди ложных выбросов, определяющего истинное значение параметра.

Получены выражения для вероятностей правильного измерения и ложных отсчётов. Отмечается, что вероятность правильного измерения параметра при высоком уровне мультипликативных помех приближённо равна вероятности обнаружения сигнала в том канале, где присутствует неискажённая часть сигнала.

Определено, что при малых значениях вероятности правильного обнаружения (меньших 0,3–0,4) и относительно больших вероятностях ложной тревоги ( $10^{-3}$ – $10^{-1}$ ) кривые обнаружения сигнала со случайной начальной фазой весьма близки к кривым обнаружения сигнала со случайной начальной фазой и флуктуирующей по рэлеевскому закону амплитудой.

Приведены зависимости вероятности правильного измерения от уровня неискажённой части сигнала для случая колоколообразного распределения мощности флуктуаций искажённого сигнала по каналам приёмного устройства при различных ширине спектра функции помеховой модуляции и числе каналов приёмного устройства.

Показано, что в случае большого числа каналов или при симметричном относительно  $k$ -го канала распределении мощности флуктуаций помеховой составляющей сигнала, искажённого мультипликативной помехой, среднее значение ошибок измерения (ложных отсчётов) равно нулю, т. е. систематические ошибки измерения отсутствуют.

**Финансирование.** Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (грант № 23-21-00452, <https://rscf.ru/project/23-21-00452/>).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кремер И. Я., Владимиров В. И., Карпухин В. И.** Модулирующие (мультипликативные) помехи и приём радиосигналов. М.: Сов. радио, 1972. 480 с.
2. **Фалькович С. Е.** Приём радиолокационных сигналов на фоне флуктуационных помех. М.: Сов. радио, 1961. 311 с.
3. **Ширман Я. Д., Манжос В. Н.** Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех. М.: Радио и связь, 1981. 416 с.
4. **Yu X., Li J.** Adaptive Kalman Filtering for Recursive Both Additive Noise and Multiplicative Noise // IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems. 2022. **58**, Iss. 3. P. 1634–1649.
5. **Challagundla S., Chitraganti S., Wali P.** Event-Based Distributed Filtering with Multiplicative Measurement Noise and Correlated Additive Noises // Proc. of the 13th Asian Control Conf. (ASCC). South Korea, Jeju, 4–7 May, 2022. P. 920–925.
6. **Jiang N., Zhang N.** Expectation Maximization-Based Target Localization From Range Measurements in Multiplicative Noise Environments // IEEE Communications Lett. 2021. **25**, Iss. 5. P. 1524–1528. DOI: 10.1109/LCOMM.2021.3050455.
7. **Артюшенко В. М., Воловач В. И.** Статистические характеристики сигнала при наличии модулирующей помехи // Автометрия. 2021. **57**, № 2. С. 49–61. DOI: 10.15372/AUT20210206.
8. **Вайнштейн Л. А., Зубаков В. Д.** Выделение сигналов на фоне случайных помех. М.: Сов. радио, 1960. 427 с.
9. **Куликов Е. И.** Вопросы оценок параметров сигналов при наличии помех. М.: Сов. радио, 1969. 244 с.
10. **Артюшенко В. М., Воловач В. И.** Точность измерения частоты и времени прихода полезного сигнала в авиационных и ракетно-космических радиосистемах при наличии аддитивных и мультипликативных помех с низким уровнем // Информационно-технологический вестн. 2021. № 1. С. 3–15.
11. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 4-е, перераб. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
12. **Голев К. В.** Расчёт дальности действия радиолокационных станций. М.: Сов. радио, 1962. 204 с.

Поступила в редакцию 17.07.2024

После доработки 31.07.2024

Принята к публикации 14.10.2024