

УДК 532.595:519.633.6

## ЧИСЛЕННОЕ И АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ГИДРОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ В ИЗОГНУТОМ ТРУБОПРОВОДЕ

В. А. Рукавишников, О. П. Ткаченко

Вычислительный центр ДВО РАН, 680063 Хабаровск

На основе уравнений движения оболочки и жидкости построена математическая модель распространения гидроупругих волн в трубопроводе. Предложен метод перехода к двумерным уравнениям, получены асимптотические формулы для их решений. Проведены численные расчеты модельной задачи и сравнение с данными других авторов. Полученные результаты позволяют рассчитывать распространение волн давления при произвольных (в рамках сделанных предположений) формах осевой линии трубопровода и могут быть использованы при разработке систем диагностики состояния трубопроводов.

Исследование движения жидкости в трубах является классической задачей механики. В последнее время большой интерес вызывают явления, сопровождающие потерю устойчивости длинной упругой трубы с потоком жидкости. Одним из последствий потери устойчивости является отклонение подземного трубопровода в сторону от первоначальной трассы и всплытие участка подводного трубопровода.

Изменение формы профиля трубопровода должно быть своевременно установлено. Это можно сделать, анализируя прошедший через поток жидкости импульс давления (гидравлический удар) или акустическую волну. При прохождении волны через трубопровод зависимость давления от времени будет определяться кривизной оси трубопровода.

Гидроупругие колебания в изогнутом трубопроводе формируются под влиянием упругих свойств стенки трубы, давления и трения в потоке жидкости и сопротивления внешней среды. Процесс их распространения с учетом этих факторов изучен недостаточно.

Одномерные математические модели нестационарного течения жидкости в трубах рассматривались в работах [1, 2], анализ теорий гидравлического удара дан в [3]. Однако такие модели не позволяют изучать влияние изгиба профиля на распространение волн давления.

Автор работы [4] и другие исследователи изучали взаимодействие цилиндрических оболочек с потоком жидкости, используя уравнения полной теории гидроупругости, но такой подход эффективен только для труб средней длины. Имеются также математические модели течения несжимаемой вязкой жидкости в изогнутых трубках, используемые для изучения динамики крови (см., например, [5, 6]). Динамика этих систем существенно отличается от динамики трубопровода, и полученные результаты неприменимы к рассматриваемой задаче.

Гидравлический удар в движущемся по заданному закону трубопроводе описан в [7], там же построена одномерная математическая модель и проведен расчет методом характеристик. Одномерная математическая модель гидравлического удара в изогнутом трубопроводе рассмотрена в [8] (см. также обзор литературы в [9]).

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 98-01-00142).

Для анализа распространения колебаний давления в изогнутом подземном трубопроводе указанные математические модели непригодны из-за необходимости учета явлений с характерным масштабом порядка радиуса трубы при определении движения волны давления через трубопровод. При этом надо учитывать взаимодействие стенки трубопровода как с внешней средой, так и с потоком жидкости.

В настоящей работе рассмотрена задача о распространении волны давления в потоке жидкости внутри изогнутого упругого трубопровода с учетом влияния внешней среды. Эта задача связана с проблемой диагностики изменения формы профиля подземного трубопровода при воздействии внутреннего потока жидкости. Если трубопровод зондировать акустическим сигналом, то в каждой его точке значение давления как функции времени будет зависеть от кривизны осевой линии. Целью данной работы является построение и апробация математической модели, позволяющей исследовать эту зависимость.

**1. Физическая постановка задачи.** Пусть внутри изогнутого подземного трубопровода, осевая линия которого является плоской кривой  $\Gamma = \{(x, y): x = x(s), y = y(s); 0 \leq s \leq L\}$ , равномерно течет жидкость. В начальной точке трубопровода  $s = 0$  на поток жидкости действует периодическая сила, возбуждающая колебания давления внутри него. Требуется исследовать динамику системы.

При построении математической модели полагается, что движение жидкости можно линеаризовать в окрестности стационарного состояния, влияние грунта учесть через краевые условия, а параметры  $\alpha = R_0/l$  ( $R_0$  — радиус трубы,  $l$  — минимальная длина волны сигнала),  $\varepsilon = R_0/\min|\rho_0|$  ( $\rho_0$  — радиус кривизны оси трубопровода),  $h^* = h/R_0$  ( $h$  — толщина стенки трубы) малы; движение стенки трубопровода описывается в рамках линейной теории оболочек. Трением в жидкости для колебательных процессов пренебрегается.

Введем криволинейные ортогональные координаты:  $s$  — расстояние вдоль оси трубопровода;  $\theta$ ,  $R$  — угол и радиус полярной системы координат в плоскости поперечного сечения в точке  $s$  (рис. 1). При этом декартовы координаты точки имеют вид

$$X = x(s) + \frac{dy(s)}{ds} R \sin \theta, \quad Y = y(s) - \frac{dx(s)}{ds} R \sin \theta, \quad Z = R \cos \theta. \quad (1)$$

Подобная система координат использовалась в работе [10], но труба имела форму тора и вместо координаты  $s$  рассматривался угол  $\varphi$ . Следуя [11], из (1) можно найти компоненты метрического тензора, символы Кристоффеля и коэффициенты Ламе для построенной ортогональной системы координат. Первый коэффициент Ламе можно записать следующим образом:

$$\sqrt{g_{11}} = 1 + \frac{R}{\rho_0(s)} \sin \theta.$$

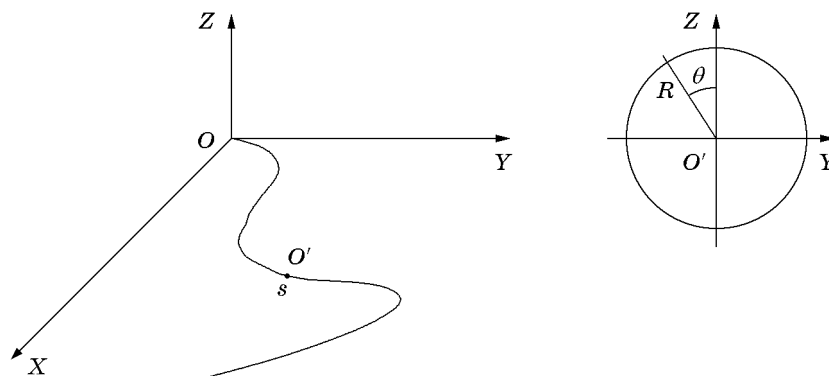


Рис. 1

Совместное движение жидкости и трубопровода рассматривалось в [12], где приведена только формулировка задачи. В настоящей работе уточнен метод линеаризации уравнений для жидкости, основное внимание уделяется исследованию трехмерной математической модели.

**2. Трехмерная начально-краевая задача движения системы.** Движение трубопровода описывается уравнениями упругого тела [11]

$$\rho_t a^k = \nabla_i p^{ki}, \quad (2)$$

где  $\rho_t$  — плотность материала трубы;  $a^k$  — компоненты вектора ускорения;  $p^{ki}$  — компоненты тензора напряжений;  $\nabla_i$  — ковариантная производная.

Считается, что на внутренней поверхности трубопровода действуют силы нормального давления жидкости и увлечения стенки стационарным потоком жидкости, на внешней — силы нормального давления внешней среды, упругого сопротивления внешней среды радиальному перемещению стенки и сила трения, пропорциональная скорости касательного перемещения стенки. Тогда для плотности поверхностных сил получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_n \Big|_{R=R_0-h/2} &= \Phi(v_{s0}) \cdot \mathbf{e}_s + p \cdot \mathbf{e}_R, \\ \mathbf{P}_n \Big|_{R=R_0+h/2} &= -kp_e \left( \frac{\partial w_s}{\partial t} \mathbf{e}_s + \frac{\partial w_\theta}{\partial t} \mathbf{e}_\theta \right) - (p_e + \varkappa w_R) \mathbf{e}_R. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{e}_s$ ,  $\mathbf{e}_\theta$ ,  $\mathbf{e}_R$  — единичные векторы базиса;  $w_s$ ,  $w_\theta$ ,  $w_R$  — физические компоненты вектора перемещения;  $k$ ,  $\varkappa$  — коэффициенты трения и упругости внешней среды;  $p$ ,  $p_e$  — давление жидкости и среды;  $\Phi(v_{s0})$  — функция, описывающая силу трения потока о стенку.

Теперь, используя (2), (3) и переходя к уравнениям технической моментной оболочки из [13], получим краевую задачу для трубопровода

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{A} \frac{\partial I'}{\partial \zeta} - (1 - \nu) \frac{\partial \chi'}{\partial \theta} + \frac{1 - \nu}{A} \left( \varepsilon f u' \sin \theta - \alpha \frac{\partial w'}{\partial \zeta} \right) &= -\frac{1 - \nu^2}{Eh^*} F_s, \\ \frac{\partial I'}{\partial \theta} + (1 - \nu) \frac{\alpha}{A} \frac{\partial \chi'}{\partial \zeta} + (1 - \nu) \frac{\varepsilon f}{A} \sin \theta \left( v' - \frac{\partial w'}{\partial \theta} \right) &= -\frac{1 - \nu^2}{Eh^*} F_\theta, \\ -\left( 1 + \frac{\varepsilon f}{A} \sin \theta \right) I' + \frac{1 - \nu}{A} \left[ 2\varepsilon f w' \sin \theta + \alpha \frac{\partial u'}{\partial \zeta} + \varepsilon f \frac{\partial}{\partial \theta} (v' \sin \theta) \right] - \\ &\quad - \frac{(h^*)^2}{12} \tilde{\nabla}^2 w' - \frac{(h^*)^2}{12} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\nabla}^2 w' = -\frac{1 - \nu^2}{Eh^*} F_R, \\ I' &= \frac{1}{A} \left( \alpha \frac{\partial u'}{\partial \zeta} + \varepsilon f v' \cos \theta \right) + \frac{\partial v'}{\partial \theta} + \left( 1 + \frac{R_0 \sin \theta}{\rho_0(\zeta) A} \right) w', \\ \chi' &= \frac{1}{2A} \left( \alpha \frac{\partial v'}{\partial \zeta} - \varepsilon f u' \cos \theta \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial u'}{\partial \theta}, \quad \tilde{\nabla}^2 w' = \frac{1}{A} \left[ \alpha^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial w'}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( A \frac{\partial w'}{\partial \theta} \right) \right], \\ \frac{1}{h^*} F_s &= -\rho_t R_0^2 \omega^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial \tau^2} + \frac{(h^*)^2}{12} \left( 1 + 2 \frac{\varepsilon f}{A} \sin \theta \right) \frac{\alpha}{A} \rho_t R_0^2 \omega^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \frac{\partial w'}{\partial \zeta} + \\ &\quad + \frac{1}{h^*} \left[ \Phi_t(v_{s0}) - kp_e \omega R_0 \frac{\partial}{\partial \tau} \left( u' - \frac{h^* \alpha}{2A} \frac{\partial w'}{\partial \zeta} \right) \right], \quad (4) \\ \frac{1}{h^*} F_\theta &= -\rho_t R_0^2 \omega^2 \frac{\partial^2 v'}{\partial \tau^2} + \frac{(h^*)^2}{12} \left( 2 + \frac{\varepsilon f}{A} \sin \theta \right) \rho_t R_0^2 \omega^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \frac{\partial w'}{\partial \theta} - \frac{1}{h^*} kp_e R_0 \frac{\partial}{\partial \tau} \left( v' - \frac{h^*}{2} \frac{\partial w'}{\partial \theta} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^*} F_R = & -\rho_t R_0^2 \omega^2 \frac{\partial^2 w'}{\partial \tau^2} + \frac{(h^*)^2}{12} \rho_t R_0^2 \omega^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left[ - \left( 2 + \frac{\varepsilon f}{A} \sin \theta \right) \frac{\partial v'}{\partial \theta} - \right. \\ & - \frac{\alpha}{A} \left( 1 + 2 \frac{\varepsilon f}{A} \sin \theta \right) \frac{\partial u'}{\partial \zeta} + \frac{\varepsilon f}{A} \cos \theta \left( \frac{\partial w'}{\partial \theta} - 3v' \right) - \frac{\alpha}{A} \frac{\varepsilon f'}{A^2} \sin \theta \left( 2u' + \alpha \frac{\partial w'}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial^2 w'}{\partial \theta^2} + \\ & + \frac{\alpha^2}{A^2} \frac{\partial^2 w'}{\partial \zeta^2} \left. \right] + \frac{1}{h^*} (p - p_e - \varkappa R_0 w') - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\varepsilon f}{A} k p_e \omega R_0 \cos \theta \frac{\partial}{\partial \tau} \left( v' - \frac{h^*}{2} \frac{\partial w'}{\partial \theta} \right) + \right. \\ & \left. + k \omega R_0 \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ p_e \frac{\partial}{\partial \tau} \left( v' - \frac{h^*}{2} \frac{\partial w'}{\partial \theta} \right) \right] + \frac{\alpha}{A} k p_e \omega R_0 \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial \zeta} \left( u' - \frac{h^* \alpha}{2A} \frac{\partial w'}{\partial \zeta} \right) \right\}, \end{aligned}$$

$$A = 1 + \frac{R_0}{\rho_0(s)} \sin \theta, \quad f = \frac{\min_{0 < \zeta < L} |\rho_0(\zeta)|}{\rho_0(\zeta)}, \quad w' = v' = u' = 0, \quad \frac{\partial w'}{\partial \zeta} = 0 \quad \text{при} \quad \zeta = 0, L.$$

Здесь  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  — нормированные на  $R_0$  компоненты вектора перемещения срединной поверхности стенки трубопровода;  $\tau = \omega t$ ,  $\zeta = s/l$  — безразмерные время и продольная координата;  $\nu$ ,  $E$  — коэффициент Пуассона и модуль Юнга для трубы;  $\rho_0(\zeta)$  — радиус кривизны осевой линии трубопровода;  $F_s$ ,  $F_\theta$ ,  $F_R$  — плотности сил, действующих в соответствующих направлениях. Систему (4) необходимо дополнить начальными условиями. Найдем их, решая уравнения равновесия трубопровода при стационарном движении жидкости, которые получаются из (4), если производные по времени и нестационарные характеристики жидкости положить равными нулю.

Движение жидкости описывается уравнениями Эйлера [11] с включением в правую часть силы трения:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} \right) = -\text{grad } p - \Phi(v_{s0}), \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

Вводя, аналогично [12], представления для решений

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1, \quad \rho = \rho_f + \rho_1, \quad p = p_0 + p_1,$$

где  $\mathbf{v}_0$ ,  $p_0$  — решение системы уравнений

$$(\mathbf{v}_0, \nabla) \mathbf{v}_0 = -\frac{1}{\rho_f} \text{grad } p_0 - \frac{1}{\rho_f} \Phi(v_{s0}), \quad \text{div } \mathbf{v}_0 = 0, \quad \rho_f = \text{const},$$

опуская нелинейные по  $\mathbf{v}_1$ ,  $\rho_1$ ,  $p_1$  слагаемые, а также принимая для отклонений плотности уравнение состояния  $\rho_1 = p_1/c_f^2$ , получим линеаризованные уравнения нестационарного движения жидкости

$$\rho_f \left( \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_0, \nabla) \mathbf{v}_1 + [(\mathbf{v}_1, \nabla) \mathbf{v}_0]_c \right) = -\text{grad } p_1, \quad \frac{1}{c_f^2} \left[ \frac{\partial p_1}{\partial t} + \text{div}(p_1 \mathbf{v}_0) \right] + \text{div}(\rho_f \mathbf{v}_1) = 0,$$

где  $c_f$  — скорость звука в жидкости. Величину  $\mathbf{v}_0$  считаем слабо зависящей от координаты, поэтому от слагаемого  $(\mathbf{v}_1, \nabla) \mathbf{v}_0$  осталась только часть  $[(\mathbf{v}_1, \nabla) \mathbf{v}_0]_c$ , не содержащая частных производных.

Введем безразмерные функции

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v}_1}{\omega l}, \quad \mathbf{v}'_0 = \frac{\mathbf{v}_0}{\omega l}, \quad p' = \frac{p_1}{p_a}, \quad p'_0 = \frac{p_0}{p_a}$$

( $p_a$  — атмосферное давление) и обозначим их компоненты

$$\mathbf{v}' = (v_s, v_\theta, v_r), \quad \mathbf{v}'_0 = (v_{s0}, v_{\theta 0}, v_{r0}).$$

Далее  $a^2 = p_a/(\rho_f \omega^2 l^2)$  — постоянный параметр. Для стационарного движения получим

$$\begin{aligned} \frac{v_{s0}}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial v_{s0}}{\partial \zeta} + \frac{v_{\theta 0}}{\alpha r} \frac{\partial v_{s0}}{\partial \theta} + \frac{v_{r0}}{\alpha} \frac{\partial v_{s0}}{\partial r} + \frac{\varepsilon}{\alpha} \frac{f(\zeta)}{\sqrt{g_{11}}} v_{s0} (v_{\theta 0} \cos \theta + v_{r0} \sin \theta) &= -\frac{a^2}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial p'_0}{\partial \zeta} - \frac{l}{\rho_f} |\Phi(v_{s0})|, \\ \frac{v_{s0}}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial v_{\theta 0}}{\partial \zeta} + \frac{v_{\theta 0}}{\alpha r} \frac{\partial v_{\theta 0}}{\partial \theta} + \frac{v_{r0}}{\alpha} \frac{\partial v_{\theta 0}}{\partial r} - \frac{\varepsilon}{\alpha} \frac{f(\zeta)}{\sqrt{g_{11}}} v_{s0}^2 \cos \theta + \frac{v_{r0} v_{\theta 0}}{\alpha r} &= -\frac{a^2}{\alpha r} \frac{\partial p'_0}{\partial \theta}, \\ \frac{v_{s0}}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial v_{r0}}{\partial \zeta} + \frac{v_{\theta 0}}{\alpha r} \frac{\partial v_{r0}}{\partial \theta} + \frac{v_{r0}}{\alpha} \frac{\partial v_{r0}}{\partial r} - \frac{v_{\theta 0}^2}{\alpha r} - \frac{\varepsilon}{\alpha} \frac{f(\zeta)}{\sqrt{g_{11}}} v_{s0}^2 \sin \theta &= -\frac{a^2}{\alpha} \frac{\partial p'_0}{\partial r}, \\ \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial v_{s0}}{\partial \zeta} + \frac{1}{\alpha r} \frac{\partial v_{\theta 0}}{\partial \theta} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial v_{r0}}{\partial r} + \frac{v_{r0}}{\alpha r} + \frac{\varepsilon}{\alpha} \frac{f(\zeta)}{\sqrt{g_{11}}} (v_{\theta 0} \cos \theta + v_{r0} \sin \theta) &= 0, \\ v_{s0}(0, \theta, r) = v_0, \quad v_{r0}(\zeta, \theta, 1) = 0, \quad p'_0(L, \theta, r) = 1, \end{aligned} \quad (5)$$

для нестационарного —

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_s}{\partial \tau} + \frac{v_{s0}}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial v_s}{\partial \zeta} + \frac{v_{\theta 0}}{\alpha r} \frac{\partial v_s}{\partial \theta} + \frac{v_{r0}}{\alpha} \frac{\partial v_s}{\partial r} + v_{s0} \frac{\varepsilon f(\zeta)}{\alpha \sqrt{g_{11}}} (v_{\theta} \cos \theta + v_r \sin \theta) + \\ + v_s \frac{\varepsilon f(\zeta)}{\alpha \sqrt{g_{11}}} (v_{\theta 0} \cos \theta + v_{r0} \sin \theta) &= -\frac{a^2}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial p'}{\partial \zeta}, \\ \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \tau} + \frac{v_{s0}}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \zeta} + \frac{v_{\theta 0}}{\alpha r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{v_{r0}}{\alpha} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} - 2v_{s0} v_s \frac{\varepsilon f(\zeta)}{\alpha \sqrt{g_{11}}} \cos \theta + \frac{v_{\theta} v_{r0}}{\alpha r} + \frac{v_{\theta 0} v_r}{\alpha r} &= -\frac{a^2}{\alpha r} \frac{\partial p'}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial v_r}{\partial \tau} + \frac{v_{s0}}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial v_r}{\partial \zeta} + \frac{v_{\theta 0}}{\alpha r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_{r0}}{\alpha} \frac{\partial v_r}{\partial r} - 2v_{s0} v_s \frac{\varepsilon f(\zeta)}{\alpha \sqrt{g_{11}}} \sin \theta - \frac{v_{\theta 0} v_{\theta}}{\alpha r} &= -\frac{a^2}{\alpha} \frac{\partial p'}{\partial r}, \\ a^2 \left( \frac{\partial p'}{\partial \tau} + \frac{v_{s0}}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial p'}{\partial \zeta} + \frac{v_{\theta 0}}{\alpha r} \frac{\partial p'}{\partial \theta} + \frac{v_{r0}}{\alpha} \frac{\partial p'}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial v_s}{\partial \zeta} + \frac{1}{\alpha r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} + \\ + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{\alpha r} + \frac{\varepsilon f(\zeta)}{\alpha \sqrt{g_{11}}} (v_{\theta} \cos \theta + v_r \sin \theta) &= 0, \\ p'(0, \theta, r, \tau) = F_0(\tau), \quad p(L, \theta, r, \tau) = 0, \quad v_r(\zeta, \theta, 1, \tau) = \alpha \frac{\partial w'}{\partial \tau}(\zeta, \theta, \tau). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь уравнения стационарного движения дополнены условием непротекания на стенке. Кроме того, задаются постоянная скорость на входе трубопровода и условие выравнивания давления на выходе. Для нестационарного движения задано давление на входе, поставлены условия непротекания на стенке и выравнивания давления на выходе.

Сопrotивление стационарному потоку задается в виде [2, 14]

$$|\Phi(v_{s0})| = \beta v_0^2, \quad \beta = \frac{\lambda \rho_f}{4 R_0}, \quad \lambda = \begin{cases} 64/\text{Re}, & \text{Re} < 2000, \\ 0,0032 + 0,221/\text{Re}^{0,237}, & \text{Re} \geq 2000, \end{cases} \quad \text{Re} = \frac{2v_0 R_0}{\mu},$$

где  $\mu$  — кинематическая вязкость. В начальный момент значения неизвестных функций в (6) полагаются равными нулю.

Таким образом, начально-краевая задача (4)–(6) совместного движения стенки трубопровода и жидкости поставлена.

**3. Сведение задачи к двумерной и нахождение стационарного решения.** Для исключения угловой переменной  $\theta$  используем разложение, найденное в [12]. Для трубопровода оно имеет вид

$$u' = u^{(0)}(\zeta, \tau) + \varepsilon u^{(1)}(\zeta, \tau) \sin \theta + \varepsilon u^{(2)}(\zeta, \tau) \cos \theta + O(\varepsilon^2),$$

$$\begin{aligned} v' &= v^{(0)}(\zeta, \tau) + \varepsilon v^{(1)}(\zeta, \tau) \sin \theta + \varepsilon v^{(2)}(\zeta, \tau) \cos \theta + O(\varepsilon^2), \\ w' &= w^{(0)}(\zeta, \tau) + \varepsilon w^{(1)}(\zeta, \tau) \sin \theta + \varepsilon w^{(2)}(\zeta, \tau) \cos \theta + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (7)$$

для жидкости ( $k = s, \theta, r$ ) —

$$\begin{aligned} v_k(\tau, \zeta, \theta, r) &= v_k^{(0)}(\tau, \zeta, r) + \varepsilon v_k^{(1)}(\tau, \zeta, r) \sin \theta + \varepsilon v_k^{(2)}(\tau, \zeta, r) \cos \theta + O(\varepsilon^2), \\ p'(\tau, \zeta, \theta, r) &= p^{(0)}(\tau, \zeta, r) + \varepsilon p^{(1)}(\tau, \zeta, r) \sin \theta + \varepsilon p^{(2)}(\tau, \zeta, r) \cos \theta + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (8)$$

Такое представление решений объясняется тем, что после разложения решения задачи (4) в ряд по степеням малого параметра  $\varepsilon$ , а затем в ряд Фурье по  $\theta$  (так как очевидна периодичность по  $\theta$ ) все коэффициенты Фурье (кроме первого) в нулевом приближении по  $\varepsilon$  равны нулю, так как являются решением краевых задач с нулевой правой частью и однородными граничными условиями. В первом приближении по  $\varepsilon$  равны нулю все коэффициенты Фурье, кроме стоящих при  $\sin \theta, \cos \theta$  и т. д.

Для стационарного движения жидкости в нулевом приближении по  $\varepsilon$  получим

$$v_{s0}^{(0)} = v_0, \quad v_{\theta 0}^{(0)} = v_{r0}^{(0)} = 0, \quad p_0^{(0)} = 1 + \frac{l\beta}{\rho_f a^2} v_0^2 (L - \zeta), \quad (9)$$

а в первом приближении (выполняя разложение неизвестных функций в асимптотический ряд по  $\alpha$  в длинноволновом приближении) —

$$\begin{aligned} p_0^{(1)} &= r \frac{f(\zeta)}{a^2} v_0^2 + \alpha^2 \frac{r}{8} (3 - r^2) \frac{v_0^2}{a^2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} + \frac{l\beta}{\rho_f} \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right), \\ v_{s0}^{(1)} &= -r f v_0 - \alpha^2 \frac{r v_0}{8} (3 - r^2) \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} + \frac{l\beta}{\rho_f} \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right) - r \frac{l\beta}{\rho_f} v_0 \int_0^\zeta f d\zeta, \\ v_{r0}^{(1)} &= -\frac{3}{8} \alpha v_0 (1 - r^2) \left( \frac{\partial f}{\partial \zeta} + \frac{l\beta}{\rho_f} f \right), \quad v_{\theta 0}^{(2)} = -\frac{\alpha v_0}{8} (3 - r^2) \left( \frac{\partial f}{\partial \zeta} + \frac{l\beta}{\rho_f} f \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Величина  $p_0^{(1)}$  в главном порядке при  $r = 1$  равна

$$p_0^{(1)} \approx \frac{f(\zeta)}{a^2} v_0^2. \quad (11)$$

С физической точки зрения эта величина соответствует перепаду давления при  $\theta_1 = \pi/2$  и  $\theta_2 = -\pi/2$ , т. е. на длине, равной диаметру трубопровода (так называемый эффект центрифуги (см., например, [6])).

Подстановка (7) в краевую задачу (4) дает одномерные уравнения для коэффициентов разложения. Полагая в этих уравнениях частные производные по времени равными нулю, получим краевую задачу равновесия трубопровода, решение которой является начальным условием для начально-краевой одномерной задачи относительно коэффициентов разложения.

В нулевом приближении по  $\varepsilon$  задачу равновесия можно решить точно:

$$\begin{aligned} u_0^{(0)} &= b_1 + b_2 \zeta - \frac{\nu}{\alpha} \int \bar{w} d\zeta + c \zeta^2, \quad \bar{w} = w_0^{(0)} - d - g \zeta, \\ w_0^{(0)} &= \left[ A_1 \cos \left( \delta_2 \frac{\zeta}{\alpha} \right) + A_2 \sin \left( \delta_2 \frac{\zeta}{\alpha} \right) \right] \exp \left( \delta_1 \frac{\zeta}{\alpha} \right) + \left[ A_3 \cos \left( \delta_2 \frac{\zeta}{\alpha} \right) + \right. \\ &\quad \left. + A_4 \sin \left( \delta_2 \frac{\zeta}{\alpha} \right) \right] \exp \left( -\delta_1 \frac{\zeta}{\alpha} \right) - \frac{\alpha \nu b_2}{1 + K_r - \nu^2} + d + g \zeta, \end{aligned}$$

где  $K_T = R_0 \alpha / (Eh^*)$  — коэффициент упругости грунта; коэффициенты  $c, d, g, \delta_1, \delta_2$  находятся из правых частей, а  $b_1, b_2, A_1, A_2, A_3, A_4$  — из краевых условий. Для автоматизации вычислений написана программа на языке Reduce. Полученные аналитические выражения для коэффициентов не приводятся из-за их громоздкости.

Для краевых задач, описывающих равновесие трубопровода в первом приближении по  $\varepsilon$ , интегроинтерполяционным методом построены разностные схемы. Написана программа для ЭВМ, решающая полученную систему алгебраических уравнений методом минимальных невязок.

Таким образом, стационарное движение жидкости и положение равновесия трубопровода определены с точностью до величин, приближенно равных  $\varepsilon \alpha^2$ .

**4. Решение нестационарной задачи.** Подставляя (7), (8) в уравнения (4), (6), приравнявая коэффициенты при  $\varepsilon^0, \varepsilon \sin \theta, \varepsilon \cos \theta$  в левой и правой частях уравнений и краевых условий, получим двумерную начально-краевую задачу относительно коэффициентов разложений (7), (8). Разлагая решения полученных уравнений для жидкости в ряд по малому параметру  $\alpha$ , в длинноволновом приближении получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{s0}}{\partial \tau} + v_0 \frac{\partial v_{s0}}{\partial \zeta} &= -a^2 \frac{\partial p_0}{\partial \zeta}, \quad a^2 \left( \frac{\partial p_0}{\partial \tau} + v_0 \frac{\partial p_0}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial v_{s0}}{\partial \zeta} + 2 \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \tau} = 0, \\ p_0 \Big|_{\zeta=0} &= F_0(\tau), \quad p_0 \Big|_{\zeta=L} = 0, \quad v_{s0} \Big|_{\tau=0} = p_0 \Big|_{\tau=0} = 0, \\ v_s^{(0)} &= v_{s0} + \alpha^2 \frac{r^2}{2} \frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial \tau \partial \zeta}, \quad v_r^{(0)} = \alpha r \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \tau}, \quad p^{(0)} = p_0 - \frac{\alpha^2 r^2}{2a^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \tau} + v_0 \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \zeta} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

В первом приближении по  $\varepsilon$ , проводя такие же разложения по  $\alpha$ , получим асимптотические формулы

$$\begin{aligned} p^{(1)} &= \frac{2rv_0}{a^2} f v_{s0} + \alpha^2 r \frac{v_0}{a^2} \left[ \left( \frac{5}{2} f + \frac{l\beta}{\rho_f} \int_0^\zeta f d\zeta \right) \frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial \tau \partial \zeta} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{v_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial w^{(1)}}{\partial \tau} + v_0 \frac{\partial w^{(1)}}{\partial \zeta} \right) + \frac{1}{8} (r^2 - 3) F(\tau, \zeta) \right], \\ p^{(2)} &= -\frac{\alpha^2 r}{a^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial w^{(2)}}{\partial \tau} + v_0 \frac{\partial w^{(2)}}{\partial \zeta} \right), \\ F(\tau, \zeta) &= \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + v_0 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right)^2 (f v_{s0}) - \frac{\partial^2 (f v_{s0})}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \left( 2f + \frac{l\beta}{\rho_f} \int_0^\zeta f d\zeta \right) \frac{\partial v_{s0}}{\partial \zeta} \right] + \\ &\quad + \frac{a^2}{v_0} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( f \frac{\partial p_0}{\partial \zeta} \right) + 3 \left( 2f + \frac{l\beta}{\rho_f} \int_0^\zeta f d\zeta \right) \frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial \tau \partial \zeta} - \left( 2f' + \frac{l\beta}{\rho_f} f \right) \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \tau} - \\ &\quad - \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + v_0 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \left[ a^2 \left( 2f + \frac{l\beta}{\rho_f} \int_0^\zeta f d\zeta \right) \frac{\partial p_0}{\partial \zeta} + \frac{f}{v_0} \left( \frac{\partial v_{s0}}{\partial \zeta} - \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \tau} \right) \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

В (12), (13) входят функции  $w^{(0)}, w^{(1)}, w^{(2)}$ , являющиеся компонентами разложения (7) радиального смещения стенки трубопровода. Краевая задача для  $w^{(0)}$  решается совместно

с (12), поскольку в нее входит  $p^{(0)}$ . Из задач для  $w^{(1)}$ ,  $w^{(2)}$  соответствующие величины  $p^{(1)}$ ,  $p^{(2)}$  могут быть исключены при использовании формул (13), поэтому они находятся независимо.

Дифференциальные операторы в уравнениях для  $w^{(0)}$ ,  $w^{(1)}$ ,  $w^{(2)}$  совпадают с операторами уравнений (6)–(8) в работе [12], а правая часть отличается только наличием слагаемого, учитывающего силу  $\Phi_t(v_{s0})$ . Здесь эти уравнения не приводятся из-за их громоздкости.

Начально-краевая задача нулевого приближения по  $\varepsilon$  решена численно. При этом применялись явная трехслойная разностная схема для нахождения  $u^{(0)}$ ,  $w^{(0)}$  и метод характеристик для определения  $v_{s0}$ ,  $p_0$ . Для последних выбраны инварианты

$$I_1 = v_{s0} + a^2 p_0, \quad I_2 = v_{s0} - a^2 p_0,$$

что приводит систему уравнений (12) к каноническому виду.

Для модельных расчетов выбраны параметры, соответствующие потоку воды в стальной трубе с внутренним радиусом 0,375 м, длиной 3011,25 м и толщиной стенки 0,01 м. Характерные масштабы системы  $l = 15$  м,  $\omega = 100$  с<sup>-1</sup>. Форма профиля описывается функцией

$$y(x) = \frac{4}{1 + 0,0025(x - 100)^2},$$

где  $x$ ,  $y$  измеряются в единицах  $l$ . Форма колебаний давления на входе задается в виде

$$F_0(\tau) = P_0 \left( 1 - \cos \left( 2\pi \frac{\omega_0}{\omega} \tau \right) \right),$$

где  $P_0$  — постоянная амплитуда сигнала.

Расчеты показывают, что в нулевом приближении по  $\varepsilon$  на некотором расстоянии от входа формируется импульс давления (рис. 2), полученный в [1] и численно найденный в [15], но при других краевых условиях. Высота импульса равна амплитуде колебаний  $P_0$ , т. е. среднему значению давления на входе.

Давление в первом приближении по  $\varepsilon$  определено формулами (13). Величины  $w^{(1)}$ ,  $w^{(2)}$  найдены независимо из уравнений (6)–(8) работы [12], для решения которых построены явные трехслойные разностные схемы.

Установлено, что главный вклад в величину давления первого приближения  $p^{(1)}$  дает слагаемое

$$p^{(1)} \approx \frac{2rv_0}{a^2} f v_{s0},$$

как и в стационарном случае (см. (11)). Физический смысл этой величины, как и  $p_0^{(1)}$ , — перепад давления на длине, равной диаметру трубопровода. Зависимости  $p^{(1)}(t)$  при различных  $\zeta$  приведены на рис. 3.

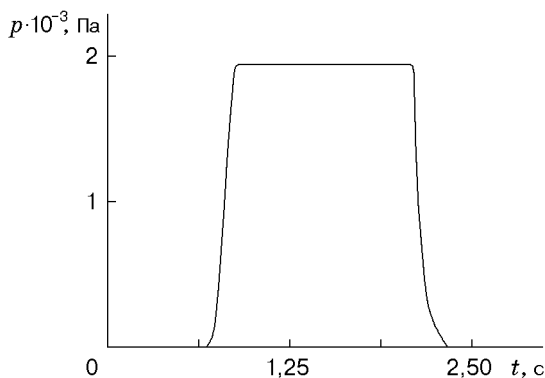


Рис. 2

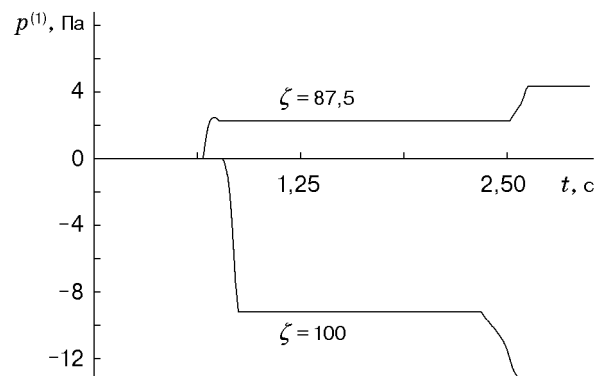


Рис. 3



Результаты расчета смещения стенки трубопровода и давления жидкости в нулевом приближении показывают хорошее соответствие математической модели и известных результатов.

Таким образом, для описания движения системы можно использовать формулы (4), (9), (10), (12), (13). В частности, можно найти зависимость формы колебаний давления от кривизны осевой линии трубопровода. На основе этой зависимости возможно создание системы контроля изменения формы профиля трубопровода.

Авторы выражают благодарность В. П. Мясникову за постановку задачи и ценные консультации.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Жуковский Н. Е.** О гидравлическом ударе в водопроводных трубах. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1949.
2. **Чарный И. А.** Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М.: Недра, 1975.
3. **Картвелишвили Л. Н.** Гидравлический удар: основные положения и современное состояние теории // Гидротех. стр.-во. 1994. № 9. С. 49–54.
4. **Вольмир А. С.** Оболочки в потоке жидкости и газа: задачи гидроупругости. М.: Наука, 1979.
5. **Berger S. A., Talbot L., Yao L. S.** Flow in curved pipes // Annu. Rev. Fluid Mech. 1983. V. 15. P. 461–512.
6. **Lynch D. G., Waters S. L., Pedley T. J.** Flow in a tube with non-uniform, time-dependent curvature: governing equations and simple examples // J. Fluid Mech. 1996. V. 323. P. 237–265.
7. **Яскеляин А. В.** Моделирование гидравлического удара в жидкости при колебаниях трубопровода // Теплофиз. аспекты безопасности ВВЭР: Тр. Междунар. конф., Обнинск, 21–24 нояб. 1995 г. Обнинск: Физ.-энерг. ин-т, 1995. Т. 2. С. 222–231.
8. **Овчинников В. Ф.** Численное моделирование динамики пространственных трубопроводных систем при гидравлическом ударе // Там же. С. 174–183.
9. **Lee U., Pak C. H., Hong S. C.** The dynamics of a piping system with internal unsteady flow // J. Sound Vibration. 1995. V. 180, N 2. P. 297–311.
10. **Ishigaki H.** Analogy between laminar flows in curved pipes and ortogonally rotating pipes // J. Fluid Mech. 1994. V. 268. P. 133–145.
11. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. М.: Наука, 1983. Т. 1.
12. **Ткаченко О. П.** Математическая модель распространения волны давления в потоке жидкости внутри изогнутого подземного трубопровода // Вычисл. технологии. 1996. Т. 1, № 3. С. 78–86.
13. **Власов В. З.** Общая теория оболочек и ее приложения в технике // Избр. тр. М.: Изд-во АН СССР, 1962. Т. 1. С. 15–439.
14. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987.
15. **Wiggert D. C., Otwell R. S., Hatfield F. J.** The effect of elbow restraint of pressure transients // J. Fluids Engng. 1985. V. 107. P. 402–406.

*Поступила в редакцию 26/IV 1999 г.,  
в окончательном варианте — 17/XI 1999 г.*