

УДК 532.135:532.52

## УСЛОВИЯ ФОРМИРОВАНИЯ ПУЗЫРЬКОВЫХ СУСПЕНЗИЙ ПРИ УДАРНО-ВОЛНОВОМ НАГРУЖЕНИИ ЖИДКОСТЕЙ

С. В. Стебновский

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Определены условия развития пузырьковой кавитации в жидких средах при ударно-волновом нагружении. Показано, что для развития неограниченной кавитации пузырьки должны за счет упругой энергии, сообщаемой жидкому образцу волной разрежения (на стадии разгрузки), вырасти до некоторых критических размеров, достаточных для их перехода в неравновесное состояние. В отличие от маловязких жидкостей в высоковязких (типа глицерина) эти условия невыполнимы ни при каких реально достижимых параметрах ударных волн.

Из многочисленных экспериментальных исследований известно, что при динамическом разрушении маловязких жидкостей [1–3], жидкодисперсных и тиксотропных сред [4, 5], а также некоторых пластических металлов [6] стадии фрагментизации среды предшествует рост кавитационных пузырьков или пор (в случае склерономных материалов). Тем не менее, как показано в работах [4, 5], в жидких средах не всегда можно реализовать кавитационное разрушение даже при интенсивном импульсном нагружении. Например, при объемном импульсном растяжении высоковязкого глицеринового образца неограниченный рост пузырьков не наблюдается, а его разрушение происходит вследствие развития возмущений на свободных поверхностях. Наряду с этим при импульсном растяжении образца геля, обладающего вязкоупругими свойствами, происходит развитие в нем неограниченной кавитации, формирование, а затем фрагментизация пенных ячеистых структур. Кроме того, как уже отмечалось, кавитационный процесс наблюдается в склерономных материалах, например в алюминии и меди [7].

В связи с изложенным выше представляется целесообразным определить условия развития в конденсированных средах пузырьковой кавитации и, таким образом, выделить класс сред, способных кавитировать при определенных режимах нагружения. Настоящая работа посвящена первому этапу исследования этой проблемы — определению условий развития пузырьковой кавитации в жидкостях, обусловленной ударно-волновым нагружением. Особенности роста пузырьков из кавитационных зародышей в жидкостях рассматривались в ряде работ. Так, в [8] проведено аналитическое исследование роста сферического пузырька в вязкой несжимаемой жидкости, вызванного кратковременным импульсом отрицательного давления, имеющим форму ступеньки. Показано, что если, например, к воде прилагать отрицательное давление  $-1,8 \cdot 10^6$  Па в течение  $3 \cdot 10^{-5}$  с, то кавитационный зародыш радиусом  $R_{00} = 10^{-5}$  см вырастет за это время до размеров  $R = 10^{-1}$  см. В работе [9] определялись условия роста одиночного сферического газонаполненного пузырька в вязкой несжимаемой жидкости под действием мгновенно приложенного отрицательного скачка давления в форме бесконечной ступеньки. Установлено существование верхней и нижней границ порогового отрицательного давления, относящихся к случаям бесконеч-

ной и нулевой вязкости жидкости соответственно. Показано доминирующее влияние на исследуемый процесс содержащегося в пузырьке газа. В [10] в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости, содержащей кавитационные зародыши, с учетом результатов работ [8, 9] на примере динамики одиночного пузырька выполнен теоретический анализ процесса возбуждения кавитации под действием отрицательного импульса давления постоянной амплитуды. Установлено, что при малых амплитудах разгрузки наблюдается существенная зависимость от  $R_{00}$  времени выхода пузырька на видимый размер (порядка  $10^{-2}$  см). Интервал значений  $R_{00}$ , допускающий такой выход, конечен. При больших амплитудах наблюдается практически одновременный выход на видимый размер пузырьков всего спектра значений  $R_{00}$ .

В [8–10] рассматривались условия роста кавитационных зародышей до видимых размеров под действием внезапно приложенной к среде ступеньки отрицательного давления. Однако в задаче о нагружении жидкого образца ударной волной (УВ) возникает вопрос об условиях, необходимых для неограниченного развития пузырьковой кавитации в жидкости, к которой приложен переменный во времени импульс отрицательного давления, сформированный после выхода фронта УВ на свободную поверхность. В этом случае, как известно, поле отрицательного давления в жидкости релаксирует за очень короткое время  $T_0$ : согласно расчетным данным [11] в случае воды  $T_0 \sim 10^{-8}$  с.

1. Рассмотрим процесс нагружения короткой УВ жидкого образца произвольной вязкости с целью определения условий, которым должны удовлетворять параметры волны для формирования в нем на стадии разгрузки неограниченной пузырьковой кавитации.

Полагаем, что цилиндрический или сферический жидкий образец нагружается расходящейся коаксиальной УВ. Характерный размер образца  $L = 2a_0$ , где  $a_0$  — начальный радиус его цилиндрической или сферической свободной поверхности (рис. 1, а). Пусть  $\alpha_{00}$  — начальное значение объемной концентрации кавитационных зародышей в среде,  $P_1$  — давление газа в зародыше,  $C_0$  — скорость звука в жидкой матрице,  $\mu$  — ее сдвиговая вязкость,

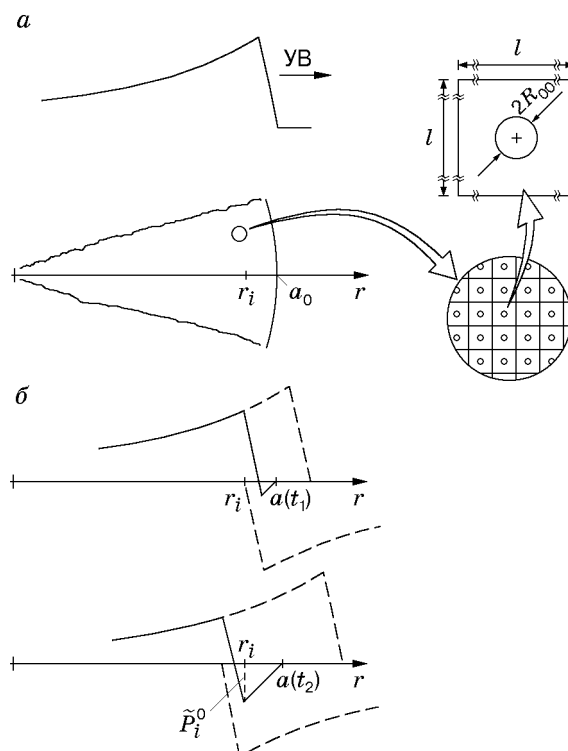


Рис. 1

$\zeta_0$  — объемная (вторая) вязкость,  $\rho$  — плотность,  $\gamma$  — поверхностное натяжение,  $P_\infty$  — гидростатическое давление в жидкости. В исходном состоянии в жидкости содержатся монодисперсные кавитационные зародыши при счетной концентрации  $n$ , т. е.

$$\alpha_{00} = \left( \frac{3V_0}{4\pi R_{00}^3 n} + 1 \right)^{-1},$$

где  $V_0$  — единичный объем среды. Тогда весь объем образца можно разбить на  $n$  ячеек с характерным размером  $l$ , так что в центре каждой из них содержится по одному зародышу. Так как в реальных условиях  $R_{00} \leq 10^{-3}$  см, а  $\alpha_{00} = 10^{-12} \div 10^{-6}$ , то рост зародыша в ячейке в поле растягивающих напряжений до некоторого значения  $\alpha_0$  можно рассматривать как расширение сферического пузырька в безграничной жидкости, поскольку  $l$  на несколько порядков превышает  $R_{00}$ . Например,  $lR_{00}^{-1} \sim 10^4$  при  $\alpha_{00} = 10^{-12}$ .

Механизм формирования в среде поля отрицательного давления можно представить следующим образом. Расходящаяся УВ распространяется вдоль координаты  $r$  сферической  $(r, \theta, \varphi)$  или цилиндрической  $(r, \varphi, z)$  системы координат (в зависимости от геометрии процесса), начала которых совмещены соответственно с центром или осью симметрии образца. После выхода фронта УВ на свободную поверхность образца  $r = a_0$  (рис. 1, *a*) начинается процесс его радиального растяжения ( $a(t) > a_0$ ) и схождения отраженной от свободной поверхности волны разрежения (ВР) к центру системы. На рис. 1, *б* штриховыми линиями показаны профили расходящейся УВ и сходящейся к центру симметрии УВ. Если бы в жидкости отсутствовали кавитационные зародыши, то за фронтом ВР сформировалось бы поле отрицательного давления  $\tilde{P}^0(r)$  (рис. 1, *б*) и часть энергии УВ перешла в упругую энергию радиально растянутой среды. Однако, поскольку в жидкости всегда  $\alpha_{00} > 0$ , при  $|\tilde{P}^0 + P_1| > P_\infty + 2\gamma/R_{00}$  упругая энергия переходит в работу по расширению кавитационных зародышей, а давление  $\tilde{P}^0$  релаксирует с некоторой постоянной времени  $T_0$ .

Следуя работе [12], давление  $\tilde{P}^0$  в ВР представим в виде суперпозиции

$$\tilde{P}^0(r_*^-, r) = P^+(r_*^+, r) + P^-(r_*^-, r). \quad (1)$$

Здесь  $P^+(r_*^+, r) = f^+(r_*^+, r)U(r - r_*^+)$  — давление в расходящейся от оси (или центра) симметрии образца УВ;  $f^+(r_*^+, r) = P_*^+(r_*^+)$  при  $r = r_*^+$ ,  $f^+(r_*^+, r) \leq P_*^+(r_*^+)$  при  $r < r_*^+$ ;  $U(r - r_*^+) = 1$  при  $r \leq r_*^+$ ,  $U(r - r_*^+) = 0$  при  $r > r_*^+$ ;  $P_*^+(r_*^+)$  — давление во фронте УВ. Аналогично представим сходящуюся к центру (или оси) симметрии образца мнимую УВ:

$$P^-(r_*^-, r) = f^-(r_*^-, r)U(r - r_*^-),$$

где  $|f^-(r_*^-, r)| = |P_*^-(r_*^-)|$  при  $r = r_*^-$ ,  $|f^-(r_*^-, r)| \leq |P_*^-(r_*^-)|$  при  $r > r_*^-$ ;  $U(r - r_*^-) = 1$  при  $r \geq r_*^-$ ,  $U(r - r_*^-) = 0$  при  $r < r_*^-$ ;  $P_*^-(r_*^-)$  — давление во фронте мнимой УВ;  $r_*^+$  и  $r_*^-$  — координаты фронтов расходящейся и мнимой УВ соответственно.

Поскольку  $P^+(r_*^+, r = a_1(t)) \leq P_*^+(r_*^+)$ , то с учетом условия на свободной поверхности образца

$$P^+(r_*^+, a_1(t)) + P^-(r_*^-, a_1(t)) = 0$$

$P^+$  и  $P^-$  в точке  $r_*^- \leq r = \tilde{r} \leq r_*^+$  можно выразить через их градиенты спада давления за фронтом:

$$P^+(r_*^+, \tilde{r}) = P^+(r_*^+, a_1(t)) + \int_{a_1(t)}^{\tilde{r}} \nabla P^+(r_*^+, r) dr,$$

$$P^-(r_*^-, \tilde{r}) = -P^+(r_*^+, a_1(t)) + \int_{a_1(t)}^{\tilde{r}} \nabla P^-(r_*^-, r) dr.$$

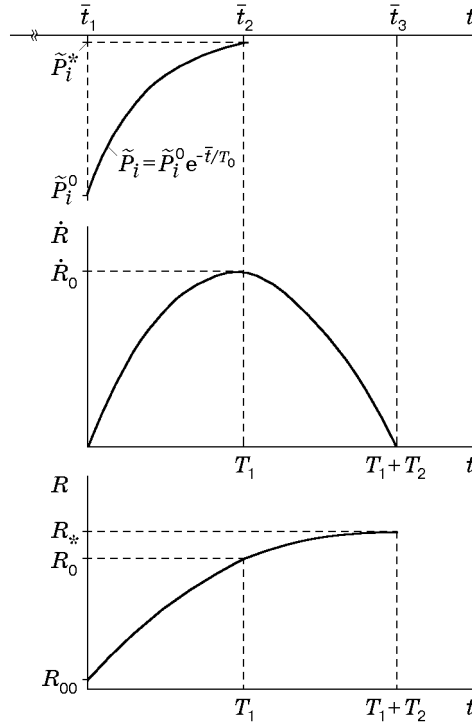


Рис. 2

Подставляя эти выражения в (1), получим функцию распределения давления вдоль  $r$  в волне разрежения

$$\tilde{P}^0(r_*^-, \tilde{r}) = - \int_{a_1(t)}^{\tilde{r}} \left( \left| \frac{\partial P^+(r_*^+, r)}{\partial r} \right| + \left| \frac{\partial P^-(r_*^-, r)}{\partial r} \right| \right) dr, \tag{2}$$

справедливую как для цилиндрической, так и для сферической симметрии. Следовательно, после прихода фронта мнимой УВ в  $i$ -ю ячейку в окрестности кавитационного зародыша сформируется поле давления

$$\sigma_i(r_i, t) = P_1(R) - P_\infty - \tilde{P}_i(r_i, t) - 2\gamma/R,$$

где  $P_1(R) = (P_\infty + 2\gamma/R_{00})b^{-3k}$ ;  $b = R/R_{00}$ ;  $k$  — показатель политропы газа в пузырьке;  $\tilde{P}_i(r_i, t) = -\tilde{P}_i^0(r_i)f(t)$  — отрицательное давление, релаксирующее по закону  $f(t)$  вследствие расширения пузырьков. Рост из зародыша кавитационного пузырька под действием  $\sigma_i$  описывается уравнением Рэлея — Лэмба [13]

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 + \frac{4\mu}{\rho}\frac{\dot{R}}{R} = \frac{\sigma_i}{\rho}, \quad R = R_{00} \quad \text{и} \quad \dot{R} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \tag{3}$$

В процессе расширения кавитационного пузырька выделим две стадии. Первая стадия на шкале времени  $\bar{t}$ , берущей начало от момента генерации расходящейся УВ, начинается при  $\bar{t} = \bar{t}_1$  (время попадания  $i$ -й ячейки в поле  $\tilde{P}_i^0$  (рис. 2)), а заканчивается при  $\bar{t} = \bar{t}_2$ , соответствующем релаксации  $\tilde{P}_i$  до значения  $|\tilde{P}_i^*| = P_\infty + 2\gamma/R_0 - P_1$ , при котором радиус пузырька увеличивается до  $R_0$ , соответствующего максимальной скорости расширения  $\dot{R}_0$ . К этому моменту упругая энергия поля растягивающих напряжений переходит в кинетическую энергию жидкости, окружающей пузырек в  $i$ -й ячейке, а также в работу

по преодолению гидростатического противодействия, поверхностную энергию пузырька и тепловую энергию, обусловленную вязкостью жидкости. В момент времени  $\bar{t}_2$  начинается вторая стадия расширения пузырька, протекающая в инерционном режиме за счет запасенной кинетической энергии жидкости, определяемой скоростью стенки пузырька  $\dot{R}_0$ , и заканчивается в момент времени  $\bar{t}_3$ , соответствующий достижению пузырьком максимального размера  $R = R_*$ , т. е.  $\dot{R}_* = 0$ .

Для удобства переобозначим шкалу времени следующим образом (рис. 2):  $\bar{t}_1 = t = 0$  — начало процесса расширения кавитационного зародыша;  $\bar{t}_2 = t = T_1$  — окончание стадии расширения пузырька по инерции;  $\bar{t}_3 = t = T_1 + T_2$  — конец процесса расширения пузырька за счет упругой энергии поля растягивающих напряжений в жидкой ячейке. Тогда отрицательное давление в  $i$ -й ячейке можно представить в виде

$$\tilde{P}_i(t) = \tilde{P}_i^0(r_i) \exp(-t/T_0), \quad \tilde{P}_i^0 < 0, \quad (4)$$

где  $\tilde{P}_i^0$  определяется выражением (2). Поскольку  $T_0$  очень мало и, следовательно, перемещения за это время фронтов нагружающей и мнимой УВ незначительны, полагаем, что значение  $\tilde{P}_i^0(r_i)$  в процессе релаксации давления  $\tilde{P}_i(t)$  остается постоянным. Подставляя (4) в (3), домножая последнее на  $4\pi R^2 \dot{R}$  и интегрируя по  $t$  от 0 до  $T_1$ , получим

$$\begin{aligned} -4\pi \tilde{P}_i^0 \int_0^{T_1} R^2 \dot{R} \exp\left(-\frac{t}{T_0}\right) dt = 2\pi \rho R_0^3 \dot{R}_0^2 + \frac{4}{3} \pi R_{00}^3 \left[ P_\infty (b_0^3 - 1) - \frac{P_\infty + 2\gamma R_{00}^{-1}}{k - 1} (1 - b_0^{3-3k}) \right] + \\ + 4\pi \gamma R_{00}^2 (b_0^2 - 1) + 16\pi \mu \int_0^{T_1} R \dot{R}^2 dt, \quad (5) \end{aligned}$$

где  $\tilde{P}_i^0 < 0$ ;  $b_0 = R_0/R_{00}$ . С учетом того, что  $\sigma_i = 0$  при  $t = T_1$ , имеем

$$T_1 = T_0 \ln \frac{|\tilde{P}_i^0|}{P_\infty (1 - b_0^{3k}) + 2\gamma (1 - b_0^{-3k}) / R_0}.$$

Равенство (5) определяет баланс энергии в  $i$ -й ячейке: выражение в левой части равенства — упругая энергия ВР  $E_0$ , расходуемая на рост пузырька; первое слагаемое в правой части — приращение кинетической энергии  $E_1$  жидкости вследствие увеличения скорости расширения пузырька до значения  $\dot{R}_0^2$ ; второе слагаемое в правой части — работа по расширению пузырька в поле гидростатического противодействия  $E_2$ ; третье слагаемое — приращение свободной (поверхностной) энергии  $E_3$ ; четвертое слагаемое — диссипация энергии  $E_4$ , обусловленная сдвиговой вязкостью жидкости.

Как уже отмечалось, согласно расчетным данным [11] отрицательное давление в воде релаксирует вследствие роста кавитационных пузырьков за время менее  $10^{-7}$  с, и в этих условиях пузырек не успевает выйти на видимый размер (порядка  $10^{-2}$  см). По данным работы [14], растягивающее напряжение в высоковязком глицерине релаксирует за время порядка  $10^{-7}$  с, при этом кавитационные зародыши также не успевают выйти на видимый размер. Следовательно, в (5) приращениями членов  $E_2$  и  $E_3$  за время  $T_1$  можно пренебречь. С учетом того, что  $a_1 \simeq a_0$  при  $t = T_1$ , это соотношение после подстановки в  $E_0$  вместо  $\tilde{P}_i^0$  выражения (2) можно записать в виде

$$2 \int_{a_0}^{\tilde{r}} \left[ \left| \frac{\partial P^+(r_*^+, r)}{\partial r} \right| + \left| \frac{\partial P^-(r_*^-, r)}{\partial r} \right| \right] dr \int_0^{T_1} R^2 \dot{R} \exp\left(-\frac{t}{T_0}\right) dt \simeq \rho R_0^3 \dot{R}_0^2 + 8\mu \int_0^{T_1} R \dot{R}^2 dt. \quad (6)$$

Оценим степень расширения пузырька на стадии  $t > T_1$ , т. е. в инерционном режиме, за счет накопленной кинетической энергии  $E_1$ .

2. Проинтегрируем уравнение (3) на отрезке времени  $(T_1, T_2)$ , соответствующем инерционной стадии расширения пузырька от  $R_0$  до  $R_*$  (максимальный радиус, которого может достичь пузырек за счет накопленной кинетической энергии), с учетом того, что  $\sigma_i = -P_\infty - 2\gamma R^{-1} + (P_\infty + 2\gamma R_{00}^{-1})b^{-3k} + \tilde{P}_i^0 \exp(-t/T_0)$ ,  $\dot{R} = \dot{R}_0$  при  $t = T_1$ ,  $\dot{R} = \dot{R}_* = 0$  при  $t = T_2$ . Разрешив полученное соотношение относительно  $\rho R_0^3 \dot{R}_0^2$ , подставим его в правую часть (6). В результате получим в общем виде условие роста кавитационного пузырька от  $R_{00}$  до  $R_*$ , обусловленного упругой энергией поля растягивающего напряжения в  $i$ -й ячейке образца:

$$\begin{aligned} 3 \int_{a_0}^{\tilde{r}_i} \left[ \left| \frac{\partial P^+(r_*, r)}{\partial r} \right| + \left| \frac{\partial P^-(r_*, r)}{\partial r} \right| \right] dr \int_0^{T_1} b^2 \dot{b} \exp\left(-\frac{t}{T_0}\right) dt \geq \\ \geq \left[ P_\infty (b_{0*}^3 - 1) - \frac{P_\infty + 2\gamma/R_{00}}{(k+1)b_{0*}^{3k}} (1 - b_{0*}^{-3k-3}) - 3\tilde{P}_i^0 \int_{T_1}^{T_2} b^2 \dot{b} \exp\left(-\frac{t}{T_0}\right) dt \right] + \\ + \frac{3\gamma}{R_0} (b_{0*}^2 - 1) + 12\mu \int_0^{T_2} b \dot{b}^2 dt, \quad (7) \end{aligned}$$

где  $b_{0*} = R_*/R_{0*}$ . Упростим левую часть этого неравенства, задавая профиль нагружающей образец волны в виде функции  $P^+(t) = P_*^+ \exp(-t/\tau)$ , где  $\tau$  — постоянная времени спада давления в фиксированной точке среды. Поскольку согласно многочисленным экспериментальным данным развитие пузырьковой кавитации в жидких средах возбуждается ударно-волновым нагружением с амплитудой, как правило, не превышающей  $10^9$  Па, скорость таких УВ можно считать равной скорости звука в нагружаемой жидкости  $C_0$ . С учетом этого пространственное распределение давления за фронтом УВ при фиксированной координате фронта  $r_*^+$  после замены  $t = (r_*^+ - r_i)/C_0$  можно представить в виде  $P_i^+(r_*^+, r_i) = P_*^+(r_*^+) \exp\{- (r_*^+ - r_i)/[\tau(r_i)C_0]\}$ , откуда

$$\frac{\partial P_i^+}{\partial r} = \frac{P_*^+(r_*^+)}{\tau(r_i)C_0} \exp\left[-\frac{r_*^+ - r_i}{\tau(r_i)C_0}\right]. \quad (8)$$

Давление на свободной поверхности всегда равно атмосферному, следовательно, отрицательное давление в среде за фронтом ВР может формироваться лишь при  $r < a_0$  (см. рис. 1). Поэтому будем определять условие роста пузырька в ячейке, расположенной на некотором малом расстоянии от свободной поверхности  $\delta$ , так, что  $\delta/a_0 \ll 1$ . Смысл такого подхода заключается в том, что если условие роста пузырька выполняется в ячейке с координатой  $r_i = a_0 - \delta$ , то оно заведомо будет выполняться и для  $r_j < r_i$ . С учетом этого выражение (8) для  $r_i = a_0 - \delta$  (в момент прихода фронта УВ в эту точку, т. е. при  $r_*^+ = a_0 + \delta$ ) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial P_i^+}{\partial r} = \frac{P_*^+(r_*^+)}{\tau(r_i)C_0} \exp\left[-\frac{2\delta}{\tau(r_i)C_0}\right]. \quad (9)$$

В процессе схождения к центру симметрии образца мнимой УВ поверхность ее фронта уменьшается, поэтому очевидно, что ее амплитуда по крайней мере не убывает. Следовательно, на одинаковом расстоянии от источников волн  $|\partial P^-/\partial r| \geq |\partial P^+/\partial r|$ , и поэтому

можно записать неравенство, которое с учетом (8), (9) и приближения  $\tau(a_0 + \delta) \approx \tau(a_0 - \delta)$  после интегрирования по  $r$  от  $a_0$  до  $a_0 - \delta$  примет вид

$$\int_{a_0}^{a_0 - \delta} \left[ \left| \frac{\partial P^+(r_*, r)}{\partial r} \right| + \left| \frac{\partial P^-(r_*, r)}{\partial r} \right| \right] dr \geq 2P_*^+(r_*) \left\{ 1 - \exp \left[ - \frac{\delta}{C_0 \tau(r_i)} \right] \right\}. \quad (10)$$

Используя (10), условие роста пузырьков (7) можно преобразовать в неравенство

$$3P_*^+(r_*) \left\{ 1 - \exp \left[ \frac{-\delta}{C_0 \tau(a_0 - \delta)} \right] \right\} \int_0^{T_1} b^2 \dot{b} \exp \left( - \frac{t}{T_0} \right) dt \geq P_\infty (b_{0*}^3 - 1) - \frac{P_\infty + 2\gamma R_{00}^{-1}}{(k+1)b_0^{3k}} (1 - b_{0*}^{-3k-3}) - \\ - 3\tilde{P}_i^0 \int_{T_1}^{T_2} b^2 \dot{b} \exp \left( - \frac{t}{T_0} \right) dt + \frac{3\gamma}{R_0} (b_{0*}^2 - 1) + 12\mu \int_0^{T_2} b \dot{b}^2 dt. \quad (11)$$

Таким образом, выполнение условия (11) обеспечивает рост пузырьков в объеме  $0 < r \leq a_0 - \delta$  жидкого образца произвольной сдвиговой вязкости. Содержащиеся в (11) текущие значения  $b$  и  $\dot{b}$  можно определить численно, решая уравнение (3) на отрезке времени  $(0, T_1)$ . Время релаксации отрицательного давления  $T_0 = T_0(K_0, K_\infty, K_a(\alpha_0), \zeta_0, \zeta_1(\alpha_0))$  определяется из соотношения (5.5) работы [15], полученного в рамках макрореологической модели кавитирующих жидкостей. Здесь  $K_\infty, K_0$  — динамический и статический модули объемной упругости чистой жидкости;  $K_a(\alpha_0)$  — модуль объемной упругости пузырьковой суспензии, который вычисляется из полученного в [15] соотношения. Эффективную объемную вязкость кавитирующей жидкости  $\zeta_1(\alpha_0)$  необходимо определить, так как известная формула  $\zeta_1 = 4\mu/(3\alpha_0)$  [16] справедлива только для больших  $\alpha_0$ . Если же  $\alpha_0 \rightarrow 0$ , то  $\zeta_1 \rightarrow \infty$ , в то время как должно быть  $\zeta_1 \rightarrow \zeta_0$  при  $\alpha_0 \rightarrow 0$ . Для устранения особенности в этой формуле при  $\alpha_0 \rightarrow 0$  построим зависимость  $\zeta_1(\mu, \alpha_0)$  с учетом объемной упругости жидкого компонента.

**3.** Если реальную жидкость подвергнуть объемному растяжению так, что число Дебора  $De = T_0/\Delta\tilde{t} \gg 1$ , где  $\Delta\tilde{t}$  — характерное время нарастания амплитуды растягивающих напряжений, то вначале деформация среды будет определяться только объемным деформированием жидкого компонента. Затем начнется рост кавитационных зародышей, а следовательно, и релаксация растягивающих напряжений, т. е. увеличение объема среды будет определяться только ростом пузырьков. С учетом этого построим зависимость  $\zeta_1$  от скорости объемной деформации чистой жидкости  $\dot{\epsilon}_{V0}$  и скорости объемной деформации среды  $\dot{\epsilon}_{VB}$ , обусловленной ростом пузырьков. Скорость диссипации энергии в объеме  $V_0$  гомогенной жидкости  $D_0$  и монодисперсной пузырьковой суспензии, расширяющейся только за счет роста пузырьков  $D_B$ , можно представить в виде [16]

$$D_0 = V_0 \zeta_0 \dot{\epsilon}_{V0}^2, \quad D_B = 16\pi\mu R \dot{R}^2 N. \quad (12)$$

Здесь  $N$  — количество пузырьков в среде, имеющей объем  $V^0$ . Тогда в гомогенной среде, реологически эквивалентной исследуемой, скорость диссипации энергии можно представить следующим образом:

$$D = V^0 \zeta_1 \dot{\epsilon}_V^2, \quad D = D_0 + D_B, \quad \dot{\epsilon}_V = \dot{\epsilon}_{V0} + \dot{\epsilon}_{VB}. \quad (13)$$

Определим скорость объемной деформации чистой жидкости  $\dot{\epsilon}_{V0}$  и пузырьковой суспензии  $\dot{\epsilon}_{VB}$ , в которой изменение объема среды определяется только ростом пузырьков.

Поскольку объем среды до и после деформирования определяется соответственно выражениями  $V^0 = V_0 + 4\pi R_{00}^3 N/3$  и  $V = V_0 + 4\pi R^3 N/3$ , то с учетом того, что  $n = N/V^0$  — счетная концентрация пузырьков, имеем

$$\dot{\varepsilon}_{VB} = \frac{d}{dt} \left( \frac{V - V^0}{V^0} \right) = \frac{d}{dt} \left( \alpha_0 - \frac{V^0 - V_0}{V^0} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{4\pi R^3 n}{3} - \alpha_{00} \right) = 3\alpha_0 \frac{\dot{R}}{R}. \quad (14)$$

Объемную деформацию жидкого компонента будем определять следующим образом. В случае  $De \gg 1$  реологическое уравнение состояния пузырьковой суспензии [15] упрощается до соотношения  $\sigma_V = K_a(\alpha_0)\varepsilon_V$ , которое при  $\alpha_0 = \alpha_{00}$  с учетом того, что  $K_a(\alpha_{00}) \simeq K_\infty$ , можно записать в виде  $\sigma_{V0} = K_\infty \varepsilon_{V0}$ , откуда

$$\dot{\varepsilon}_{V0} = \dot{\sigma}_{V0} K_\infty^{-1}. \quad (15)$$

Для определения  $\dot{\sigma}_{V0}$  воспользуемся выражением давления в фиксированной точке среды  $r_i$ , через которую проходит УВ:  $P^+(r_i, t) = P_*^+(r_i) \exp(-t\tau^{-1}(r_i))$ . Будем считать, что фронт УВ нарастает за время  $\Delta t_\Phi$ , которое согласно экспериментальным данным имеет порядок  $10^{-7}$ – $10^{-6}$  с. Тогда профиль мнимой УВ в момент ее прихода в точку  $r_i$  можно представить в виде

$$P^-(r_i, \hat{t}) = \left\{ P_*^-(a_0 - \delta) [U(\hat{t}) - U(\hat{t} - \Delta t_\Phi)] (\hat{t}/\Delta t_\Phi) + P_*^-(a_0 - \delta) U(\hat{t} - \Delta t_\Phi) \right\} \times \\ \times \exp[-\hat{t}U(\hat{t} - \Delta t_\Phi)/\tau(a_0 - \delta)]. \quad (16)$$

Здесь  $P_*^- < 0$ ;  $\hat{t}$  — время с момента прихода мнимой УВ в точку  $r_i = a_0 - \delta$ ;  $U(\hat{t}) = 0$ ; 1 при  $\hat{t} < 0$  и  $\hat{t} \geq 0$  соответственно;  $U(\hat{t} - \Delta t_\Phi) = 0$ ; 1 при  $\hat{t} \leq \Delta t_\Phi$  и  $\hat{t} > \Delta t_\Phi$  соответственно. На формирование отрицательного давления в  $i$ -й ячейке характер нарастания давления во фронте расходящейся УВ  $P^+(r_i, \hat{t})$  влияния не оказывает, поэтому для  $r_i = a_0 - \delta$  можно записать

$$P^+(r_i, \hat{t}) = P_*^+(a_0 - \delta) \exp[-(2\delta C_0^{-1} + \hat{t})/\tau(r_i)]. \quad (17)$$

Поскольку  $\delta/a_0 \ll 1$ , то  $\tau(a_0 + \delta) \simeq \tau(a_0 - \delta) \simeq \tau$ . С учетом (16), (17) выражение, определяющее отрицательное давление в  $i$ -й ячейке, примет вид

$$\tilde{P}(r_i, \hat{t}) = \begin{cases} P_*^+(a_0 - \delta) \exp\left(\frac{-2\delta/C_0 - \hat{t}}{\tau}\right) - P_*^-(a_0 + \delta) \frac{\hat{t}}{\Delta t_\Phi}, & 0 \leq \hat{t} \leq \Delta t_\Phi, \\ P_*^+(a_0 - \delta) \exp\left(\frac{-2\delta/C_0 - \hat{t}}{\tau}\right) - P_*^-(a_0 + \delta) \exp\left(-\frac{\hat{t}}{\tau}\right), & \hat{t} > \Delta t_\Phi. \end{cases} \quad (18)$$

Тогда, подставляя в (15)  $\dot{\sigma}_{V0}(r_i, \hat{t}) = -d\tilde{P}(r_i, \hat{t})/d\hat{t}$ , где  $\tilde{P}(r_i, \hat{t})$  определяется из (18), имеем

$$\dot{\varepsilon}_{V0}(r_i, \hat{t}) = \begin{cases} \frac{P_*^+(a_0 - \delta)}{\tau K_\infty} \exp\left(-\frac{2\delta C_0^{-1} + \hat{t}}{\tau}\right) + \frac{P_*^-(a_0 + \delta)}{K_\infty \Delta t_\Phi}, & 0 \leq \hat{t} \leq \Delta t_\Phi, \\ \left[ P_*^+(a_0 - \delta) \exp\left(-\frac{2\delta}{C_0 \tau}\right) - P_*^-(a_0 - \delta) \right] \frac{\exp(-\hat{t}/\tau)}{K_\infty \tau}, & \hat{t} > \Delta t_\Phi. \end{cases} \quad (19)$$

Наконец, подставляя в (13) выражения (12), (14) и (19) с учетом того, что  $|P_*^+(a_0 + \delta)/P_*^-(a_0 - \delta)| \simeq 1$ , а  $\Delta t_\Phi/\tau \ll 1$  и, следовательно, при  $\hat{t} \leq \Delta t_\Phi$   $\exp(\hat{t}\tau^{-1}) \simeq 1$ , получим

$$\zeta_1 = \begin{cases} \frac{\zeta_0}{V^0(1 + \Theta)^2/V_0} + \frac{4\alpha_0\mu}{3(\alpha_0 + \Theta^{-1})^2}, & 0 \leq \hat{t} \leq \Delta t_\Phi, \\ \frac{\zeta_0}{V^0(1 + \Psi)^2/V_0} + \frac{4\alpha_0\mu}{3(\alpha_0 + \Psi^{-1})^2}, & \hat{t} > \Delta t_\Phi, \end{cases} \quad (20)$$



где  $\Theta = \frac{3\alpha_0 K_\infty \Delta t_\Phi \dot{R}/R}{P_*^+(a_0 - \delta)}$ ;  $\Psi = \frac{3\alpha_0 K_\infty \tau \dot{R} R^{-1} \exp(\hat{t}\tau^{-1})}{P_*^+(a_0 - \delta)[\exp(-2\delta/(\tau C_0)) - 1]}$ . При  $\alpha_0 \rightarrow 0$  согласно (20)  $\zeta_1 \rightarrow \zeta_0$ , а при  $\Theta \gg 1$  на стадии  $0 \leq \hat{t} \leq \Delta t_\Phi$  или  $\Psi \gg 1$  на стадии  $\hat{t} > \Delta t_\Phi$  имеем  $\zeta_1 \simeq 4\mu/(3\alpha_0)$ , что соответствует известной формуле [16], определяющей объемную вязкость концентрированной пузырьковой суспензии. Полученное выражение (20) позволяет определять  $\zeta_1$  на начальной стадии роста кавитационных зародышей в режиме импульсного растяжения кавитирующей жидкости и, таким образом, полностью определяет ее макрореологическое уравнение состояния [15].

4. На стадии  $t > T_1$  противодействие гидростатического давления  $P_\infty$  расширению пузырька согласно (11) частично компенсируется «остаточным» отрицательным давлением и давлением газа в пузырьке. Поэтому для оценки сверху запаса упругой энергии (сообщаемой жидкости волной разрежения), необходимой для роста пузырька до размера  $R_*$ , влиянием  $\tilde{P}_i^0 \exp(-t/T_0)$  и  $P_1(R)$  при  $t > T_1$  можно пренебречь и свести (11) к виду

$$3P_*^+(a_0 + \delta) \left\{ 1 - \exp \left[ \frac{-\delta}{C_0 \tau (a_0 - \delta)} \right] \right\} \int_0^{T_1} b^2 \dot{b} \exp \left( -\frac{t}{T_0} \right) dt \geq \\ \geq P_\infty (b_{0*}^3 - 1) + \frac{3\gamma}{R_0} (b_{0*}^2 - 1) + 12\mu \int_0^{T_1} b \dot{b}^2 dt. \quad (21)$$

В случае маловязких жидкостей ( $\mu \approx 0$ ) из (21) получим следующее условие роста пузырька до размера  $R_*$ :

$$3P_*^+(a_0 + \delta) \left\{ 1 - \exp \left[ \frac{-\delta}{C_0 \tau (a_0 - \delta)} \right] \right\} \int_0^{T_1} b^2 \dot{b} \exp \left( -\frac{t}{T_0} \right) dt \geq P_\infty (b_{0*}^3 - 1) + \frac{3\gamma}{R_0} (b_{0*}^2 - 1). \quad (22)$$

Из (18) с учетом  $P_*^+(a_0 - \delta) \simeq P_*^-(a_0 + \delta)$  имеем  $\tilde{P}(r_i, T_1) \simeq P_*^+(r_i)[1 - \exp(-2\delta/(C_0\tau))] \exp(-T_1/\tau)$ , и, так как  $\sigma_i(T_1) = 0$ , то  $(P_\infty + 2\gamma/R_{00})b_0^{-3k} - P_\infty - 2\gamma/R_0 + P_*^+(r_i)[1 - \exp(-2\delta\tau^{-1}/C_0)] \exp(-T_1/\tau) = 0$ . Следовательно, поскольку обычно  $\tau > 10^{-6}$  с, а  $T_1$  одного порядка с  $T_0$ , то  $\exp(-T_1/\tau) \simeq 1$  и  $R_0$  можно вычислить из выражения

$$(P_\infty + 2\gamma/R_{00})b_0^{-3k} - P_\infty - 2\gamma/R_0 + P_*^+(r_i) = 0, \quad (23)$$

задавая значения  $R_{00}$ ,  $P_*^+(r_i)$  и координату  $r_i = a_0 - \delta$ .

В случае высоковязких жидкостей, пренебрегая влиянием поверхностного натяжения и гидростатического давления, уравнение (3) для  $t \geq T_1$  можно записать в виде  $R\ddot{R} + 3\dot{R}^2/2 + 4\mu\dot{R}/(\rho R) = 0$ . Отсюда с учетом  $\dot{R}_* = 0$  имеем выражение  $\rho R_0^3 \dot{R}_0^2 = 64\mu^2 R_0 (b_{0*}^{1/2} - 1)^2 / \rho$ , после подстановки которого в (6), а также с учетом (10) получим условие роста пузырька в высоковязкой жидкости

$$P_*^+(a_0 + \delta) \left\{ 1 - \exp \left[ \frac{-\delta}{C_0 \tau (a_0 - \delta)} \right] \right\} \int_0^{T_1} b^2 \dot{b} \exp \left( -\frac{t}{T_0} \right) dt \geq \frac{16\mu^2}{\rho R_0^2} (b_{0*}^{1/2} - 1)^2 + 2\mu \int_0^{T_1} b \dot{b}^2 dt. \quad (24)$$

Следовательно, задавая исходные физические параметры жидкого образца и параметры нагружающей его УВ, по формуле (20) можно определить  $\zeta_1$ , а затем из соотношения (5.5) работы [15] вычислить время релаксации отрицательного давления в исследуемой среде  $T_0$ . Далее с учетом  $T_0$  и вычисленного по (23) значения  $R_0$  из (22) или (24) при заданных параметрах УВ определяется предельный радиус растущего пузырька  $R_*$  или, наоборот, по  $R_*$  определяются необходимые параметры нагружающей УВ.

Качественный анализ неравенств (21), (22) и (24) показывает следующее. Чем больше постоянная времени УВ  $\tau$ , тем больше должна быть амплитуда волны для выполнения условия развития кавитации, что согласуется с результатами экспериментов [12]. При нагружении образца «ступенчатой» УВ  $\tau \rightarrow \infty$  и левая часть указанных выше неравенств стремится к нулю. В этом случае развитие кавитации за счет накопленной в среде в импульсном режиме упругой энергии невозможно. С уменьшением  $\tau$  амплитуда  $P_*^+$ , необходимая для выполнения условий неравенств, убывает, но если  $\tau \ll a_0 C_0^{-1}$ , то зона развития кавитации в образце будет носить локальный характер. Поэтому оптимальным для развития кавитации является случай, когда  $\tau \simeq a_0 C_0^{-1}$  и выполняется соответствующее условие (21), (22) или (24).

В маловязких жидкостях  $T_0 < 10^{-7}$  с, и согласно оценке по (3) радиус зародыша успевает за это время вырасти менее чем на порядок даже при  $|\tilde{P}_i| \approx 10^9$  Па. На следующей стадии инерционного расширения пузырька его радиус может достичь размера  $10^{-2}$  см лишь в случае  $|\tilde{P}_i| > 10^9$  Па. Наблюдаемый в экспериментах с маловязкими жидкостями при  $P_*^+ \ll 10^9$  Па выход пузырьков на видимые размеры и их последующий рост происходят за время  $T_2$ , на 3–4 порядка превышающее значение  $T_0$ . Механизм формирования неограниченной пузырьковой кавитации в маловязких жидкостях заключается в следующем. Известно, что любое, в том числе объемное, деформирование жидкостей сопровождается течением среды, которое обусловлено не только расширением пузырьков, но и в значительной степени переходом части энергии УВ в кинетическую энергию дивергентного потока, обусловленного перемещением свободной поверхности. Естественно, такое течение в зоне разгрузки имеет градиент скорости. Следовательно, в процессе течения формируется продолжительное по времени (по сравнению с  $T_0$ ) растяжение среды, компенсирующее гидростатическое противодействие, уменьшая тем самым расход энергии на расширение пузырька. Вследствие этого на стадии  $t > T_1$  пузырьки расширяются не в чисто инерционном режиме, а под действием приложенного к жидкости дополнительного отрицательного давления  $-P_i$ . При этом, как известно из [9, 10, 13], кавитационный зародыш выводится из равновесного состояния и начинает неограниченно расти, если к среде приложить постоянное давление с амплитудой ниже некоторого критического значения для данного значения  $R_{00} = R_{кр}$ . Вязкость может влиять на состояние пузырька через диссипацию кинетической энергии окружающей жидкости только в процессе изменения во времени его радиуса. Следовательно, если при данном значении давления в маловязкой жидкости пузырек остается в равновесии, то он тем более не будет расти при этом давлении в высоковязкой жидкости.

С учетом изложенного выше развитие в образце маловязкой жидкости при его ударно-волновом нагружении интенсивной кавитации, характеризуемой значениями радиусов пузырьков не ниже некоторого заданного  $R^0$ , возможно в двух случаях:

— параметры УВ  $P_*^+$  и  $\tau$  удовлетворяют условию (22) роста пузырьков на стадии  $0 \leq t \leq T_2$  до значений  $R_* \geq R^0$ ;

— параметры УВ  $P_*^+$  и  $\tau$  согласно условию (22) удовлетворяют выходу пузырьков на стадии  $0 \leq t \leq T_2$  на размеры  $R_* \geq R_{кр}$ , где  $R_{кр}$  согласно [9, 10] соответствует неограниченному росту пузырьков в данном поле отрицательного давления, обусловленном градиентным по скорости течением за подвижной свободной поверхностью жидкости.

В случае высоковязкой жидкости диссипация энергии согласно (24) возрастает пропорционально  $\mu^2$ . Вследствие этого согласно (23) даже при  $b_0 = 100$ ,  $R_{00} = 10^{-4}$  см и очень высокой скорости расширения  $\dot{R}_0$  (например, порядка  $10^4$  см/с) пузырек в глицерине на стадии инерционного расширения увеличится не более чем в 5 раз. Таким образом, выход пузырьков на видимый размер при импульсном растяжении глицерина, обусловленном нагружением реальной УВ, практически невозможен, что и наблюдалось ранее в экспери-

ментах [4, 5]. При этом не происходит и медленного формирования пузырьковой суспензии, поскольку отрицательное давление, обусловленное градиентным течением за подвижной свободной поверхностью, и размеры пузырьков  $R_*$  согласно [9, 10, 13] не удовлетворяют условию их медленного роста.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Дремин А. Н., Канель Г. М., Колдунов С. А.** Исследование отколов в воде, этиловом спирте и плексигласе // Горение и взрыв: Материалы III Всесоюз. симп. по горению и взрыву, Ленинград, 5–10 июля 1971 г. М.: Наука, 1972. С. 569–574.
2. **Кедринский В. К.** Поверхностные эффекты при подводном взрыве (обзор) // ПМТФ. 1978. № 4. С. 66–77.
3. **Стебновский С. В.** О механизме импульсного разрушения жидкого объема // ПМТФ. 1989. № 2. С. 126–132.
4. **Стебновский С. В.** Экспериментальное исследование импульсного растяжения кавитирующих сред // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 5. С. 122–125.
5. **Стебновский С. В.** Эволюция структуры высоковязких жидких сред при импульсном объемном растяжении // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 1. С. 105–111.
6. **Макклинток Ф.** Пластические аспекты разрушения // Разрушение: В 7 т. М.: Мир, 1976. Т. 3. С. 67–262.
7. **Varbee T. W., Seaman L., Crewdson R., Curran D.** Dynamic fracture criteria for ductile and brittle metals // J. Materials. 1972. V. 7, N 3. P. 393–401.
8. **Се Дин-ю.** Рост пузырька в вязкой жидкости, вызванный кратковременным импульсом // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Сер. D. Теорет. основы инж. расчетов. 1970. № 4. С. 121–124.
9. **Персон Б.** О границах пороговой величины падения давления, вызывающего рост пузырей // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Сер. D. Теорет. основы инж. расчетов. 1973. № 1. С. 170–174.
10. **Кедринский В. К., Ковалев В. В., Плаксин С. И.** Об одной модели пузырьковой кавитации в реальной жидкости // ПМТФ. 1986. № 5. С. 81–85.
11. **Кедринский В. К.** Динамика зоны кавитации при подводном взрыве вблизи свободной поверхности // ПМТФ. 1975. № 5. С. 68–78.
12. **Стебновский С. В., Чернобаев Н. Н.** Влияние динамики нагружения жидкого объема на механизм его разрушения // ПМТФ. 1987. № 5. С. 134–139.
13. **Перник А. Д.** Проблемы кавитации. Л.: Судостроение, 1966.
14. **Erlich D. S., Wooten D. S.** Dynamic tensile failure of glycerol // J. Appl. Phys. 1971. V. 42, N 13. P. 5495–5500.
15. **Стебновский С. В.** Реологическая модель объемного растяжения ньютоновских жидкостей // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 1. С. 35–46.
16. **Бэтчелор Д.** Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.

*Поступила в редакцию 13/1 1999 г.*