

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЖИДКОСТИ,
СОДЕРЖАЩЕЙ ПУЗЫРЬКИ ГАЗА

В. Ю. Кедринский

(Новосибирск)

Исследуется одна из моделей пузырьковой среды (системы уравнений движения С. В. Иорданского), основанной на «усредненном» движении жидкости, содержащей пузырьки газа, в предположении, что пульсация пузырьков подчиняется уравнению Ламба.

При решении линеаризованной системы С. В. Иорданского была получена зависимость фазовой скорости звука от частоты плоской волны. Оценка этой зависимости для некоторого частного распределения пузырьков по размерам совпала с известными экспериментальными результатами.

При условии, что жидкая компонента среды несжимаема, для пузырьков одного сорта в некотором приближении система С. В. Иорданского сведена к системе двух уравнений в частных производных второго порядка относительно давления и концентрации газа в среде. Найдено решение этой системы. Оказалось, что при определенных соотношениях параметров среды (длины, концентрации газа и размера пузырьков) процессы распространения возмущений в пузырьковых средах подобны. Критерий подобия найден из решения системы и подтвержден экспериментально.

Все известные теоретические работы, посвященные рассматриваемому вопросу, можно разделить на два направления, каждое из которых имеет свою модель пузырьковой среды. Обе они основаны на «усредненном» движении жидкости, содержащей пузырьки газа. Отличие заключается в том, что для одной из них [1, 2] давление в пузырьке газа все время равно давлению в жидкости, в другой [3] — пульсация пузырьков определяется уравнением Ламба. В основу предлагаемых ниже расчетов положены уравнения С. В. Иорданского [3].

Эти уравнения в одномерном случае имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \rho = \left(\rho_0 + \frac{p - p_0}{c_0^2} \right) (1 + k)^{-1} \quad (0.1)$$

$$k = \sum_{j=1}^N k_j, \quad \frac{k_j}{k_{j0}} = \left(\frac{R_j}{R_{j0}} \right)^3 \quad \rho_0 \left(R_j \frac{d^2 R_j}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR_j}{dt} \right)^2 \right) = P_0 \left(\frac{R_j}{R_{j0}} \right)^{-3\gamma} - p$$

$$p = p_0, \quad k_j = k_{j0}, \quad R_j = R_{j0} \quad \text{при } t = 0$$

Здесь ρ , p , u — усредненные плотность, давление и скорость частицы в среде, k_j — объемная концентрация газа для пузырьков радиуса R_j . При выводе системы (0.1) в работе [3] были сделаны следующие допущения.

1. Характерный размер среднего движения L , среднее расстояние между пузырьками l и радиус пузырьков R_j удовлетворяют неравенствам $L \gg l \gg R_j$.
2. Несферичностью пузырьков и массой газа пренебрегается.
3. Уравнение состояния написано в акустическом приближении для жидкой компоненты среды.

4. Начальные величины k_{j0} , R_{j0} , p_0 от x не зависят.

По сравнению с уравнениями С. В. Иорданского здесь сделано одно дополнительное допущение: в третьем слагаемом второго уравнения системы (0.1) под знаком дифференциала опущен член

$$\sum_{j=1}^N \rho_0 k_j \left(\frac{dR_j}{dt} \right)^2$$

1. Определим скорость распространения малых возмущений. Проведя линеаризацию системы (0.4) и исключая плотность, получим

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \rho_0 \sum_{j=1}^N k_{j0} \frac{\partial^2 k_j}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial^2 k_j}{\partial t^2} + \Omega_j^2 \frac{k_j}{k_{j0}} = \frac{\Omega_j^2}{\gamma p_0} p \quad \left(\Omega_j^2 = \frac{3\gamma p_0}{\rho_0 R_{j0}^2} \right)$$

Здесь Ω_j — собственная частота пузырька. Решение ищем в виде

$$p = A e^{i(\omega t - mx)}, \quad k_j / k_{j0} = B_j e^{i(\omega t - mx)}$$

Тогда из системы (1.1) для фазовой скорости звука c_2 легко получить следующее соотношение:

$$\frac{c_0^2}{c_2^2} = 1 + \frac{c_0^2}{c_1^2} \sum_{j=1}^N \frac{k_{j0}}{k_0} \left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega_j^2} \right)^{-1} \quad \left(c_1^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0 k_0} \right) \quad (1.2)$$

Здесь c_0 — скорость звука в жидкости, c_1 — скорость звука в среде по равновесной модели [1]. Таким образом, система (1.1) описывает движение с дисперсией.

Устремляя $N \rightarrow \infty$ и переходя к пределу в соотношении (1.2), можем записать

$$\frac{c_0^2}{c_2^2} = 1 + \frac{c_0^2}{c_1^2} \int_0^\infty \frac{k(R) dR}{1 - \omega^2 / \Omega^2(R)} \quad \left(\int_0^\infty k(R) dR = 1 \right) \quad (1.3)$$

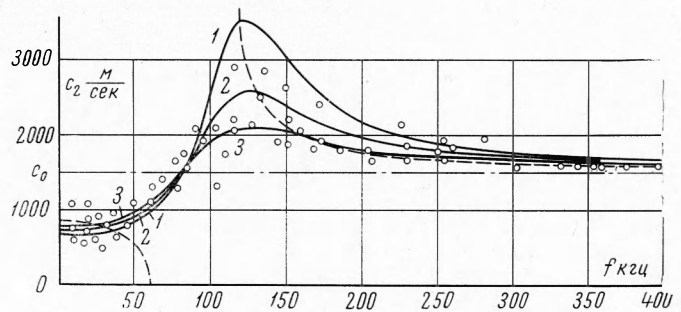
Здесь $k(R)$ — доля концентрации пузырьков данного сорта. Интеграл в соотношении (1.3) для функции $k(R)$ вида

$$\frac{(R/b)^2}{1 + (R/b)^4} \quad (1.4)$$

где b — некоторый масштаб, аппроксимирующей экспериментальное [4] распределение пузырьков по размерам можно определить. В этом случае фазовая скорость оказывается равной

$$\frac{c_0^2}{c_2^2} = 1 + \frac{c_0^2}{c_1^2} \frac{1 - (\omega / \Omega(b))^2}{1 + (\omega / \Omega(b))^4} \quad \left(\Omega^2(b) = \frac{3\gamma p_0}{\rho_0 b^2} \right) \quad (1.5)$$

Здесь $\Omega(b)$ — масштабная частота.



Фиг. 1

На фиг. 1 представлены результаты расчета по уравнению (1.5) зависимости фазовой скорости звука c_2 от частоты f ($f = \omega/2\pi$) при следующих начальных параметрах: $p_0 = 1$ атм, $\gamma = 1.4$; $k_0 = 0.00025, 0.00020, 0.00015$ (кривые, соответственно, 1, 2 и 3). Здесь же частично, представлены результаты работы [4] в виде экспериментальных точек, ограничивающих область разброса экспериментальных данных.

Несмотря на большой разброс экспериментальных данных (что объясняется, по-видимому, нестабильностью концентрации, которая менялась в пределах 0.00015 — 0.00025), нетрудно проследить общий характер зависимости фазовой скорости от частоты.

Расчет проведен для трех концентраций с целью получения разброса расчетных данных в соответствии с экспериментом. Масштаб b выбирался из условия совпадения расчетных данных по соотношению (1.5) с экспериментальными данными в точке $c_2 = c_0$ (на фиг. 1 этой точке соответствует $f = 80 \text{ кгц}$). Пунктирной линией проведена расчетная зависимость действительной величины фазовой скорости звука для среды из одинаковых пузырьков с радиусом $R_0 = 0.0055 \text{ см}$, соответствующим наибольшей «парциальной» концентрации $k_0 = 0.00015$. Совпадение расчетных кривых с экспериментальными данными удовлетворительное.

Из фиг. 1 видно, что $c_2 \rightarrow c_0$ при $f \rightarrow \infty$; в случае очень длинных волн ($f \rightarrow 0$) среда становится полностью равновесной, дисперсия исчезает и $c_2 \rightarrow c_1$ (при $c_0 \gg c_1$).

На основании полученного результата можно сделать вывод, что система (0.1) соответствует реальному течению жидкости с пузырьками газа.

2. Проведем некоторые оценки взаимодействия ударной волны с пузырьковой средой. Для этого преобразуем систему (0.1) при следующих упрощениях.

1. Рассматриваем жидкость с пузырьками только одного сорта.
2. Предполагаем, что $c_0 = \infty$.
3. В первом, втором и четвертом уравнениях системы (0.1) опускаем члены

$$u \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad u \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} \frac{R}{R_0} \right)^2$$

В результате получаем

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \rho_0 k_0 \frac{\partial^2 k}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{d^2 k}{dt^2} \frac{k}{k_0} = \frac{3}{\rho_0 R_0^2} \left(\frac{k}{k_0} \right)^{1/3} \left(p_0 \left(\frac{k}{k_0} \right)^{-\gamma} - p \right) \quad (2.1)$$

Вводим новые обозначения

$$y = \frac{R}{R_0} = \left(\frac{k}{k_0} \right)^{1/3}, \quad \zeta = p - p_0 y^{-3\gamma}, \quad \xi = \left(\frac{d}{dt} \frac{k}{k_0} \right)^2$$

Считая x и y новыми независимыми переменными, ζ и ξ — искомыми функциями, а $\partial y / \partial x$ и u полагая малыми, вместо системы (2.1) получим

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \frac{3k_0 y}{R_0^2} \zeta, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = - \frac{18y^3}{\rho_0 R_0^2} \zeta \quad (2.2)$$

Решение первого уравнения системы (2.2) имеет вид

$$\zeta = A(y) e^{-V \sqrt{\eta}} + B(y) e^{V \sqrt{\eta}} \quad \left(\eta = \frac{(3k_0)^{1/2} x}{R_0} \right) \quad (2.3)$$

Для конкретной задачи A и B могут быть определены, после чего подстановка выражения (2.3) во второе уравнение системы (2.2) даст возможность определить ξ , а следовательно, и $y(t)$.

Рассмотрим следующие случаи.

1. На твердой стенке имеется слой толщиной h равномерно распределенных кавитационных пузырьков начального радиуса R_0 при давлении p_0 . В момент времени $t = 0$ на границе слоя ($x = h$) мгновенно возникает и в дальнейшем поддерживается постоянным давление P . Определим давление на твердой стенке.

Граничные условия для уравнения (2.3)

$$\zeta = P - p_0 y^{-3\gamma} \quad \left(\eta = \eta^* = \frac{(3k_0)^{1/2} h}{R_0} \right)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = 0 \quad (\eta = 0)$$

последнее — в силу симметрии.

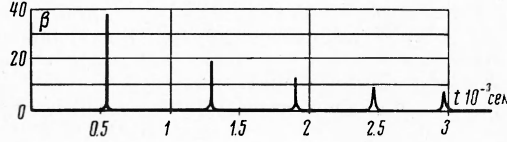
Тогда на твердой стенке получим

$$p = P \frac{2e^{V \sqrt{\eta^*}}}{1 + e^{2V \sqrt{\eta^*}}} + p_0 y^{-3\gamma} \left(1 - \frac{2e^{V \sqrt{\eta^*}}}{1 + e^{2V \sqrt{\eta^*}}} \right) \quad (2.4)$$

Для определения y можно использовать второе уравнение системы (2.2) в его первоначальном виде (уравнение Ламба)

$$\rho_0 R_0^2 \left(\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right) = p_0 y^{-3\gamma} - p \quad (2.5)$$

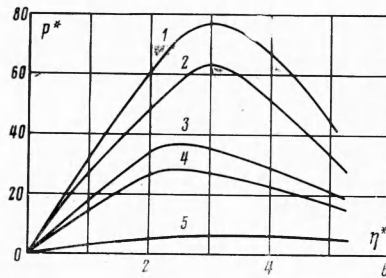
На фиг. 2 представлен результат расчета по уравнениям (2.4) и (2.5) функции



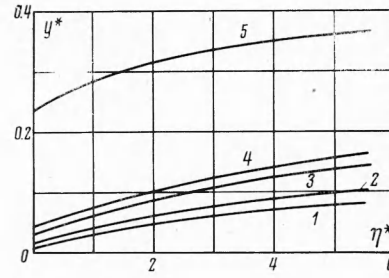
Фиг. 2

$p(t)$ для $P = 100 p_0$ и $\eta^* = 3$. Несмотря на то, что на границе задавалось $P = 1 \text{ атм.}$, на стенке, как видно из фиг. 2, возникает давление в несколько десятков атмосфер. Это подтверждает вывод работы [5] о том, что захлопывание кавитационных пузырьков на плоскости приводит не только к эрозионному повреждению поверхности, но и к генерированию пузырьковой среды импульсов давления на стенке по всей поверхности.

На фиг. 3 и 4 представлены максимальное давление на твердой стенке p^* (в атм) и минимальный радиус схлопнувшегося пузырька y^* (в безразмерной форме) как функции η^* , где кривые 1, 2, 3, 4 и 5 соответствуют значениям $p_0 = 0.33, 0.5, 1, 1.4, 10 [10^4 \text{ дин/см}^2]$.



Фиг. 3



Фиг. 4

Функция y^* (η^*) практически определяет один из основных параметров пульсации «коллективного» пузырька — степень сжатия; второй параметр — время схлопывания t^* (время излучения первого импульса на фиг. 2) — определяются при полной линеаризации системы (2.2) и пренебрежении давлением внутри пузырька

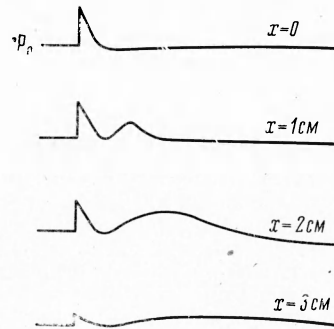
$$t^* = 0.755 R_0 \left(\frac{\rho_0}{P} \right)^{1/2} e^{1/2 \eta^*} \quad (2.6)$$

Совпадение значений t^* , рассчитанных по выражению (2.6) и полученных при численном решении системы (2.2), вполне удовлетворительное.

2. В рассмотренном случае твердая стенка может быть заменена несжимаемой жидкостью, а давление на передней границе можно задавать в виде $P(t)$ (или $P(y)$ — в новых переменных). При этом решение системы (2.2) по-прежнему определяется уравнениями (2.4) и (2.5).

На фиг. 5 представлены результаты расчета формы волны давления в среде на границе с несжимаемой жидкостью для длины пузырькового слоя x соответственно 0, 1, 2, 3 см при концентрации газа $k_0 = 0.08$. Вид $p(t)$ на фиг. 5 при $x=0$ определяет форму исходной ударной волны (на передней границе) со следующими параметрами: максимальная амплитуда — 10 атм, время положительной фазы давления — 10^{-4} сек.

При этих значениях параметров был произведен эксперимент по взаимодействию ударной волны с пузырьковой средой. Результат эксперимента приведен на фиг. 6. Кадры на фиг. 6 соответствуют, как и на фиг. 5) значениям $x = 0, 1, 2, 3 \text{ см.}$, считая сверху вниз. Сравнение фиг. 5 и 6 позволяет заключить, что система (2.2) вполне удовлетворительно описывает характер взаимодействия, учитывая его основные моменты: расслоение ударной волны и передачу энергии излучению пузырьковой среды.



Фиг. 5

Из выражения (2.4) для давления в пузырьковой среде следует, что показатель

$$\eta^* = \frac{(3k_0)^{1/2} h}{R_0} = \frac{\Omega(R_0)h}{c_1} \quad (2.7)$$

играет роль критерия подобия: меняя k_0 , R_0 и h в пределах фиксированного η^* , получим один и тот же результат. Это подобие подтверждено экспериментально. Действительно, при $t=0$, $y=1$ и уравнение (2.4) определяет амплитуду ударной волны, прошедшей через заданный слой.

На фиг. 7 приведена зависимость величины $P^0 = (p - p_0)/P(t)$ при $t=0$ от η^* , которая при $P \gg p_0$ будет универсальной, не зависящей от P . На график нанесены экспериментальные данные для $P^0(\eta^*)$ при различных начальных концентрациях газа k_0 в среде: 1 — 0.004, 2 — 0.02, 3 — 0.06, 4 — 0.08, 5 — 0.10, 6 — 0.15. Совпадение вполне удовлетворительное.

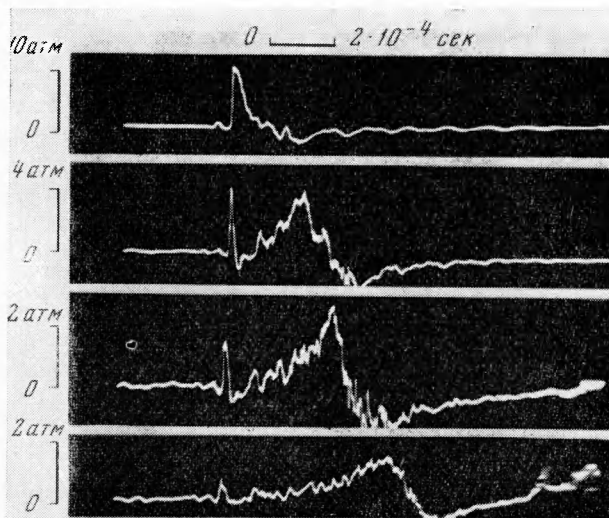
3. Коэффициенты в уравнении (2.3) могут быть определены и для полубесконечной пузырьковой среды в предположении об ограниченности решения на бесконечности. В этом случае вместо (2.4) имеем

$$p = P e^{-V \bar{y}^\eta} + p_0 y^{-3\gamma} (1 - e^{-V \bar{y}^\eta}) \quad (2.8)$$

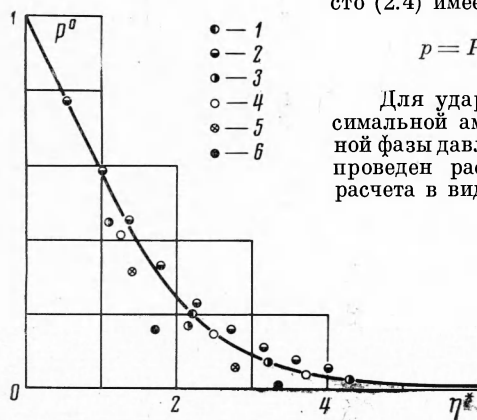
Для ударной волны треугольного профиля с максимальной амплитудой 20 атм, временем положительной фазы давления 10^{-4} сек при $k_0 = 0.002$ и $R_0 = 0,4$ см проведен расчет по соотношению (2.8). Результаты расчета в виде кривых 1, ..., 9 распределения давления (в атм) в среде для различных фиксированных моментов времени (1 — 1,4; 2 — 2,5, 3 — 3,3, 4 — 4,4, 5 — 5,8, 6 — 22,7, 7 — 32,9, 8 — 39,1, 9 — 46,1 [10^{-4}] сек) представлены на фиг. 8. Видно, как по мере с переменной скоростью распространяется волна, амплитуда которой экспоненциально убывает во времени.

Через некоторое время (в силу того, что пузырьки продолжают пульсировать) в начальных слоях вновь возникает волна сжатия, которая снова распространится внутрь слоя.

3. Система уравнений движения жидкости, содержащей пузырьки газа, может быть записана в варианте, отличном от вида (0.1): уравнение Ламба заменяется уравнением сохранения энергии. Последнее может быть получено из простых физических представлений о характере взаимодействия волны сжатия с пузырьковой средой. Очевидно, в процессе распространения волна должна тратить энергию на изменение внутренней энергии газа E_n и кинетической энергии жидкости T_n за счет пульсирующих пузырьков. При этом полагаем, что изменение внутренней и кинетической энергии жидкой компоненты среды мало.



Фиг. 6



Фиг. 7

