Прикладная механика и техническая физика, 1996, т. 37, № 1

ИССЛЕДОВАНИЕ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК

УДК 539.3

И. Г. Емельянов

Институт машиноведения РАН, 620219 Екатеринбург

При решении задач о напряженно-деформированном состоянии многослойных оболочечных конструкций необходимо учитывать условия работы смежных слоев. В основном исследования посвящены вопросам механики оболочек в предположении об идеальном механическом контакте слоев. Современное состояние и подходы к решению задач теории многослойных оболочек с возможными зонами расслоения отражены в [1].

Цель данной работы — найти подход для решения двухслойных оболочек вращения с учетом возможного одностороннего характера контактного взаимодействия с позиции контактных задач [2, 3]. В [4] рассматривалось взаимодействие ортотропных слоев по известной в одном направлении области контакта. Поверхности разделов слоев моделировались адгезионными прослойками с различными коэффициентами постели, различными толщинами и характером деформирования на отрыв. В данной работе подход [4] обобщается на класс двумерно-контактных задач. В результате предлагаемого решения находятся неизвестная область контакта между слоями в двух направлениях $\hat{\Omega}_+(s,\hat{\theta})$, распределение контактного давления $q(s,\theta)$ и напряженное состояние оболочки в зависимости от действия контактного давления и внешнего нагружения.

Будем считать, что каждый слой двухслойной оболочки описывается своими дифференциальными уравнениями. Предполагается, что слои подчинены геометрически и физически условиям линейной теории оболочек, действуют нулевые напряжения и деформации, постоянное поле температур, контакт между слоями происходит без трения и проскальзывания. При рассмотрении эквидистантных слоев с зазором зазор не должен превышать толщины оболочки, поскольку используется геометрически линейная теория. Исходная система равновесия слоев оболочки, взаимодействующих между собой, имеет вид [5]

$$\begin{gathered} L^{(i)}\mathbf{Y}^{(i)} = \mathbf{f}^{(i)} - (-1)^i q\lambda M, \quad i = 1, 2, \\ \lambda(s,\theta \in \Omega_+) = 1, \quad \lambda(s,\theta \notin \Omega_+) = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

где i — номер слоя оболочки; L — матричный дифференциальный оператор; $\mathbf{Y}$ — искомый вектор разрешающих функций; $\mathbf{f}$ — вектор-функция внешней распределенной нагрузки; M — столбец, элемент которого, отвечающий уравнению равновесия в проекции на нормаль к поверхности Ω_+, равен единице, а остальные элементы — нулю; s, θ — координаты поверхности оболочки по меридиану и окружности.

Для многих моделей оболочек разрешающая система уравнений в системе главных кривизн α, β имеет вид [6]

$$\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \alpha} = \sum_{m=0}^{4} A_m(\alpha,\beta)\,\frac{\partial^m \mathbf{Y}}{\partial \beta^m} + \mathbf{f}(\alpha,\beta). \tag{2}$$

Здесь матрицы A зависят от геометрических и механических характеристик, а размерность вектора $\mathbf{Y}$ и порядок уравнений m — от выбранной модели оболочки.

Учитывая (1) и (2), систему дифференциальных уравнений, описывающую контактное взаимодействие слоев оболочки вращения, запишем следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{Y}^{(i)}}{\partial s} = \sum_{m=0}^{4} A_m^{(i)}(s,\theta)\,\frac{\partial^m \mathbf{Y}^{(i)}}{\partial \theta^m} + \mathbf{f}^{(i)}(s,\theta) - (-1)^i q\lambda M, \quad i = 1, 2. \tag{3}$$

Система (3) должна быть дополнена граничными условиями для двух контуров каждого слоя $s = s_0$ и $s = s_L$ [6]:

$$B_1^{(i)}\mathbf{Y}^{(i)}(s_0) = \mathbf{b}_1^{(i)}, \quad B_2^{(i)}\mathbf{Y}^{(i)}(s_L) = \mathbf{b}_2^{(i)}, \quad i = 1, 2$$

(B — заданные матрицы размерностью $n \times n/2$ (n — размерность $\mathbf{Y}$), $\mathbf{b}$ — заданные векторы), а также условием непроникновения слоя в слой [5].

Поскольку в системе (3) q — функция двух координат, то эта система описывает класс двумерных контактных задач. В данной работе будем использовать классическую теорию анизотропных неоднородных оболочек [6, 7].

Особенностью решаемых задач является исследование размера неизвестной области контакта $\Omega_+(s,\theta)$, т. е. задач со свободной границей, в которой должно выполняться условие

$$q(s, \theta \in \Omega_+) \geqslant 0. \tag{4}$$

Дополним искомую область контакта Ω_+ областью расслоения Ω_- до некоторой заданной области Ω, целиком содержащей свободную границу. Область Ω разобьем на равные участки в окружном и меридиональном направлении. В пределах полученных элементов, учитывая их незначительные размеры, будем считать, что связь слоев оболочки осуществляется через неизвестные усилия X, приложенные в ряде точек области Ω, следовательно,

$$\Omega = \sum_{j}^{K}\sum_{i}^{N} F_{ij},$$

где $F = a_\theta \times a_s$ — площадь контактного элемента; a_θ, a_s — линейные размеры по окружности и меридиану; N, K — число элементов по окружности и меридиану.

Данная дискретизация области Ω [2, 3] позволяет задачи межслоевого взаимодействия сводить к известным методам анализа напряженно-деформированного состояния ортотропных оболочек вращения, построенным на сведении краевой задачи к ряду задач Коши с ортогонализацией по С. К. Годунову [6].

Поскольку контактную нагрузку (нагрузку взаимодействия между слоями) можно представить определенным количеством неизвестных абсолютно жестких связей, для их определения применяется метод сил строительной механики. Каноническая система уравнений, описывающая условие сопряжения слоев выделенного из оболочки кольца, имеет вид

$$\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{N} \delta_{1i}^{(1)} X_i^{(1)} + \underline{\sum_{i=1}^{N} \delta_{1i}^{(2)} X_i^{(2)}} + \ldots + \underline{\sum_{i=1}^{N} \delta_{1i}^{(k)} X_i^{(k)}} + DX_1^{(1)} + \Delta_{P1}^{(1)} + \Delta_{R1}^{(1)} = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sum_{i=1}^{N} \delta_{Ni}^{(1)} X_i^{(1)} + \underline{\sum_{i=1}^{N} \delta_{Ni}^{(2)} X_i^{(2)}} + \ldots + \underline{\sum_{i=1}^{N} \delta_{Ni}^{(k)} X_i^{(k)}} + DX_N^{(1)} + \Delta_{PN}^{(1)} + \Delta_{RN}^{(1)} = 0.
\end{gathered} \tag{5}$$

Здесь δ_{ij} — перемещение в основной системе по направлению i-й связи от единичного усилия, введенного по направлению отброшенной j-й связи; Δ_{Ri} — величина зазора по направлению i-й связи для задач не связанных между собой слоев; Δ_{Pi} — перемещение по направлению i-й связи, вызванное действием заданной внешней нагрузки на оболочку [3]; D — оператор, связывающий реактивное усилие i-й точки поверхности возможных упругих прокладок (либо упругих свойств микрогеометрии контактирующих поверхностей) между слоями и ее перемещение (принимая модель Винклера, имеем $D = (CF)^{-1}$, где C — коэффициент постели); $N = 2t_\theta(a_\theta)^{-1}$ ($2t_\theta$ — длина Ω по окружности); неподчеркнутые слагаемые определяют сопряжение первого кольца для одномерных контактных задач [4], а подчеркнутые — влияние оставшихся $K-1$ колец на первое. Податливость контактного элемента оболочки (функция влияния) δ_{ij} в системе (5) строится численно, интегрированием уравнения для каждого слоя оболочки от единичных ступенчатых усилий, распределенных на каждом элементе [3].

Учитывая вертикальную симметрию задачи относительно сечения $\theta = 0$, систему (5) в матричном виде запишем как

$$[H_{11} H_{12} \ldots H_{1K}] \begin{bmatrix} \{X^{(1)}\} \\ \{X^{(2)}\} \\ \ldots \\ \{X^{(k)}\} \end{bmatrix} + \{\Delta_P^{(1)}\} + \{\Delta_R^{(1)}\} = 0,$$

где $X_1^{(1)} \ldots X_M^{(1)} \ldots X_1^{(k)} \ldots X_M^{(k)}$ — векторы неизвестных усилий контактного взаимодействия ($M = N/2$); $\{\Delta_P^{(1)}\} = \{\Delta_{P1}^{(1)} \ldots \Delta_{PM}^{(1)}\}$ — вектор перемещений первого кольца от действия внешних сил P; $\{\Delta_R^{(1)}\} = \{\Delta_{R1}^{(1)} \ldots \Delta_{RM}^{(1)}\}$ — вектор зазоров;

$$H_{mp} = \begin{bmatrix} w_{1mp} + w_{2mp} + \delta^*_{mp} D & w_{2mp} + w_{3mp} & w_{3mp} + w_{4mp} & \ldots & \ldots & w_{Mmp} + w_{M+1,mp} \\ & w_{1mp} + w_{4mp} + \delta^*_{mp} D & w_{2mp} + w_{5mp} & \ldots & \ldots & w_{M-1,mp} + w_{M-2,mp} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ (\text{ симметрично }) & & & & \ldots & w_{1mp} + w_{2M,mp} + \delta^*_{mp} D \end{bmatrix}. \quad (6)$$

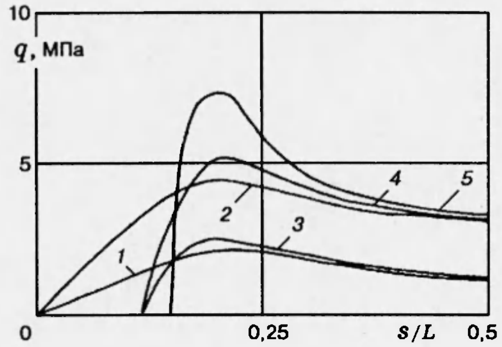
В матрице (6) введена трехмерная индексация nmp ($n = 1 \div 2M$ — номер элемента на окружности, $m = 1 \div K$ — номер кольца, $p = 1 \div K$ — номер кольца, на котором приложена единичная сила); δ^*_{mp} — символ Кронекера; $w_i = \delta_{1i}$ и $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ ($i = 1, \ldots, N$).

Аналогичным образом составляются уравнения сопряжения для всех K колец и сводятся в одну систему:

$$\begin{bmatrix} [H_{11}] & [H_{12}] & \ldots & [H_{1k}] \\ [H_{21}] & [H_{22}] & \ldots & [H_{2k}] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ [H_{k1}] & [H_{k2}] & \ldots & [H_{kk}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{X^{(1)}\} \\ \{X^{(2)}\} \\ \ldots \\ \{X^{(k)}\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \{\Delta_p^{(1)}\} \\ \{\Delta_p^{(2)}\} \\ \ldots \\ \{\Delta_p^{(k)}\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \{\Delta_R^{(1)}\} \\ \{\Delta_R^{(2)}\} \\ \ldots \\ \{\Delta_R^{(k)}\} \end{bmatrix} = 0. \quad (7)$$

Система (7) состоит из $K \times M$ уравнений и имеет $K \times M$ неизвестных величин; следовательно, уравнения, определяющие контактные взаимодействия (7) в первом приближении, можно представить в виде системы линейных алгебраических уравнений

$$[\hat{A}]_j \{\hat{X}\}_j = \{\hat{B}_P\}_j + \{\hat{B}_R\}_j, \quad j = 1, \quad (8)$$



где вектор правых частей $\{\widehat{B}_P\}_j$ будет находиться путем интегрирования какого-либо слоя оболочки, на котором приложена внешняя нагрузка.

Система уравнений (8) при решении задач с двухсторонними связями (расслоения не происходит) полностью определяет вектор контактных давлений $\{q\} = X_i F^{-1}$, $i = 1, \dots, M$. При решении задач с односторонними связями [8] должно выполняться условие (4), и необходимо найти такую разрешающую систему, чтобы контактное давление было положительным в местах контакта слоев оболочки и равнялось нулю в возможных зонах расслоения. Для нахождения тех неизвестных, которые необходимо исключить, используется метод последовательных приближений, обычно применяемый при решении контактных задач численными методами [5, 9], который заключается в том, что j-е приближение строится с использованием предыдущего $(j-1)$-го приближения и с учетом отсутствия связи на тех участках, где $X < 0$.

При решении задач для слоев, связанных клеевой прослойкой, при ограниченной работе клеевого соединения на растяжение задача решается так же, как и для системы с односторонними связями, однако условие выключения неработающих связей имеет вид $X_i/F < \sigma_к$ ($\sigma_к$ — предел прочности клеевого соединения).

Определение напряженно-деформированного состояния рассматриваемой оболочки сводится к интегрированию уравнений для каждого слоя оболочки от внешней нагрузки P и найденной контактной нагрузки [3]:

$$\{Q_\Sigma\} = \{P\} + \{Q\}, \quad \{Q\}_j \in \Omega_+, \quad \{P\} \in \Omega_0$$

(Ω_0 — поверхность оболочки, на которой приложен вектор внешней нагрузки).

Поскольку функция суммарной нагрузки $\{Q_\Sigma\}$, установленная на множестве контактных элементов, периодическая с периодом $2M$ и четная, ее можно разложить в ряд Фурье по косинусам [2, 10]. Коэффициенты разложения для каждого j-го кольца имеют вид

$$a_k^{(j)} = \frac{2}{M}\left[\frac{1}{2}q_{\Sigma 0}^{(j)} + \sum_{i=1}^{M-1} q_{\Sigma i}^{(j)} \cos\frac{\pi k}{M} i + \frac{1}{2}(-1)^k q_{\Sigma M}^{(j)}\right], \quad b_k^{(j)} = 0.$$

В качестве примера для иллюстрации предлагаемого метода рассматривалось взаимодействие соосных цилиндрических оболочек одинаковой длины ($L = 0{,}1524$ м) и одинаковой толщины ($h = 0{,}254 \cdot 10^{-2}$ м). Данная задача взаимодействия не связанных между собой оболочек (слоев) рассматривалась в работах [5, 11]. Две жесткозакрепленные оболочки (радиус внутренней оболочки $R_2 = 0{,}0762$ м) расположены с зазором $\Delta_R = 0{,}0127 \cdot 10^{-2}$ м. Внутренняя оболочка нагружена давлением $p = 20{,}67$ МПа. Материал оболочек изотропный с модулем упругости $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ МПа и коэффициентом Пуассона $\nu = 0{,}3$. Угол

Таблица 1

K	M					
	1	2	3	4	5	6
	q, МПа					
1	0,7373	0	0	0,6721	0	0
2	2,6450	0	0	0,2469	0	0
3	5,2840	0	0	0,4716	0	0
4	8,8920	0	0	0,6646	0	0
5	12,33	0	0	0,7784	0	0
6	12,33	0	0	0,7752	0	0
7	8,884	0	0	0,6586	0	0
8	5,273	0	0	0,4640	0	0
9	2,636	0	0	0,2413	0	0
10	0,7352	0	0	0,6580	0	0

Таблица 2

K	M					
	1	2	3	4	5	6
	q, МПа					
1	0,734	−0,221	−0,217	0,655	−0,0003	−0,0068
2	2,634	−0,8757	−0,6981	0,2404	−0,008	−0,023
3	5,266	−1,892	−1,148	0,4618	−0,0286	−0,0404
4	8,870	−3,026	−1,445	0,6542	−0,05497	−0,054
5	12,31	−3,822	−1,594	0,767	−0,07451	−0,062

разбиения по окружности $\Delta\theta = 30°$.

При решении данной задачи число разбиений оболочек по окружности N непринципиально. Однако увеличение числа разбиений оболочек по меридиану K лучше иллюстрирует краевой эффект. Проведено решение для двух значений длины контактного элемента по меридиану a_s. В первом случае половина области Ω аппроксимируется 60 контактными элементами площадью $F = a_\theta a_s = 3{,}99 \cdot 1{,}524 = 6{,}08$ см^2. Следовательно, порядок матрицы в (6) $M = 6$, в (7) $K = 10$. Поскольку внешнее нагружение и зазор осесимметричны, а также задача имеет симметрию относительно сечения $s = 0{,}5L$, контактное давление q получается осесимметричным и приводится для четверти области Ω.

На рисунке показано распределение контактного давления по меридиану оболочки. Кривые *1*, *2* соответствуют расчету с коэффициентом постели $C = 100C_{\text{P}}$ и $500C_{\text{P}}$ ($C_{\text{P}} = 10^8$ Н/м^3 отвечает упругим свойствам вакуумной резины [9]), *3*, *4* — уточненному положению кривых *1* и *2*, полученных при решении задачи с более мелким шагом по меридиану, с контактными элементами площадью $F = a_\theta a_s = 3{,}99 \cdot 0{,}762 = 3{,}04$ см^2 ($M = 6$, $K = 20$), кривая *5* — численное решение [5]. Близкое решение данной задачи к решению по предлагаемой методике получено аналитически в работе [11].

В табл. 1 приведено распределение контактного давления q в МПа по окружности ($M = \overline{1, 6}$) и меридиану ($K = \overline{1, 10}$) для неосесимметричного нагружения двухслойной оболочки (без зазора). Внешним нагружением служит сила $P = 10000$ Н, распределенная на площадке $F_p = a_\theta 2a_s$ с центром в $s = L/2$, $\theta = 0$, приложенная к внешнему слою. Решение найдено при $F = 6{,}08$ см^2 и $C = C_P$. Косвенным подтверждением правильности вычислений является симметрия решения относительно сечения $s = 0{,}5L$. Принятый при расчете коэффициент постели C, имитирующий микронеровности контактирующих поверхностей, а также упругие свойства клеевой прослойки и предел прочности клеевого соединения $\sigma_к = 0$, обеспечивает контактирование в месте приложения локальной силы P ($K = 5$, 6 и $M = 1$) и образование сложных зон расслоения.

В табл. 2 показано распределение q (межслоевого напряжения) для безотрывной работы слоев. Из приведенных результатов следует, что данный расчетный случай может реализовываться, когда предел прочности клеевого соединения на отрыв $\sigma_к > 3{,}822$ МПа ($K = 5$, $M = 2$).

Таким образом, предложенный подход и его реализация с использованием устойчивых численных методов позволяют определять межслоевые напряжения в оболочках слоистой структуры, неизвестные в двух направлениях зоны расслоения и учитывать неоднородные адгезионные прослойки, односторонний характер взаимодействия слоев, анизотропию материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Григолюк Э. И., Коган Е. А., Мамай В. И.** Проблемы деформирования тонкостенных слоистых конструкций с расслоениями // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 2. С. 6–32.
2. **Емельянов И. Г.** Численный анализ контактного взаимодействия цилиндрических оболочек // Прикл. механика. 1987. Т. 23, № 6. С. 68–72.
3. **Василенко А. Т., Емельянов И. Г.** Контактная задача для тонкой цилиндрической оболочки, лежащей на круговом основании // Пробл. прочности. 1990. № 6. С. 81–86.
4. **Василенко А. Т., Емельянов И. Г.** Исследование контактного взаимодействия слоев в оболочках вращения // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 3. С. 158–163.
5. **Кантор Б. Я.** Контактные задачи нелинейной теории оболочек вращения. Киев: Наук. думка, 1990.
6. **Григоренко Я. М., Василенко А. Т.** Методы расчета оболочек. В 5 т. Киев: Наук. думка, 1981. Т. 4. Теория оболочек переменной жесткости.
7. **Амбарцумян С. А.** Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974.
8. **Рабинович И. М.** Вопросы теории статического расчета сооружений с односторонними связями. М.: Стройиздат, 1975.
9. **Моссаковский В. И., Гудрамович В. С., Макеев Е. М.** Контактное взаимодействие элементов оболочечных конструкций. Киев: Наук. думка, 1988.
10. **Хемминг Р. В.** Численные методы. М.: Наука, 1968.
11. **Kulkarni S. V., Frederick D.** The contact problem of two coaxial cylindrical shell // Int. J. Mech. Sci. 1973. V. 15, N 5. P. 367–379.

Поступила в редакцию 29/VIII 1994 г.,
в окончательном варианте — 19/I 1995 г.