

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ МАЛЫХ ИЗГИБНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПО ПЛОСКИМ ПЛЕНКАМ ВОДЫ И РАСТВОРОВ ПОЛИМЕРОВ

В. М. Ентов, А. Н. Рожков, У. Ф. Фейзханов,  
А. Л. Ярин

(Москва)

По свободным пленкам жидкости могут распространяться возмущения толщины (свободные поверхности пленки искривляются в противофазе) и изгибные возмущения (поверхности искривляются синфазно) [1, 2]. В данной работе (продолжение [3]) теоретически и экспериментально исследуется картина изгибных возмущений на плоских свободных пленках воды и водных растворов полимеров. Рассматриваются пленки, в которых невозмущенное течение радиальное. Выведены уравнения малых возмущений в виде осесимметричных бегущих и стоячих волн. Рассчитаны картины линий постоянной фазы, отражения волн возмущений от краевых свободных ребер пленок, проанализирован рост амплитуды возмущений. Показано, что по картине изгибных возмущений можно оценить внутренние напряжения в жидкости, обусловленные ее упругими свойствами. Измеренные в эксперименте напряжения и эффективные значения вязкости на 3—4 порядка превосходят соответствующие величины в пленках воды.

**1. Уравнения малых изгибных возмущений, распространяющихся по дискообразной пленке.** Будем считать, что свободная пленка создается либо при сходе жидкости с миниатюрной плоской круговой мишени, на которую по нормали натекает цилиндрическая струйка, либо при истечении жидкости из отверстия в виде вытянутой щели со скругленными краями [1—4]. Ограничимся случаями, когда искривление пленки силой тяжести пренебрежимо мало, причем пленка либо круглая, либо представляет собой сектор дискообразной пленки, ограниченной свободными ребрами [3]. Рассмотрим два типа изгибных возмущений: I — нестационарные возмущения, генерируемые колебаниями мишени или насадка по нормали к пленке (бегущие волны), линии постоянной фазы круговые (рис. 1, а); II — несимметричные относительно оси симметрии диска стационарные возмущения, источники которых — дефекты на срезе мишени или насадка (рис. 1, б) (стоячие волны). Оба типа возмущений приводят к искривлению срединной поверхности пленки.

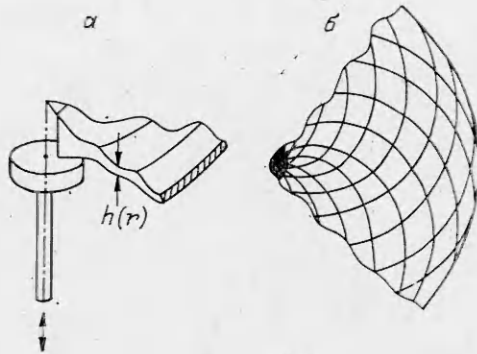
Описание движения жидкости в данном случае естественно вести в рамках квазидвумерного подхода, когда все величины осредняются по толщине пленки, предполагаемой тонкой. Система квазидвумерных уравнений неразрывности и количества движения для тонких свободных пленок получена в [5, 6]. Введем полярную систему координат  $r, \theta$  с началом, расположенным на оси мишени либо в полюсе скоростей [3], так что для невозмущенного течения  $V_r^* = V_r^*(r)$ ,  $V_\theta^* = 0$ . Для малых возмущений после линеаризации уравнений неразрывности и количества движения проекция последнего уравнения на нормаль к срединной поверхности пленки отделяется и имеет вид

$$(1.1) \quad \rho r h^* \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + 2 \rho r h^* V_r^* \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial t} + \rho r h^* V_r^{*2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} = (\sigma_{rr}^* r h + 2 \alpha r) \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} +$$

$$+ (\sigma_{\theta\theta}^* h^* + 2 \alpha) \left( \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} \right).$$

Здесь  $t$  — время;  $\chi$  — амплитуда волны возмущения;  $\rho$  — плотность;  $h^*$  — невозмущенная толщина пленки (дискообразные пленки утоньшаются по мере удаления от среза мишени или насадка);  $V_r^*$  — радиальная скорость жидкости в пленке;  $\sigma_{rr}^*$  и  $\sigma_{\theta\theta}^*$  — радиальное и азимутальное внутренние напряжения в жидкости (звездочками всюду отмечаются параметры невозмущенного течения);  $\alpha$  — коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

Уравнение (1.1) справедливо для пленок жидкостей с произвольным реологическим поведением при наличии волн малых возмущений обоих



Р и с. 1

типов. Для идеальной жидкости (воды)  $V_r^* = V_0 = \text{const}$  ( $V_0$  — скорость жидкости на срезе мишени или насадка),  $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = 0$ ; при этом из уравнения неразрывности для стационарной пленки следует равенство  $rh^* = R_0 H_0$ , где  $R_0$  — радиус среза мишени (насадка), а  $H_0$  — толщина пленки на срезе.

В качестве модели упруговязкой жидкости примем максвелловскую модель с верхней конвективной производной [7]. Параметры невозмущенного течения

определяются путем интегрирования уравнений динамики пленки [3]

$$(1.2) \quad \begin{aligned} rh^* V_r^* &= r_0 h_0 v_0, \\ \rho r_0 h_0 v_0 \frac{dV_r^*}{dr} &= \frac{d}{dr} (\sigma_{rr}^* r h^*) - \sigma_{\theta\theta}^* h^*, \\ V_r^* \frac{d\tau_{zz}^*}{dr} &= -2\tau_{zz}^* \left( \frac{dV_r^*}{dr} + \frac{V_r^*}{r} \right) - \frac{\tau_{zz}^*}{\lambda} - \frac{2\mu}{\lambda} \left( \frac{dV_r^*}{dr} + \frac{V_r^*}{r} \right), \\ V_r^* \frac{d\tau_{rr}^*}{dr} &= 2\tau_{rr}^* \frac{dV_r^*}{dr} - \frac{\tau_{rr}^*}{\lambda} + \frac{2\mu}{\lambda} \frac{dV_r^*}{dr}, \\ V_r^* \frac{d\tau_{\theta\theta}^*}{dr} &= 2\tau_{\theta\theta}^* \frac{V_r^*}{r} - \frac{\tau_{\theta\theta}^*}{\lambda} + \frac{2\mu}{\lambda} \frac{V_r^*}{r}, \\ \sigma_{rr}^* &= \tau_{rr}^* - \tau_{zz}^*, \quad \sigma_{\theta\theta}^* = \tau_{\theta\theta}^* - \tau_{zz}^* \end{aligned}$$

( $\tau_{zz}^*$ ,  $\tau_{rr}^*$  и  $\tau_{\theta\theta}^*$  — девиаторные напряжения в пленке, ось  $z$  нормальна к плоскости невозмущенной пленки,  $\mu$  и  $\lambda$  — вязкость и время релаксации жидкости), первое из которых есть уравнение неразрывности, второе выражает баланс количества движения в радиальном направлении, а следующие три реологические. В качестве первого приближения примем, что при  $r_0 \leq r \leq R_0$  ( $r_0$  — некоторое значение радиуса) течение на мишени или внутри насадка развивается так же, как и в свободной пленке, а потери на трение о твердые поверхности невелики. При этом (1.2) интегрируются с условиями

$$(1.3) \quad V_r^* = v_0, \quad h^* = h_0, \quad \tau_{zz}^* = \tau_{rr}^* = \tau_{\theta\theta}^* = 0, \quad r = r_0.$$

**2. Малые осесимметричные изгибные возмущения на пленке воды (тип I).** В этом случае  $\partial/\partial\theta = 0$ , девиаторные напряжения в жидкости отсутствуют. Уравнение (1.1) в безразмерных переменных приобретает вид

$$(2.1) \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial t} + \left( 1 - \frac{r}{We} \right) \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} = \frac{1}{We} \frac{\partial \chi}{\partial r}.$$

Здесь в качестве масштабов длины и времени используются  $R_0$  и  $R_0/V_0$ ; число Вебера  $We = \rho h_0 V_0^2 / (2\alpha)$ .

Характеристики гиперболического уравнения (2.1) удовлетворяют

$$(2.2) \quad \frac{dr}{dt} = 1 \pm \sqrt{\frac{r}{We}}.$$

При  $1 \leq r < We$  возмущения переносятся от среза мишени или насадка, и для (2.1) ставится задача Коши с условиями

$$(2.3) \quad \chi = \chi_s e^{i\omega t}, \quad \frac{\partial \chi}{\partial r} = 0, \quad r = 1.$$

Задаются частота гармонических возмущений  $\omega_1$  (действительное число,  $\omega = \omega_1 R_0 / V_0$ ) и угол схода пленки со среза.

Полагая в соответствии с (2.3)  $\chi(r, t) = \psi(r) \exp(i\omega t)$ , получаем для  $\psi(r)$  из (2.1) уравнение Бесселя, решение которого есть

$$(2.4) \quad \psi = \left(1 - \frac{r}{We}\right)^{i\omega We} \left[ C_1 J_\nu \left( 2i\omega We \sqrt{1 - \frac{r}{We}} \right) + C_2 J_{-\nu} \left( 2i\omega We \sqrt{1 - \frac{r}{We}} \right) \right], \quad \nu = 2\omega We i.$$

Постоянные коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  определяются условиями (2.3), причем  $C_1$ , вообще говоря, не равно нулю. Соответственно при  $r \rightarrow We - 0$   $\psi = \text{const}(1 - r/We)^{2\omega We i} + \text{const}$ , и амплитуда возмущения не является непрерывной при  $r = We$  как функция  $\cos[2\omega We \ln(1 - r/We)]$ . Невозможность продолжить возмущенное решение в область  $r > We$  в физически разумном классе непрерывных функций указывает на то, что рассматриваемое невозмущенное течение в виде монотонно утоньшающейся пленки вообще не может существовать при  $r > We$ . Действительно, в соответствии с [1] при  $r = We$  возникает кольцевое свободное ребро — валик волны разгрузки от сил поверхностного натяжения; при этом пленка воды разрушается на капли, а диск существует только в области  $1 \leq r < We$ .

Решение (2.4), выраженное через функции Бесселя мнимого порядка, неудобно для описания распространения волны. Поэтому независимо от (2.4) построим решение для коротковолновых возмущений ( $\varepsilon = \omega^{-1} \ll 1$ ) в области  $1 \leq r \leq We$ . Вводя переменные  $\xi = t + We \ln(1 - r/We)$ ,  $\eta = r$  и представляя искомую амплитуду возмущения с учетом (2.3) в виде  $\chi = \Phi(r) \exp(i\omega \xi)$ , из (2.1) имеем

$$(2.5) \quad \varepsilon^2 \left(1 - \frac{r}{We}\right) \Phi'' - \frac{\varepsilon^2}{We} \Phi' + \frac{r/We}{1 - r/We} \Phi = 0.$$

Найдя с помощью асимптотического метода многих масштабов [8] решение уравнения (2.5) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в области, где  $1 - r/We = O(1)$ , получаем

$$(2.6) \quad \chi = r^{-1/4} \exp \left\{ i\omega \left[ t + We \ln \left( 1 - \frac{r}{We} \right) \right] \right\} \left\{ D_1 \exp \left[ -i\omega \left( -2 \sqrt{r We} + We \ln \frac{1 + \sqrt{r/We}}{1 - \sqrt{r/We}} \right) \right] + D_2 \exp \left[ i\omega \left( -2 \sqrt{r We} + We \ln \frac{1 + \sqrt{r/We}}{1 - \sqrt{r/We}} \right) \right] \right\}.$$

В соответствии с (2.6) возмущения, переносимые характеристиками, представляют собой волны Даламбера с убывающей как  $r^{-1/4}$  амплитудой;  $D_1$  и  $D_2$  — константы. В пограничном слое, где  $(1 - r/We) = O(\varepsilon)$ , найдя решение (2.5) методом многих масштабов, имеем

$$(2.7) \quad \chi = \exp \{ i\omega [t + We \ln \varepsilon y] \} \left\{ E_1 \exp \left[ i \left( -\frac{We}{2} y + \omega We \ln y \right) \right] + E_2 \exp \left[ i \left( \frac{We}{2} y - \omega We \ln y \right) \right] \right\}, \quad y = \frac{1 - r/We}{\varepsilon} = O(1).$$

Здесь  $E_1$  и  $E_2$  — постоянные; амплитуда волн возмущений в пограничном слое постоянна.

Переходя во внешнем решении (2.6) к внутренней переменной  $y$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим

$$(2.8) \quad \chi = We^{-1/4} e^{i\omega t} \left\{ D_1 \exp \left[ i\omega \left( 2 We \ln \varepsilon y - 2 We \ln 2 + 2We - \frac{We \varepsilon y}{2} \right) \right] + D_2 \exp \left[ i\omega \left( -2 We + \frac{We \varepsilon y}{2} + 2 We \ln 2 \right) \right] \right\}.$$

Сравнивая (2.8) с (2.7), видим, что сращивание внешнего и внутреннего решений (2.6) и (2.7) достигается при

$$(2.9) \quad E_1 = We^{-1/4} D_1 \exp [i\omega(-2We \ln 2 + 2We + We \ln \varepsilon)], \\ E_2 = We^{-1/4} D_2 \exp [-i\omega(-2We \ln 2 + 2We + We \ln \varepsilon)].$$

Оставшиеся неопределенными константы  $D_1$  и  $D_2$  (через которые в соответствии с (2.9) выражаются  $E_1$  и  $E_2$ ) вычисляются при подстановке (2.6) в условия (2.3). Легко видеть, что в соответствии с (2.7) при  $r = We$  амплитуда  $\chi$  испытывает разрыв непрерывности, как и точное решение (2.4).

Вводя волновое число  $k = \omega/(dr/dt)$  и длину волны  $l = 2\pi/k$ , с помощью (2.2) находим

$$l = 2\pi\epsilon \left( 1 \pm \sqrt{\frac{r}{We}} \right)$$

( $l$  отнесено к  $R_0$ ). Длина одной из волн растет при распространении от среза мишени или насадка, а другой — убывает, обращаясь в нуль при  $r = We$ .

**3. Стационарные волны изгиба (тип II).** Переходя к безразмерным переменным, как в п. 2, запишем (1.1) для возмущений типа II ( $\partial/\partial t = 0$ ) в случае идеальной жидкости в виде

$$(3.1) \quad \left( 1 - \frac{r}{We} \right) \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - \frac{1}{r We} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2} = \frac{1}{We} \frac{\partial \chi}{\partial r}.$$

Это уравнение смешанного типа: при  $1 \leq r \leq We$  гиперболическое, при  $r > We$  эллиптическое. Условиями задачи Коши для (3.1) будут

$$(3.2) \quad \chi = \chi_0 e^{is\theta}, \quad \partial \chi / \partial r = 0, \quad r = 1.$$

Решение уравнения (3.1) ищем в виде  $\chi = e^{is\theta} \Phi(r)$ . В случае коротковолновых возмущений, представляющих наибольший интерес,  $\epsilon = s^{-1} \ll 1$ , и из (3.1) получаем

$$(3.3) \quad \epsilon^2 \Phi'' \left( 1 - \frac{r}{We} \right) - \frac{\epsilon^2}{We} \Phi' + \frac{1}{r We} \Phi = 0.$$

В области, где  $1 - r/We = O(1) > 0$ , находя с помощью метода многих масштабов решение (3.3) при  $\epsilon \rightarrow 0$ , имеем

$$(3.4) \quad \chi = \sqrt[4]{\frac{r/We}{1-r/We}} e^{is\theta} \left\{ D_1 \exp \left[ is \arcsin \left( \frac{2r}{We} - 1 \right) \right] + D_2 \exp \left[ - is \arcsin \left( \frac{2r}{We} - 1 \right) \right] \right\}.$$

Здесь  $D_1$  и  $D_2$  — постоянные коэффициенты. Возмущения распространяются вдоль характеристик уравнения (3.4) как волны Даламбера с переменной амплитудой  $\sqrt[4]{(r/We)/(1-r/We)}$ . Это соответствует результату [1]. Характеристики представляют собой два семейства кардиоид.

В пограничном слое вблизи линии  $r = We$ , где  $(1 - r/We)/\epsilon = y = O(1) > 0$ , решение уравнения (3.4), построенное методом многих масштабов с использованием (3.3), имеет вид

$$(3.5) \quad \chi = y^{-1/4} e^{is\theta} [E_1 \exp(i2\sqrt{ys}) + E_2 \exp(-i2\sqrt{ys})].$$

Переходя в (3.4) к внутренней переменной  $y$ , получаем при  $\epsilon \rightarrow 0$  внешнее решение во внутренних переменных

$$(3.6) \quad \chi = y^{-1/4} e^{is\theta} \left\{ D_1 \epsilon^{-1/4} \exp \left[ i \left( s \frac{\pi}{2} + 2\sqrt{ys} \right) \right] + D_2 \epsilon^{-1/4} \exp \left[ - i \left( s \frac{\pi}{2} + 2\sqrt{ys} \right) \right] \right\}.$$

Выражение (3.6) показывает, что внешнее и внутреннее решения (3.4) и (3.5) срачиваются при

$$(3.7) \quad E_1 = D_1 \epsilon^{-1/4} \exp \left( is \frac{\pi}{2} \right), \quad E_2 = D_2 \epsilon^{-1/4} \exp \left( - is \frac{\pi}{2} \right).$$

Коэффициенты  $D_1$  и  $D_2$  определяются с помощью условий (3.2), после чего из (3.7) вычисляются  $E_1$  и  $E_2$ .

Полученное решение показывает, что при  $r = We$  ( $y = 0$  в (3.5)) на линии, где происходит смена типа уравнения, амплитуда изгибных возмущений типа II становится бесконечно большой, что вновь свидетельствует о разрушении пленки.

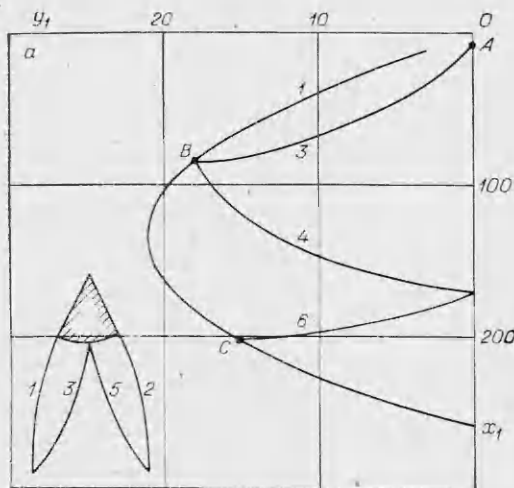
Линии распространения изгибных возмущений типа II для максвелловской жидкости совпадают с двумя семействами характеристик уравнения (1.1) при  $\partial/\partial t = 0$ :

$$(3.8) \quad \frac{d\theta}{dr} = \pm \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\sigma_{\theta\theta}^* h^* + 2\alpha}{\rho V_r^{*2} h^* - \sigma_{rr}^* h^* - 2\alpha}}$$

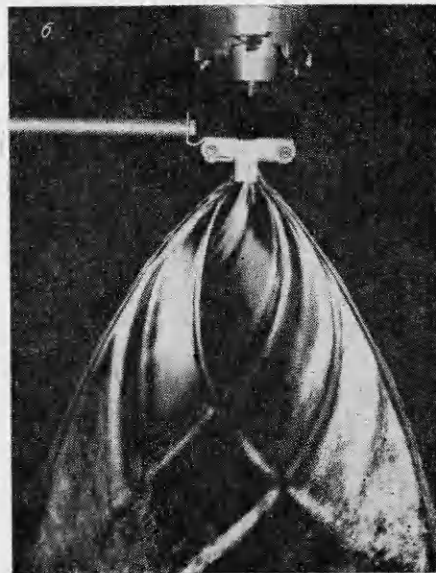
Эти уравнения должны интегрироваться с условием  $\theta = \theta_1$ ,  $r = R_0$ , где  $\theta_1$  — угловая координата источника возмущения. Параметры невозмущенного течения, отмеченные в (3.8) звездочками, определяются интегрированием (1.2) с условиями (1.3).

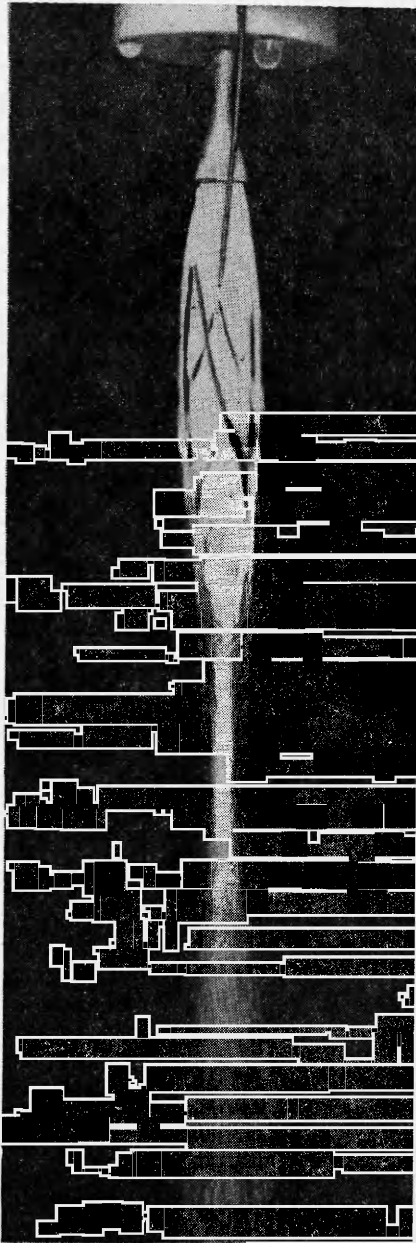
Рассмотрим результаты численного интегрирования (1.2) и (3.8) для двух волн, создаваемых источником возмущений, расположенным при  $\theta_1 = 0$  (посередине среза щелевого насадка) в случае истечения максвелловской жидкости. Считается, что насадок представляет собой в плане сектор круга с углом при вершине  $30^\circ$ . Течение жидкости в невозмущенной пленке характеризуется двумя параметрами:  $K = \mu/(\rho\lambda v_0^2)$  и  $Re = r_0 v_0 \rho/\mu$ ; уравнение (3.8) вводит дополнительно параметр  $We = \rho h_0 v_0^2/(2\alpha)$ . Знак плюс в (3.8) соответствует волнам первого семейства, минус — второго. Пленка ограничена свободными ребрами — валиками, в которых происходит разгрузка жидкости от поверхностных и упругих сил [3]. Форма свободных ребер рассчитывается, как в [3].

Результаты расчетов, отвечающие значениям параметров  $We = 1,96 \cdot 10^5$ ,  $Re = 14$ ,  $K = 0,51 \cdot 10^{-5}$ , представлены на рис. 2, а. При таких значениях параметров доминируют упругие силы, а роль сил поверхностного натяжения в сравнении с ними мала. В данном случае именно упругими силами определяется форма как свободных ребер, так и линий возмущений типа II. На рис. 2, а пленка показана в плане (на врезке схема течения вблизи среза насадка), она ограничивается свободными ребрами 1 и 2, возникающими на краях среза насадка с гантелевидным сечением. Ось  $Ox_1$  представляет собой ось симметрии срединной поверхности пленки, в качестве масштаба осей  $Ox_1$  и  $Oy_1$  использовалась величина  $r_0(x_1 = r \cos \theta, y_1 = r \sin \theta)$ . Полагалось, что  $R_0/r_0 = 5$ ; расход жидкости в свободном ребре на срезе насадка  $Q_1 = 0,1 r_0 v_0 h_0$ . Изгибная волна первого семейства  $\vec{s}$ , выйдя со среза насадка в точке А, встречается со сво-



Р и с. 2





Р и с. 3

кольку  $\operatorname{tg} \gamma = r d\theta/dr$ , из (3.8)

$$(4.1) \quad \sin^2 \gamma = \operatorname{We}_1^{-1} \frac{1 + \sigma_{\theta\theta}^* h^*/2\alpha}{1 + (\sigma_{\theta\theta}^* - \sigma_{rr}^*)/\rho V_r^{*2}}, \quad \operatorname{We}_1^{-1} = \frac{2\alpha}{\rho V_r^{*2} h^*}.$$

Здесь  $\operatorname{We}_1$  — местное число Вебера, зависящее от  $r$ . Для идеальной жидкости  $\sin^2 \gamma = \operatorname{We}_1^{-1}$ . Отличие величины  $\sin^2 \gamma$  от  $\operatorname{We}_1^{-1}$  свидетельствует о заметных внутренних напряжениях в жидкости. Поскольку в пленках упруговязких жидкостей  $\sigma_{\theta\theta}^* \gg \sigma_{rr}^*$  (растяжение в азимутальном направлении), из (4.1) имеем формулу для вычисления величины напряжения

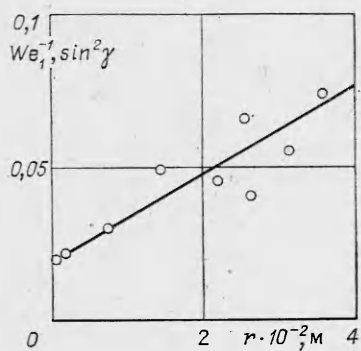
$$(4.2) \quad \sigma_{\theta\theta}^* = \rho V_r^{*2} \frac{\sin^2 \gamma - \operatorname{We}_1^{-1}}{1 - \sin^2 \gamma}.$$

Для нахождения изменения  $\operatorname{We}_1$  в пленке проведены измерения скорости течения жидкости в ней методом трассирующих частиц (водородных

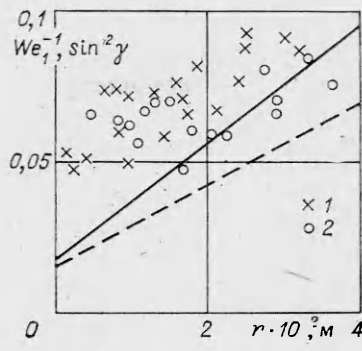
бодным ребром  $I$  в точке  $B$ , где отражается от него как волна второго семейства  $4$ . Эта волна распространяется вплоть до встречи со свободным ребром  $2$  (симметричным  $1$ ), где происходит новое отражение уже в виде волны первого семейства и т. д. С другой стороны, волна второго семейства  $5$ , выйдя из точки  $A$  и отразившись от свободного ребра  $2$ , распространяется как волна первого семейства  $6$  вплоть до встречи со свободным ребром  $1$  в точке  $C$ , где должно произойти новое отражение, и т. д. При наличии одного или нескольких источников возмущений на срезе насадка вся пленка будет расчерчена линиями возмущений, последовательно отражающимися от свободных ребер, что и наблюдается в эксперименте (рис. 2, б).

**4. Экспериментальное исследование.** Зависимость формы стационарных волн возмущений типа II от внутренних напряжений позволяет определить внутренние напряжения в пленках упруговязких жидкостей по стационарным волновым картинам на них. Измерения, выполненные этим способом, являются, таким образом, инструментом для исследования внутренних напряжений упруговязких жидкостей в течении с сильным (азимутальным в случае пленки) растяжением. В опытах, как и в [3], целевой насадкой формировал плоскую радиально растекающуюся пленку, ограниченную двумя краевыми струями (рис. 3). Течение строго радиально. Исследовались пленки водных растворов полиакриламида АМФ (ПАА) концентраций 0,02% и 0,04%, и в качестве теста — пленки идеальной жидкости (воды).

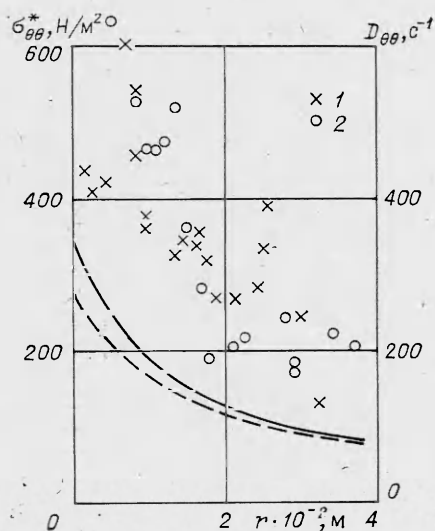
Введем в рассмотрение угол  $2\gamma$  между двумя волнами возмущений разных семейств в точке их пересечения. Получаем



Р и с. 4



Р и с. 5



Р и с. 6

пузырьков) и методом наложения возмущений вибратором, а также измерения удельного расхода в пленке  $h^*V_r^*$  с помощью кюветы. При использовании метода наложения возмущений вибратором метками в жидкости служили возмущения пленки. Предполагалось, что возмущения сносятся потоком со скоростью пленки. Во всех исследуемых случаях не замечено изменения скорости течения в пленке, что свидетельствует о малости дополнительных напряжений по сравнению с динамическим напором  $\rho V_r^{*2}$ . Скорость течения в пленках воды и растворов полиакриламида в пределах ошибки измерений оказалась одной и той же  $v_0 = 380 \pm \pm 10$  см/с, что согласуется с данными по измерению суммарного (с учетом краевых струй) расхода жидкости в пленке, величина которого  $Q = 14,3 \pm 0,4$  см<sup>3</sup>/с.

Для определения величины  $\sin^2 \gamma$  в пленке на ее оси симметрии искусственно генерировались изгибные возмущения. Это осуществлялось тонкой струйкой воздуха, истекающей из иглы шприца. Из той точки пленки, на которую натекала струйка, распространялись две волны (линии постоянной фазы, см. рис. 3). Эти волны фотографировались в отраженном свете, и по негативу на измерительном микроскопе находился угол между ними  $2\gamma$  в точке пересечения волн (т. е. в точке пленки, на которую натекает струйка воздуха). Из-за того что линии постоянной фазы не прямые (в силу изменения толщины пленки, а также из-за возможного изменения напряжений), случайная ошибка в измерении угла значительна.

Результаты измерения зависимостей от  $r \sin^2 \gamma$  и  $We_1^{-1}$  в пленках воды и растворов ПАА приведены соответственно на рис. 4 и 5, где точки —  $\sin^2 \gamma$ , линии —  $We_1^{-1}$ , причем 1 и сплошная линия для 0,02% ПАА, 2 и штриховая линия для 0,04% ПАА. Величины  $\sin^2 \gamma$  и  $We_1^{-1}$  с определенной степенью точности совпадают в пленке воды, в то время как в случае растворов полимеров, несмотря на значительный разброс в данных, заметно, что  $\sin^2 \gamma$  в пленке существенно больше  $We_1^{-1}$ , особенно вблизи насадки. Это указывает на существование в пленке дополнительных напряжений, вклад которых соизмерим с вкладом поверхностного натяжения, так что имеем очевидную оценку  $\sigma^* \approx 2\alpha/h$ . Полагая  $\alpha = 72 \cdot 10^{-3}$  Н/м,  $h^* = 10^{-3}$  м, получим  $\sigma_{\theta\theta}^* \approx 10^3$  Н/м<sup>2</sup>.

Для определения оценочной зависимости изменения напряжений  $\sigma_{\theta\theta}^*$  в пленке проведены расчеты с использованием формулы (4.2) по изме-

ренным значениям  $\sin^2 \gamma$ ,  $We_1^{-1}$  и  $V_r^*$ . Рассчитанные значения напряжений  $\sigma_{\theta\theta}^*$  в пленке дополнительно подвергнуты операции сглаживания на ЭВМ.

Результаты представлены на рис. 6, где точки 1, 2 —  $\sigma_{\theta\theta}^*$  для 0,02 и 0,04% ПАА, сплошная и штриховая линии —  $D_{\theta\theta}$  для 0,02 и 0,04% ПАА. Измеренные азимутальные напряжения оказались весьма значительны, они имеют порядок  $10^2$ — $10^3$  Н/м<sup>2</sup>. Эти напряжения падают по мере удаления от сопла, так что, несмотря на продолжающийся процесс растяжения в пленке, напряжения релаксируют в основной части пленки, а нарастание напряжений происходит при деформировании жидкости в насадке.

Результаты эксперимента свидетельствуют о том, что время релаксации исследуемых растворов при больших деформациях не превышает 5 мс. Такая оценка времени релаксации близка по порядку величины к фундаментальному времени релаксации данных растворов, определяемому молекулярно-гидродинамической моделью разбавленных растворов [9].

Оценки напряжений, возникающих при деформировании в насадке, выполненные с моделями Хинча — де Жена и «гантели» Куна [9, 10], приводят к значениям примерно на порядок ниже тех, что наблюдаются в эксперименте.

Проведенные измерения поля скорости в пленке позволяют вычислить скорость деформации  $D_{\theta\theta} = V_r^*/r$  (см. рис. 6). Используя величину  $D_{\theta\theta}$ , можно оценить эффективную продольную вязкость  $\mu_1 = \sigma_{\theta\theta}^*/D_{\theta\theta}$ . В растворах полимеров она оказывается на три порядка выше сдвиговой вязкости. Это свидетельствует о значительном упрочнении жидкости при растяжении упругих макромолекулярных клубков в элонгационном течении в пленке.

В заключение отметим, что методика эксперимента может быть усовершенствована путем более точного измерения угла пересечения волн возмущений  $2\gamma$ , что позволяет надеяться на уменьшение разброса в измерениях напряжений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Taylor G. The dynamics of thin sheets of fluid. II. Waves on fluid sheets.— Proc. Roy. Soc. London, 1959, v. A253, N 1274.
2. Taylor G. The dynamics of thin sheets of fluid. III. Disintegration of fluid sheets.— Ibidem.
3. Ентов В. М., Рожков А. Н. и др. О динамике пленок жидкости. Плоские пленки со свободными ребрами.— ПМТФ, 1986, № 1.
4. Ентов В. М., Кестенбойм Х. С. и др. О динамической форме равновесия пленки вязкой и упруговязкой жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 2.
5. Ентов В. М. Динамика пленок вязких и упругих жидкостей. Препринт ИПМ АН СССР № 130, 1979.
6. Entov V. M. On the dynamics of films of viscous and elastoviscous liquids.— Archives of Mech., 1982, v. 34, N 4.
7. Астарита Дж., Марруччи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей.— М.: Мир, 1978.
8. Найфэ А. Методы возмущений.— М.: Мир, 1976.
9. Hinch E. J. Mechanical models of dilute polymer solutions in strong flows.— Phys. Fluids, 1977, v. 20, N 10, pt 2.
10. Bird R. B., Armstrong R. C., Hassager O. Dynamics of polymeric liquids.— N. Y.: Wiley, 1977.

Поступила 16/V 1985 г.