

ЛИТЕРАТУРА

1. Гилев А. Ю., Непомнящий А. А., Симановский И. Б. Возникновение термогравитационной конвекции в двухслойной системе при наличии поверхностно-активного вещества на границе раздела // ПМТФ.— 1986.— № 5.
2. Непомнящий А. А., Симановский И. Б. Возникновение термокапиллярной конвекции в двухслойной системе при наличии растворимого поверхностно-активного вещества // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1988.— № 2.
3. Герцуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О монотонной и колебательной неустойчивости двухслойной системы несмешивающихся жидкостей, подогреваемой снизу // ДАН СССР.— 1982.— Т. 265, № 2.

Поступила 10/X 1987 г.

УДК 532.546

О ФИЛЬТРАЦИИ ЧЕРЕЗ ПОРИСТУЮ ПЕРЕГОРОДКУ МЕЖДУ ДВУМЯ СООБЩАЮЩИМИСЯ СОСУДАМИ

О. Ю. Динариев, А. Б. Мосолов, О. В. Николаев

(Москва)

В практике лабораторных экспериментальных работ, направленных на изучение свойств пористых сред, широкое распространение получили исследования нестационарных режимов фильтрации сжимаемых флюидов [1—4], которые позволяют не только определять фильтрационные параметры пористых сред, но и оценивать применимость общепринятых моделей фильтрации [5, 6] для неустановившихся течений. Однако существующие методики обработки данных основаны на квазистатическом приближении, т. е. в предположении медленного изменения градиента давления.

В настоящей работе рассматривается задача о быстром перетоке газа или жидкости из одной емкости фиксированного объема в другую через образец пористой среды. Получена формула, связывающая характерное время релаксации в системе с проницаемостью образца.

Пусть имеются два сообщающихся сосуда объема V_0 и V_1 , разделенные пористой перегородкой цилиндрической формы с длиной L и диаметром сечения d . Предположим, что система наполнена газом или жидкостью, которая изотермически перетекает из одного сосуда в другой через перегородку. Уравнение состояния выберем в форме

$$(1) \quad p = c^2(\rho - \rho_a) + p_a,$$

где ρ и p — плотность и давление; c — изотермическая скорость звука; ρ_a и p_a — постоянные. Уравнение (1) описывает совершенный газ, когда $\rho_a = 0$ и $p_a = 0$, и большинство реальных жидкостей, если диапазон изменения плотности мал, т. е. $|\rho - \rho_a|/\rho_a \ll 1$.

Направим ось Ox в пространстве так, что пористая перегородка проектируется на отрезок $[0, L]$, причем положительное направление отвечает направлению от сосуда с V_0 к сосуду с V_1 . Течение будем предполагать одномерным и удовлетворяющим закону Дарси [5, 6]

$$(2) \quad u = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x},$$

где k и μ — проницаемость и вязкость, которые считаем постоянными.

При фильтрации удовлетворяется уравнение неразрывности

$$(3) \quad \partial m \rho / \partial t = -\partial \rho u / \partial x$$

(m — пористость, которую также считаем постоянной).

Из (1)—(3) следует уравнение для функции $\rho = \rho(t, x)$:

$$(4) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{kc^2}{m\mu} \frac{\partial}{\partial x} \rho \frac{\partial}{\partial x} \rho.$$

Функции $\rho(t, 0)$ и $\rho(t, L)$ задают значение плотности в соответствующих

сосудах. В силу закона сохранения массы имеют место граничные условия

$$(5) \quad V_0 \rho(t, 0) = V_0 \rho(0, 0) - S \int_0^t (\rho u)(s, +0) ds,$$

$$V_1 \rho(t, L) = V_1 \rho(0, L) + S \int_0^t (\rho u)(s, L-0) ds, \quad S = \frac{\pi d^2}{4}.$$

Из (1), (2), (5) вытекает

$$(6) \quad \begin{aligned} V_0 \frac{\partial \rho}{\partial t}(t, 0) &= \frac{S k c^2}{\mu} \left(\rho \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)(t, +0), \\ V_1 \frac{\partial \rho}{\partial t}(t, L) &= -\frac{S k c^2}{\mu} \left(\rho \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)(t, L-0). \end{aligned}$$

Предположим, что в начальный момент на границе одного из сосудов и пористой перегородки создан скачок плотности $\rho(0, 0) = \rho_0$, $\rho(0, x) = \rho_1$, $x \in (0, L]$. Заметим, что такие начальные условия предполагают особый выбор функционального пространства, в котором ищется решение задачи.

С течением времени плотность в системе выравнивается и стремится к постоянной ρ_∞ , которую можно определить из закона сохранения массы $\rho_\infty = (V_0 \rho_0 + V_1 \rho_1 + m L S \rho_1) / (V_0 + V_1 + m L S)$.

Рассмотрим случай, когда отклонения плотности от предельного значения малы: $|\rho - \rho_\infty| / \rho_\infty \ll 1$. Тогда задача (4), (6) превращается в линейную:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{k c^2 \rho_\infty}{m \mu} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \quad V_0 \frac{\mu}{S k c^2 \rho_\infty} \frac{\partial \rho}{\partial t}(t, 0) &= \frac{\partial \rho}{\partial x}(t, +0), \\ V_1 \frac{\mu}{S k c^2 \rho_\infty} \frac{\partial \rho}{\partial t}(t, L) &= -\frac{\partial \rho}{\partial x}(t, L-0). \end{aligned}$$

Перейдем к безразмерным величинам: $x = L \xi$, $t = m \mu L^2 \tau / (k c^2 \rho_\infty)$, $\rho = \rho_\infty v$, $\rho_0 = \rho_\infty v_0$, $\rho_1 = \rho_\infty v_1$, $\beta_0 = V_0 / (m S L)$, $\beta_1 = V_1 / (m S L)$.

В безразмерном виде задача имеет вид

$$(7) \quad \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}, \quad \beta_0 \frac{\partial v}{\partial \tau}(\tau, 0) = \frac{\partial v}{\partial \xi}(\tau, +0), \quad \beta_1 \frac{\partial v}{\partial \tau}(\tau, 1) = -\frac{\partial v}{\partial \xi}(\tau, 1-0);$$

$$(8) \quad v(0, \xi) = \begin{cases} v_0, & \xi = 0, \\ v_1, & 0 < \xi \leq 1. \end{cases}$$

Опишем теперь функциональное пространство, в котором будет решаться задача (7), (8). Для этого введем в пространстве непрерывных комплекснозначных функций $C_C[0, 1]$ скалярное произведение

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \beta_0 \varphi_1^*(0) \varphi_2(0) + \beta_1 \varphi_1^*(1) \varphi_2(1) + \int_0^1 \varphi_1^*(\xi) \varphi_2(\xi) d\xi.$$

Полное пространство $C_C[0, 1]$ по соответствующей норме является гильбертовым пространством G . Определим на $C_C^2[0, 1]$ оператор A формулами

$$(Af)(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\beta_0} \frac{df}{d\xi} \Big|_{\xi=0}, & \xi = 0, \\ -\frac{1}{\beta_1} \frac{df}{d\xi} \Big|_{\xi=1}, & \xi = 1, \\ \frac{d^2 f}{d\xi^2}(\xi), & \xi \in (0, 1) \end{cases}$$

(A — симметричный оператор в G , который допускает замыкание [7, 8]). Будем обозначать замыкание оператора A тем же символом.

В силу вещественности оператора A его индексы дефекта равны, и поэтому A расширяется до самосопряженного оператора. Самосопряженное расширение обозначим также через A , а D_A — область определения A .

Оператор A имеет дискретный спектр λ_n ($n = 0, 1, \dots$), $\lambda_0 = 0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_n > \lambda_{n+1} > \dots$, $\lambda_n \rightarrow -\infty$ при $n \rightarrow +\infty$. Действительно, для всякого $f \in D$

$$(f, Af) = - \int_0^1 \left| \frac{df}{d\xi} \right|^2 d\xi \leq 0,$$

поэтому спектр A лежит на луче $(-\infty, 0]$. Так как $Af = 0$ при $f = \text{const}$, то $\lambda_0 = 0$ — собственное значение оператора A . Далее, пусть $\lambda = -\theta^2$, $\theta > 0$. Рассмотрим уравнение $Af - \lambda f = g$ ($f \in D_A$, $g \in G$), оно распадается на

$$(9) \quad \left(\frac{a^2}{d\xi^2} + \theta^2 \right) f(\xi) = g(\xi), \quad \xi \in (0, 1);$$

$$(10) \quad \left(\frac{1}{\beta_0} \frac{d}{d\xi} + \theta^2 \right) f(0) = g(0), \quad \left(-\frac{1}{\beta_1} \frac{d}{d\xi} + \theta^2 \right) f(1) = g(1).$$

Из (9) следует, что при $\xi \in [0, 1]$

$$(11) \quad f(\xi) = \frac{1}{\theta} \int_0^1 \sin \theta(\xi - \eta) g(\eta) d\eta + a \sin \theta \xi + b \cos \theta \xi,$$

где a, b не зависят от ξ . Подставим (11) в (10), тогда

$$(12) \quad \frac{1}{\beta_0} \theta a + \theta^2 b = g(0),$$

$$\theta \left(-\frac{1}{\beta_1} \cos \theta + \theta \sin \theta \right) a + \theta \left(\frac{1}{\beta_1} \sin \theta + \theta \cos \theta \right) b = g(1) +$$

$$+ \int_0^1 \left(\frac{1}{\beta_1} \cos \theta (1 - \eta) - \theta \sin \theta (1 - \eta) \right) g(\eta) d\eta.$$

Если детерминант

$$\Delta(\theta) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\beta_0} & \theta \\ \left(-\frac{\cos \theta}{\beta_1} + \theta \sin \theta \right) & \left(\frac{\sin \theta}{\beta_1} + \theta \cos \theta \right) \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{\beta_0 \beta_1} - \theta^2 \right) \sin \theta +$$

$$+ \theta \left(\frac{1}{\beta_0} + \frac{1}{\beta_1} \right) \cos \theta$$

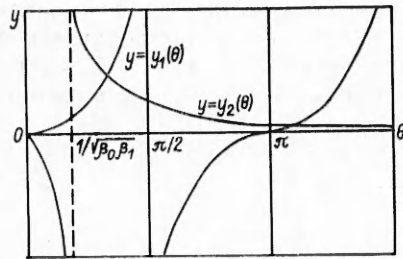
отличен от нуля, то система (12) определяет a и b как линейные непрерывные функционалы от g , а формула (11) — линейный непрерывный оператор, обратный к оператору $(A - \lambda I)$. В этом случае λ принадлежит резольвентному множеству оператора A . Если же

$$(13) \quad \Delta(\theta) = 0,$$

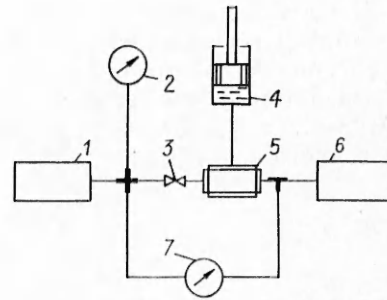
то $\lambda = -\theta^2$ — собственное значение A . Уравнение (13) имеет счетное множество действительных решений с предельной точкой на бесконечности. Таким образом, утверждение о спектре оператора A доказано.

Пусть $f_n = f_n(\xi) = \alpha_n (\cos \theta_n \xi - \beta_0 \theta_n \sin \theta_n \xi) / \sqrt{1 + \beta_0^2 \theta_n^2}$ ($n = 0, 1, \dots$) — собственные функции, соответствующие собственным значениям оператора A : $\lambda_n = -\theta_n^2$, $\theta_0 = 0$, $\theta_n < \theta_{n+1}$. Постоянные α_n находим из условия нормировки $(f_n, f_n) = 1$:

$$\alpha_n^{-2} = 1 + \beta_0 + \beta_1, \quad \alpha_n^{-2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\beta_0}{1 + \beta_0^2 \theta_n^2} + \frac{\beta_1}{1 + \beta_1^2 \theta_n^2} \right) \quad (n = 1, 2, \dots).$$



Р и с. 1



Р и с. 2

Далее, обозначим w элемент G , задаваемый формулой (8). Тогда задача (7), (8) сводится к нахождению функции $v = v(\tau)$ со значениями в G , удовлетворяющей уравнению $dv/d\tau = Av$ и начальному условию $v(0) = w$. Эта задача имеет решение, которое можно представить в виде ряда

$$(14) \quad v = v(\tau) = e^{\tau A} w = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\theta_n^2 \tau} (f_n, w) f_n.$$

При этом

$$(f_0, w) = (\beta_0 v_0 + \beta_1 v_1 + v_1) \alpha_0,$$

$$(f_n, w) = (v_0 - v_1) \alpha_n \beta_0 / \sqrt{1 + \beta_0^2 \theta_n^2} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Рассмотрим более подробно частный случай, когда $\beta_0, \beta_1 \gg 1$, $\beta_0/\beta_1 \sim 1$. Уравнение (13) можно переписать в виде

$$(15) \quad \operatorname{tg} \theta = -(\beta_0 + \beta_1)\theta / (1 - \beta_0\beta_1\theta^2),$$

решения его определяются точками пересечения графиков $y = y_1(\theta) = \operatorname{tg} \theta$ и $y = y_2(\theta) = -(\beta_0 + \beta_1)\theta / (1 - \beta_0\beta_1\theta^2)$ (рис. 1). Легко видеть, что $\theta_n \gg \theta_1$ при $n > 1$, а при $\tau \gg 1/\theta_1^2$ решение определяется двумя первыми членами в сумме (14). Из (15) получаем

$$(16) \quad \theta_1 = (1/\beta_0 + 1/\beta_1)^{1/2} + O(1/\beta_0^{3/2}).$$

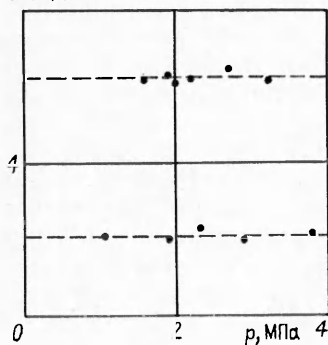
При $\tau \gg 1/\theta_1^2$ значение плотности в системе экспоненциально приближается к постоянному значению. В размерных величинах, согласно (16), время релаксации

$$(17) \quad t_r = LV_0 V_1 \mu / (c^2 \rho_\infty k (V_0 + V_1) S).$$

С целью проверки изложенной теории проведена серия экспериментов. Схема экспериментальной установки для исследования нестационарной фильтрации флюидов методом перетока изображена на рис. 2. Цилиндрический образец пористой среды в резиновой манжете помещается в кернодержатель 5 и обжимается системой бокового гидрообжима 4. Переток газа из входной емкости 1 в выходную 6 инициируется открытием вентиля 3. Процесс перетока контролируется манометром 2 и дифманометром 7.

На рис. 3 приведены результаты экспериментов по проверке формулы (17). Эксперименты проводились на двух образцах при различных средних давлениях и температуре $T = 295$ К. В качестве рабочего агента использовался газообразный метан.

Входная емкость установки имела объем $V_0 = 4,32 \cdot 10^{-4}$ м³, выходная $V_1 = 9,48 \cdot 10^{-4}$ м³. Параметры образцов пористой среды даны в таблице. Для первого образца $\beta_0 = 198$, $\beta_1 = 434$, для второго $\beta_0 = 348$, $\beta_1 = 764$. Таким образом, принятые предположения относительно β_0, β_1 удовлетворяются. Все опыты проводились при давлениях до 4,0 МПа. При снятии замеров значения давления отличались от предельного давления не более чем на 10 %. Это позволило принять значение вязкости ме-

$c^2 \rho_{\infty} t_r, 10^5 \text{ МПа} \cdot \text{с}$


Р и с. 3

Характеристика	Образец 1	Образец 2
Литологический тип	Известняк	Песчаник
Пористость $m, 10^{-2}$	6,7	5,4
Длина $L, 10^{-2}$ м	5,07	3,74
Диаметр $d, 10^{-2}$ м	2,87	2,88
Проницаемость k , замеренная при стационарном режиме, 10^{-17} м ²	4,5	9,6
Проницаемость, вычисленная по формуле (17), 10^{-17} м ²	4,2	9,1

тана во всех опытах $\mu = 1,14 \cdot 10^{-5}$ Па·с (с относительной погрешностью не хуже $\pm 0,03$). Вычисленные значения проницаемости по осредненным значениям произведения $c^2 \rho_{\infty} t_r$ приведены в таблице. Они достаточно хорошо совпадают с результатами стационарных измерений.

Таким образом, на основании проведенных исследований можно сделать вывод о том, что в рассмотренных условиях процесс фильтрации хорошо описывается уравнениями упругого режима. Метод определения фильтрационных параметров по характерному времени релаксации новый и дает результаты, совпадающие с полученными в стационарных измерениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Jones S. C. A rapid accurate unsteady-state Klinkenberg permeameter // Soc. Petrol. Engrs J.— 1972.— V. 12, N 5.
2. Freeman D. L., Bush D. C. Low-permeability laboratory measurements by nonsteady-state and conventional methods // Soc. Petrol. Engrs J.— 1983.— V. 23, N 6.
3. Горюин В. И. Измерение проницаемости пород-коллекторов при нестационарной фильтрации газа // Тр. ВНИГНИ.— 1970.— Вып. 90.
4. Ковалев А. Г., Покровский В. В. Теоретические предпосылки определения проницаемости горных пород при нестационарной фильтрации газа и возможные схемы приборов, работающие на этом принципе // Тр. ВНИИ, НТС по добыче нефти.— М.: Недра, 1971.— Вып. 42.
5. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа.— М.: Недра, 1972.
6. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Движение жидкостей и газов в природных пластах.— М.: Недра, 1984.
7. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Спектральная теория. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве.— М.: Мир, 1966.
8. Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу.— М.: Мир, 1979.

Поступила 9/XI 1987 г.

УДК 536.24

ОБ АКУСТИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ НА ПАРАМЕТРЫ ТЕЧЕНИЯ И ТЕПЛОБМЕН СОСТАВНОЙ СТРУИ В НАБЕГАЮЩЕМ ПОТОКЕ

А. Н. Голованов
(Томск)

Процессы взаимодействия малых возмущений (акустических колебаний, вибраций поверхности с газовыми потоками), интересные как в научных исследованиях, так и в практических приложениях, касаются проблем перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный, восприимчивости турбулентных течений к акустическим колебаниям, управления аэродинамическими и тепловыми характеристиками энергетических установок [1—3].

В данной работе рассматривается влияние акустических колебаний на теплообмен и гидродинамические параметры течения в составной струе, истекающей через систему круглых отверстий навстречу набегающему потоку.