

УДК 537.226

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТРЕХКОМПОНЕНТНЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОМПОЗИТОВ С ПЛОТНОЙ УПАКОВКОЙ ВКЛЮЧЕНИЙ

Ю. П. Емец

Институт электродинамики Национальной академии наук Украины, 03680 Киев, Украина

Рассчитано электрическое поле и вычислена эффективная диэлектрическая проницаемость двумерного трехкомпонентного диэлектрического материала, армированного цилиндрическими волокнами. Рассмотрен композитный материал с плотной квадратной упаковкой включений. Для исследования поля в периодической системе используется точное решение модельной задачи о взаимодействии двух разнородных цилиндрических включений во внешнем однородном электрическом поле. Построена диаграмма относительной эффективной диэлектрической проницаемости.

Введение. В настоящей работе исследуются свойства трех- и многокомпонентных диэлектрических композитов. По сравнению с двухкомпонентными диэлектриками поляризационные эффекты в них более разнообразны. Поэтому многокомпонентные диэлектрические материалы имеют иные свойства.

Рассматриваются матричные композиты с плотной упаковкой включений. В таких материалах даже малые изменения концентрации и свойств отдельных компонентов могут оказать существенное влияние на характеристики неоднородной среды в целом, что позволяет создавать чувствительные датчики для измерительных устройств и разрабатывать материалы с широким диапазоном характеристик для электронных и оптических преобразователей. К этому классу материалов относятся пьезоэлектрики, пьезомагнетики, керметы и тонкие пленочные покрытия в полупроводниковых и оптических устройствах (см., например, [1, 2]).

Во многих случаях расчеты многокомпонентных систем с большой концентрацией включений сопряжены с рядом математических сложностей, сдерживающих развитие общей теории [3]. Возникающие затруднения связаны с усложнением характера взаимодействия компонентов в системе. При сближении включений большое значение приобретают форма взаимодействующих тел, расположение их в системе и ориентация во внешних полях. Взаимодействия тел становятся многодипольными, и параметры, характеризующие неоднородную систему, нельзя считать малыми. Поэтому в асимптотических разложениях решения необходимо удерживать большое число членов.

Общая теория исследования композитов с периодической структурой подробно изложена в [4]. Развитая в этой работе строгая математическая теория, основанная на асимптотических методах, позволила проверить правильность многих модельных построений, обосновать гипотезу эквивалентной гомогенности периодически неоднородных сред и оценить погрешности асимптотических вычислений. В [4] показано, что вычисление средних характеристик кусочно-однородных периодических структур сводится к решению краевой задачи для ячейки периода. Последняя задача сама по себе сложна и требует разработки специальных математических методов решения. Различные подходы решения этой проблемы описаны в работах [5, 6]. Особенно интересен класс обратных задач.

Естественный подход к определению осредненных (эффективных) характеристик неоднородной среды предполагает выполнение следующих двух операций: решение полевой задачи и осреднение рассчитанных полей в ячейке периодичности [7]. Обычно наибольшие сложности возникают при решении первой задачи.

В настоящей работе в соответствии с общими принципами теории определены эффективные электрические характеристики диэлектрической среды, содержащей включения в виде однонаправленных цилиндрических волокон двух видов. Исследуется трехкомпонентная матричная среда. Волокна с плотной упаковкой образуют периодическую квадратную решетку.

Рассматриваемый материал относится к классу ортотропных композитов, свойства которых одинаковы в направлениях двух осей в плоскости, ортогональной волокнам. Уравнения поля допускают операцию поворота на прямой угол вокруг оси, направление которой совпадает с направлением волокон.

Для расчета электрического поля в изучаемой системе используется конструктивный метод, в основе которого лежит суммирование парных взаимодействий. При этом используются решения двух модельных задач о соприкасающихся и двух отдельных разнородных диэлектрических волокнах, помещенных во внешнее однородное электрическое поле. Эти задачи имеют точное аналитическое решение в общей постановке [8, 9].

На первый взгляд, суммирование многодипольных взаимодействий большего числа включений приводит к большим сложностям при решении. В действительности рассматриваемую задачу можно упростить: в неограниченной по размерам системе достаточно учитывать взаимодействия отдельного включения лишь с его ближайшими соседями. Это утверждение справедливо для дипольного поля, которое для плоских систем изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния. В результате взаимное влияние включений ослабевает по мере увеличения расстояния между ними. Дальними взаимодействиями можно пренебречь. Разумеется, чем сильнее неоднородность среды, тем больше моменты взаимодействующих диполей и, следовательно, тем больше должен быть радиус области, в пределах которой учитывается взаимодействие включений.

Эффективная диэлектрическая проницаемость многокомпонентных композитных диэлектриков удовлетворяет соотношению взаимности, которое можно записать в нескольких эквивалентных формах.

1. Электрическое поле во включениях. Исследуется диэлектрическая среда с проницаемостью ε_1 , которая содержит включения в виде длинных параллельных круговых волокон радиуса r . Волокна двух видов с проницаемостями ε_2 и ε_3 образуют плотную квадратную решетку. Фрагмент поперечного сечения неограниченной в пространстве среды с двоякопериодическим чередованием включений каждого вида показан на рис. 1. Начало прямоугольной системы координат находится на оси включения, имеющего диэлектрическую проницаемость ε_2 .

Система находится во внешнем однородном электрическом поле E_0 , направленном нормально к осям цилиндрических включений. Электрическое поле в поперечном сечении волокон двумерное, и при отсутствии свободных зарядов основные уравнения электростатики $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$, $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ совпадают с условиями Коши — Римана. Это позволяет ввести комплексные величины индукции и напряженности электрического поля $D(z) = D_x - iD_y$, $E(z) = E_x - iE_y$ ($z = x + iy$).

Электрическое поле внутри каждого включения формируется под влиянием остальных включений в системе (взаимодействия выделенного включения с каждым другим включением системы по отдельности). Суммируя эти взаимодействия, можно получить резуль-

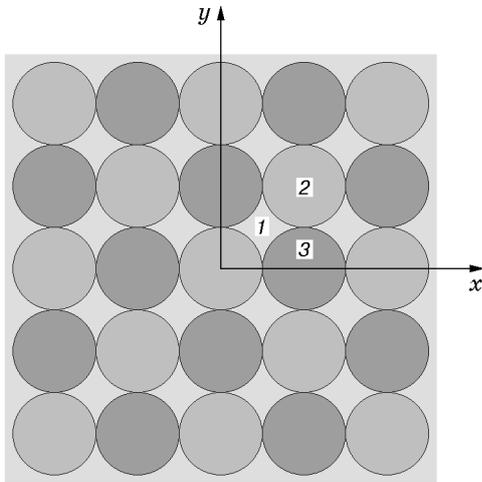


Рис. 1. Композитный диэлектрический материал с плотной упаковкой волокон двух видов: 1 — матрица, 2 — волокно с диэлектрической проницаемостью ε_2 , 3 — волокно с диэлектрической проницаемостью ε_3

тирующее поле в выделенном включении

$$E_\nu(z) = \sum_{m=1}^{\infty} E_{\nu m}(z) \quad (\nu = 2, 3). \quad (1)$$

Здесь индекс ν соответствует выделенному включению, имеющему диэлектрическую проницаемость ε_2 или ε_3 ; $E_{\nu m}(z)$ — составляющая электрического поля, обусловленная взаимодействием данного включения ν с включением m системы.

Следовательно, для определения электрического поля внутри включения необходимо решить задачу об электрическом поле двух параллельных диэлектрических волокон цилиндрической формы, помещенных во внешнее однородное поперечное поле. Эта вспомогательная задача используется в двух вариантах: 1) разнородные волокна одинакового радиуса соприкасаются вдоль образующей; 2) параллельные волокна кругового сечения расположены на произвольном расстоянии друг от друга. Аналитические решения этих задач различны [8, 9].

По мере увеличения расстояния между включениями взаимодействие между ними резко ослабевает, что справедливо для дипольных систем в классической электродинамике. Это позволяет учитывать взаимодействия отдельного включения только с ближайшими соседями, его взаимодействием с остальными включениями системы можно пренебречь.

Пусть, например, определяется электрическое поле во включении, содержащем начало координат системы (рис. 1). В принятом приближении можно учесть влияние только тех включений, которые находятся в первом слое, окружающем центральное включение. В этом слое их восемь: две пары соприкасаются с центральным включением (они расположены на координатных осях), две другие пары включений находятся на диагоналях $y = \pm x$, центры которых удалены от начала координат на расстояние $2\sqrt{2}r$.

Если необходима более высокая точность расчетов, то можно дополнительно учесть влияние включений, находящихся в следующем слое, где их уже 16. В каждом последующем слое число включений возрастает на 8 по сравнению с предыдущим.

В дальнейшем расчет электрического поля и вычисление эффективных параметров выполняются в предположении, что выделенное включение взаимодействует только с восьмью ближайшими включениями. Как показали расчеты, это допущение обеспечивает удовлетворительную точность результатов.

Принятая теоретическая модель позволяет перейти от бесконечной суммы в выражении (1) к конечной:

$$E_2(z) = \sum_{m=1}^8 E_{2m}(z), \quad |z| \leq r. \quad (2)$$

Здесь $E_2(z)$ — напряженность электрического поля в центральном включении, на оси которого находится начало координат системы; индекс 2 обозначает, что это включение имеет диэлектрическую проницаемость ε_2 . Компоненты поля $E_{2m}(z)$ находятся из решения вспомогательных задач.

При взаимодействии с включениями на положительной и отрицательной осях имеем

$$E_{21,22}(z) = E_0(1 + \Delta_{12}) \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4} r^2 \sum_{k=1}^{\infty} \{ \Delta^k k^{-2} [\alpha_k (z \mp a_k)^{-2} - (z \mp b_k)^{-2}] \} \right), \quad (3)$$

где верхний знак соответствует положительной оси, нижний — отрицательной; $\alpha_k = (1/\Delta_{12})(2k/(2k-1))^2$; $a_k = 2kr/(2k-1)$, $b_k = (2k+1)r/(2k)$ — координаты диполей на оси x ; $\Delta_{1\nu}$, Δ — относительные параметры, характеризующие диэлектрические свойства композитного материала:

$$\Delta_{1\nu} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_\nu)/(\varepsilon_1 + \varepsilon_\nu) \quad (\nu = 2, 3), \quad \Delta = \Delta_{12}\Delta_{13} \quad (|\Delta_{1\nu}| \leq 1, \quad |\Delta| \leq 1). \quad (4)$$

В выражении (3) первый член $E_0(1 + \Delta_{12})/8$ определяет часть однородного электрического поля в центральном включении, которая приходится на одно взаимодействующее включение (общее число которых равно 8).

В целом среда в поперечном сечении изотропна, поэтому направление внешнего поля E_0 в системе может быть принято произвольным. Для определенности направление поля E_0 выбрано вдоль оси x : $E_0 = E_{0x}$.

Наличие двух других составляющих поля $E_2(z)$ в формуле (2) обусловлено взаимодействием центрального включения с соприкасающимися включениями, расположенными на мнимой оси (рис. 1). Выражения для них

$$E_{23,24}(z) = E_0(1 + \Delta_{12}) \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4} r^2 \sum_{k=1}^{\infty} \{ \Delta^k k^{-2} [\alpha_k (z \mp ia_k)^{-2} - (z \mp ib_k)^{-2}] \} \right) \quad (5)$$

отличаются от выражений (3) только координатами диполей.

Остальные составляющие поля $E_2(z)$ являются результатом взаимодействия центрального включения с включениями, расположенными на диагоналях $y = \pm x$ (рис. 1), и записываются в виде

$$E_{25,26}(z) = E_0(1 + \Delta_{12}) \left(\frac{1}{8} - 4r^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \Delta_{12}^{2k} \left[\beta_k \left(z \mp c_k \exp \left(\frac{i\pi}{4} \right) \right)^{-2} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - i\gamma_k \left(z \mp d_k \exp \left(\frac{i\pi}{4} \right) \right)^{-2} \right] \right\} \right) \quad (6)$$

на диагонали $y = x$,

$$E_{27,28}(z) = E_0(1 + \Delta_{12}) \left(\frac{1}{8} - 4r^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \Delta_{12}^{2k} \left[\beta_k \left(z \mp c_k \exp \left(-\frac{i\pi}{4} \right) \right)^{-2} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + i\gamma_k \left(z \mp d_k \exp \left(-\frac{i\pi}{4} \right) \right)^{-2} \right] \right\} \right) \quad (7)$$

на диагонали $y = -x$. Здесь

$$\beta_k = \frac{1}{\Delta_{12}} \left(\frac{\lambda^{k-1/2}}{1 - \lambda^{2k-1}} \right)^2, \quad \gamma_k = \left(\frac{\lambda^k}{1 - \lambda^{2k}} \right)^2, \quad \lambda = 3 - 2\sqrt{2},$$

$c_k \exp(\cdot)$ и $d_k \exp(\cdot)$ — координаты диполей на диагоналях $y = \pm x$:

$$c_k = \frac{r}{\sqrt{\lambda}} \frac{1 - \lambda^{2k}}{1 - \lambda^{2k-1}}, \quad d_k = \frac{r}{\sqrt{\lambda}} \frac{1 - \lambda^{2k+1}}{1 - \lambda^{2k}}.$$

Выражения (3), (5)–(7) определяют все слагаемые в формуле (2).

Расчет электрического поля проведен для включения с диэлектрической проницаемостью ε_2 . Чтобы определить поле $E_3(z)$ внутри включения с проницаемостью ε_3 , можно воспользоваться полученными выражениями, в которых необходимо произвести замену параметров $\Delta_{12} \leftrightarrow \Delta_{13}$. При этом начало системы координат переместится в центр включения с проницаемостью ε_3 .

Выражение для электрического поля в матричной среде $E_1(z)$ в дальнейшем не требуется, поэтому здесь не рассматривается.

О погрешностях расчета электрического поля описанным методом можно судить по тому, насколько строго выполняются граничные условия на контурах включений. Непосредственная проверка показывает, что в принятом приближении условия непрерывности касательных составляющих напряженности электрического поля и нормальных компонент вектора индукции на линиях, разделяющих разнородные среды, выполняются с большой точностью.

2. Эффективные характеристики. Эффективная диэлектрическая проницаемость ε_{eff} связывает осредненные величины индукции и напряженности электрического поля:

$$\langle \mathbf{D} \rangle = \varepsilon_{eff} \langle \mathbf{E} \rangle. \quad (8)$$

Угловые скобки в соотношении (8) означают, что берутся средние по объему величины поля. Осреднение проводится по пространству, линейные размеры которого больше характерных размеров объемного элемента, содержащего два вида включений. В данном случае среднее поле определяется по площади. В силу периодической структуры системы осреднение проводится по квадратной ячейке, представляющей собой элемент периода рассматриваемой двоякопериодической кусочно-однородной системы (рис. 2). Таким образом, определение эффективной диэлектрической проницаемости материала сводится к вычислению соотношения (8) в одной квадратной ячейке.

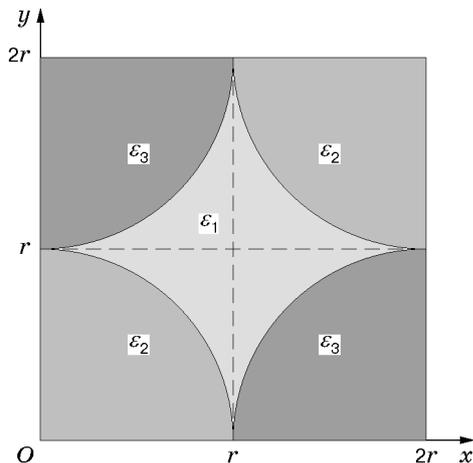


Рис. 2. Периодическая ячейка осреднения электрического поля

По условию задачи внешнее электрическое поле E_0 направлено вдоль оси x , поэтому в ячейке $OUWV$ прямые отрезки OV и UW совпадают с эквипотенциалами, а отрезки OU и VW являются силовыми линиями.

Осреднение поля по площади квадратной ячейки $OUWV$ можно заменить вычислением контурных интегралов в этой ячейке:

$$\langle E \rangle_x = \frac{1}{2r} \left[\int_0^r E_{x2}(x) dx + \int_r^{2r} E_{x3}(x) dx \right], \quad \langle D \rangle_x = \frac{1}{2r} \left[\varepsilon_2 \int_0^r E_{x2}(y) dy + \varepsilon_3 \int_r^{2r} E_{x3}(y) dy \right]. \quad (9)$$

После вычисления интегралов (9) из соотношения $\langle D \rangle_x = \varepsilon_{eff} \langle E \rangle_x$ получаем искомое выражение для эффективной диэлектрической проницаемости ε_{eff} исследуемого материала

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon_1 \frac{1 - s(\Delta_{12} + \Delta_{13}) + \Phi(\Delta_{21}, \Delta_{31})}{1 + s(\Delta_{12} + \Delta_{13}) + \Phi(\Delta_{12}, \Delta_{13})}. \quad (10)$$

Здесь $s = 0,3974$. Если увеличить точность вычислений, т. е. учитывать взаимодействие включения не с восьмью, а с бóльшим количеством включений, то число s будет стремиться к значению $\pi/8$, равному концентрации каждого вида включений в материале (в относительных единицах). Различие между приближенным и точным значениями параметра s составляет порядка 1%.

Таким образом, коэффициент s в выражении (10) имеет определенный физический смысл — относительная концентрация каждого вида включений. Поэтому в дальнейшем принимается точное значение параметра s , равное $\pi/8$.

Следует учитывать, что согласно соотношениям (4) в выражении (10) и последующих формулах

$$\Delta_{12} = -\Delta_{21}, \quad \Delta_{13} = -\Delta_{31} \quad (11)$$

и, следовательно,

$$\Delta = \Delta_{12}\Delta_{13} = \Delta_{21}\Delta_{31}. \quad (12)$$

В выражении (10) функция $\Phi(\Delta_{12}, \Delta_{13})$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Phi(\Delta_{12}, \Delta_{13}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \{ & \Delta^k [2(A_k + B_k) + (A_k + B_{k+1})(\Delta_{12} + \Delta_{13})] + \\ & + (C_k + D_k)(\Delta_{12}^{2k} + \Delta_{13}^{2k}) + (C_k + D_{k+1})(\Delta_{12}^{2k+1} + \Delta_{13}^{2k+1}) \}, \quad (13) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_k = \frac{4(2k+1)^2}{(2k+1)^4 - 16k^4}, \quad B_k = \frac{4(2k-1)^2}{(2k-1)^4 - 16k^4}, \quad C_k = \frac{16\lambda^{2k+1}(1 - \lambda^{2k+1})^2}{(1 - \lambda^{2k+1})^4 + \lambda^2(1 - \lambda^{2k})^4}, \\ D_k = \frac{16\lambda^{2k+1}(1 - \lambda^{2k-1})^2}{(1 - \lambda^{2k})^4 + \lambda^2(1 - \lambda^{2k-1})^4}, \quad \lambda = 3 - 2\sqrt{2}. \quad (14) \end{aligned}$$

Если диэлектрические проницаемости включений ε_2 и ε_3 близки к значению проницаемости матрицы ε_1 ($|\Delta_{12}|, |\Delta_{13}| \ll 1$), то членами ряда (13), содержащими параметры Δ_{12} и Δ_{13} второго и более высоких порядков, можно пренебречь, т. е. положить $\Phi(\Delta_{12}, \Delta_{13}) = \Phi(\Delta_{21}, \Delta_{31}) = 0$. Тогда формула для эффективной диэлектрической проницаемости принимает простой вид

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon_1 \frac{1 - \pi(\Delta_{12} + \Delta_{13})/8}{1 + \pi(\Delta_{12} + \Delta_{13})/8}. \quad (15)$$

Замена дробно-линейной функции линейной дает выражение

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon_1 [1 - (\pi/4)(\Delta_{12} + \Delta_{13})]. \quad (16)$$

Выражение (10) определяет эффективную диэлектрическую проницаемость изотропного композитного материала с плотной регулярной упаковкой цилиндрических волокон двух видов, образующих квадратную решетку. Относительные концентрации двух включений и матрицы соответственно равны 0,4, 0,4 и 0,2 (точнее, $\pi/8$, $\pi/8$ и $1 - \pi/4$).

3. Анализ основных формул. Рассмотрим частные случаи выражения для эффективной диэлектрической проницаемости (10).

Двухкомпонентные материалы. 1. При $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ ($\Delta_{12} = \Delta_{13}$) имеем двухкомпонентный композит с плотной квадратной упаковкой однотипных волокон с концентрацией включений и матрицы соответственно 0,8 и 0,2 ($\pi/4$ и $1 - \pi/4$). Выражение для эффективной диэлектрической проницаемости такого материала имеет вид

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon_1 \frac{1 - \pi\Delta_{12}/4 + \Phi(\Delta_{21})}{1 + \pi\Delta_{12}/4 + \Phi(\Delta_{12})}. \quad (17)$$

Здесь согласно выражению (13)

$$\Phi(\Delta_{12}) = \sum_{k=1}^{\infty} \{\Delta_{12}^{2k} [A_k + B_k + (A_k + B_{k+1})\Delta_{12} + C_k + D_k + (C_k + D_{k+1})\Delta_{12}]\},$$

где коэффициенты при параметре Δ_{12} определяются формулами (14).

Рэлей, исследуя более общую двумерную систему [10], для рассматриваемого случая получил (в обозначениях, принятых в настоящей работе) следующее выражение:

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon_1 \frac{1 - \pi\Delta_{12}/4 - f_j(\Delta_{21})}{1 + \pi\Delta_{12}/4 - f_j(\Delta_{12})}. \quad (18)$$

Функция $f_j(\Delta_{21})$ в выражении (18) может быть вычислена с любой точностью (индекс $j = 1, 2, \dots$ обозначает порядок приближения). Для третьего приближения

$$f_3(\Delta_{12}) = -0,312 \Delta_{12}^2 - 0,1594 \Delta_{12}^3 + 0,0004 \Delta_{12}^4. \quad (19)$$

Выражения для эффективной диэлектрической проницаемости (17), (18) получены различными методами. Рэлей применил классическую теорию потенциала. В настоящей работе используются методы теории функций комплексного переменного. Относительные зависимости

$$\varepsilon_{eff}^*(\Delta_{21}) = \varepsilon_{eff}(\Delta_{21})/\varepsilon_1 \quad (20)$$

представлены на рис. 3. Кривые совпадают в диапазоне $0 \leq \Delta_{21} < 0,75$ и незначительно различаются лишь при $\Delta_{21} > 0,75$.

Поскольку формулы (17), (18) приближенные, вопрос о том, какая из них более точно описывает эффективную диэлектрическую проницаемость при $\Delta_{21} > 0,75$, остается открытым. По этому поводу можно сделать лишь некоторые замечания. Теоретически при $\Delta_{21} = 1$ ($\varepsilon_2 \rightarrow \infty$) рассматриваемая система должна переходить в однородное (металлическое) состояние, поэтому $\varepsilon_{eff}^* \rightarrow \infty$. Фактически же параметр ε_{eff}^* , вычисленный по формулам (17), (18), принимает соответственно значения 310 и 24. В этом отношении в принятом приближении формула (17) точнее формулы (18). В линейном приближении по параметру Δ_{21} аналитические выражения формул (17) и (18) совпадают.

2. Если в общей формуле (10) положить $\varepsilon_3 = \varepsilon_1$ ($\Delta_{13} = 0$), т. е. исключить один из двух компонентов, то получим композитный материал с периодическим расположением однотипных волокон при концентрации включений и матрицы соответственно 0,4 и 0,6 ($\pi/8$ и $1 - \pi/8$). Структура такого материала в поперечном сечении показана на рис. 4.

Переход металл — диэлектрик. Если два вида включений в композите переходят в металлическую фазу: $\varepsilon_2, \varepsilon_3 \rightarrow \infty$ ($\Delta_{12}, \Delta_{13} \rightarrow -1$), то в рассматриваемой системе реализуется переход металл — диэлектрик: $\varepsilon_{eff} \rightarrow \infty$.

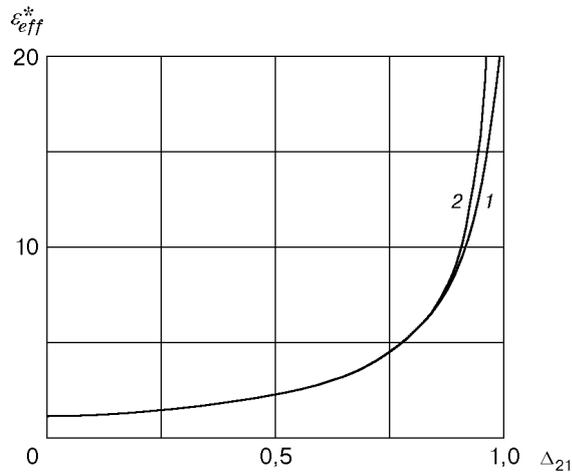


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость эффективной диэлектрической проницаемости двухкомпонентного диэлектрического материала от параметра Δ_{21} :

1 — вычисление по формуле Рэлея (18), 2 — по формуле (17)

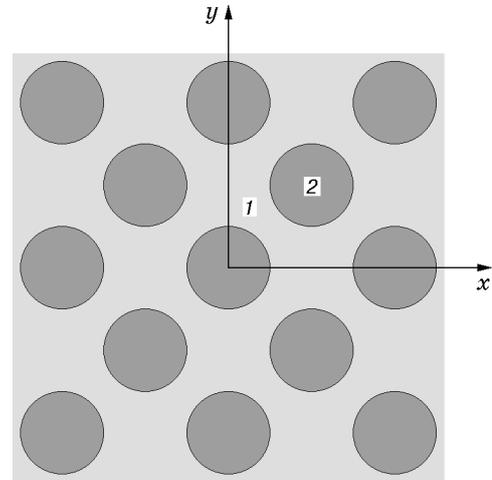


Рис. 4

Рис. 4. Двухкомпонентный диэлектрический материал с периодическим распределением однонаправленных волокон:

1 — матрица, 2 — волокно с диэлектрической проницаемостью ε_2

Характеристическая диэлектрическая среда. Пусть диэлектрические проницаемости матрицы и включений связаны соотношением

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_3}, \quad (21)$$

что равносильно равенству

$$\Delta_{12} = -\Delta_{13}. \quad (22)$$

Тогда из выражения (13) с учетом соотношений (11) и (12) следует $\Phi(\Delta_{21}, \Delta_{31}) = \Phi(\Delta_{12}, \Delta_{13}) = \Phi(\Delta_{12})$, где $\Phi(\Delta_{12}) = \sum_{k=1}^{\infty} [(-A_k - B_k + C_k + D_k)\Delta_{12}^{2k}]$. Коэффициенты при переменной Δ_{12} вычисляются по формулам (14). В результате выражение для эффективной диэлектрической проницаемости (10) принимает вид

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon_1. \quad (23)$$

В случае, когда диэлектрическая проницаемость матрицы неоднородного изотропного материала равна среднему геометрическому проницаемостей двух видов включений, эффективная проницаемость такого материала равна проницаемости матрицы, хотя на долю последней приходится лишь около 20% материала. С физической точки зрения это свойство эффективной диэлектрической проницаемости объясняется тем, что в неоднородном диэлектрике при выполнении соотношения (21) или (22) проницаемость одного вида включений больше проницаемости матрицы, а проницаемость другого меньше. Вследствие этого диэлектрические поляризации в разнородных включениях имеют противоположные направления и при строгом выполнении равенства (21) взаимно компенсируются. Поскольку поляризация в кусочно-однородном диэлектрике происходит на границе матрица — включения, она существенно зависит от формы граничных контуров, а не от относительных концентраций включений и матрицы.

Диэлектрическую среду с указанными свойствами называют характеристической по аналогии с характеристическим импедансом линии передачи, для которой $Z = \sqrt{L/C}$ (Z — сопротивление, L — индуктивность, C — емкость элементов линии).

4. Диаграмма относительной эффективной диэлектрической проницаемости. Для анализа осредненных характеристик неоднородной среды удобно ввести в рассмотрение относительную эффективную диэлектрическую проницаемость, определенную следующим выражением:

$$\Delta_{eff} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_{eff}}{\varepsilon_1 + \varepsilon_{eff}}. \quad (24)$$

Эта величина изменяется на конечном интервале $-1 \leq \Delta_{eff} \leq 1$ при любых значениях проницаемостей матрицы ε_1 и включений ε_2 и ε_3 или параметров Δ_{12} и Δ_{13} . Подставляя выражение (10) в формулу (24), получим

$$\Delta_{eff} = \frac{s(\Delta_{12} + \Delta_{13}) + \Phi^-(\Delta_{12}, \Delta_{13})}{1 + \Phi^+(\Delta_{12}, \Delta_{13})}. \quad (25)$$

Здесь $s = \pi/4$ — суммарная концентрация двух видов включений; функции Φ^+ и Φ^- определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \Phi^+(\Delta_{12}, \Delta_{13}) &= [\Phi(\Delta_{12}, \Delta_{13}) + \Phi(\Delta_{21}, \Delta_{31})]/2, \\ \Phi^-(\Delta_{12}, \Delta_{13}) &= [\Phi(\Delta_{12}, \Delta_{13}) - \Phi(\Delta_{21}, \Delta_{31})]/2. \end{aligned} \quad (26)$$

Используя выражение (13), из соотношений (26) получим

$$\begin{aligned} \Phi^+(\Delta_{12}, \Delta_{13}) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} [2(A_k + B_k)\Delta^k + (C_k + D_k)(\Delta_{12}^{2k} + \Delta_{13}^{2k})], \\ \Phi^-(\Delta_{12}, \Delta_{13}) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} [(A_k + B_{k+1})\Delta^k(\Delta_{12} + \Delta_{13}) + (C_k + D_{k+1})(\Delta_{12}^{2k+1} + \Delta_{13}^{2k+1})]. \end{aligned} \quad (27)$$

Из выражений (27) следует, что функция $\Phi^+(\Delta_{12}, \Delta_{13})$ четная, а функция $\Phi^-(\Delta_{12}, \Delta_{13})$ нечетная относительно параметров Δ_{12} и Δ_{13} .

Если диэлектрические проницаемости включений ε_2 и ε_3 близки к проницаемости матрицы ε_1 и, следовательно, малы абсолютные величины параметров Δ_{12} и Δ_{13} ($|\Delta_{12}|, |\Delta_{13}| \ll 1$), то в выражении (25) можно отбросить все члены, содержащие параметры Δ_{12} и Δ_{13} во второй и более высоких степенях. Это означает, что можно положить

$$\Phi^+(\Delta_{12}, \Delta_{13}) = \Phi^-(\Delta_{12}, \Delta_{13}) = 0. \quad (28)$$

При выполнении условия (28) относительная эффективная диэлектрическая проницаемость представляется в виде однородной линейной функции двух переменных

$$\Delta_{eff} = s(\Delta_{12} + \Delta_{13}). \quad (29)$$

Эту зависимость можно также получить из выражений (15), (16).

На рис. 5 показана зависимость $\Delta_{eff}(\Delta_{12})$ при значениях параметра $\Delta_{13} = 0; \pm 0,25; \pm 0,5; \pm 0,75; \pm 1,0$. На диаграмме представлен весь диапазон эффективной диэлектрической проницаемости исследуемой диэлектрической среды. Все значения параметра Δ_{eff} ограничены криволинейным четырехугольником $ABCD$. На диаграмме можно выделить несколько характерных зависимостей и отдельных точек.

Зависимость $\Delta_{eff}(\Delta_{12})$ при $\Delta_{13} = 0$ ($\varepsilon_1 = \varepsilon_3$) соответствует двухкомпонентной системе со структурой, представленной на рис. 4. Включения имеют диэлектрическую проницаемость ε_2 . Такая же структура материала имеет место для значений параметра Δ_{eff} на отрезке MN : $\Delta_{12} = 0$ ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2$), но включения имеют проницаемость ε_3 .

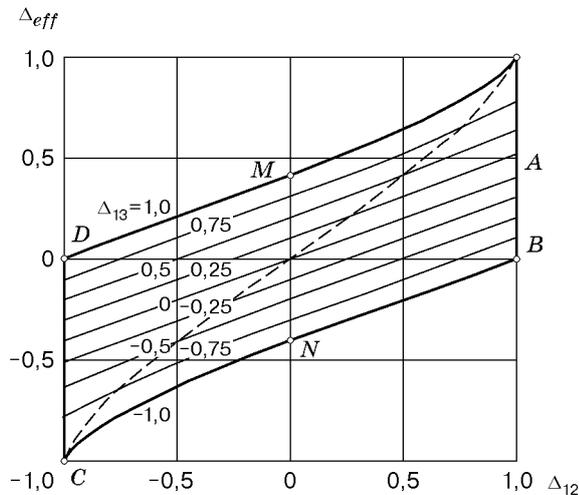


Рис. 5. Зависимость относительной эффективной диэлектрической проницаемости Δ_{eff} от параметра Δ_{12} при различных значениях Δ_{13}

На отрезке DB , где $\Delta_{eff} = 0$ ($\varepsilon_{eff} = \varepsilon_1$), композитный материал имеет свойства характеристической среды (см. п. 3).

Граничные линии криволинейного четырехугольника $ABCD$ определяют свойства неоднородных материалов, для которых диэлектрическая проницаемость одного из двух видов включений либо значительно превосходит по величине проницаемость матрицы, либо значительно меньше ее. Так, на кривой AD выполняется условие $\varepsilon_3 \gg \varepsilon_1$ ($\Delta_{13} = -1$), на кривой BC — $\varepsilon_3 \ll \varepsilon_1$ ($\Delta_{13} = 1$); на отрезке AB справедливо соотношение $\varepsilon_2 \ll \varepsilon_1$ ($\Delta_{12} = 1$), на отрезке DC — $\varepsilon_2 \gg \varepsilon_1$ ($\Delta_{12} = -1$).

Точки A и C определяют состояние материала, при котором происходят переходы металл — диэлектрик: $\Delta_{eff} = \pm 1$. Из рис. 5 следует, что неоднородный диэлектрик может переходить в однородное (металлическое) состояние при двух условиях: 1) переход в металлическую фазу обоих включений: $\varepsilon_2, \varepsilon_3 \rightarrow \infty$ ($\Delta_{12}, \Delta_{13} \rightarrow -1$) (точка C на рис. 5); 2) переход в металлическую фазу материала матрицы: $\varepsilon_1 \rightarrow \infty$ ($\Delta_{12}, \Delta_{13} \rightarrow 1$) (точка A на рис. 5).

Начало координат на рис. 5 соответствует однородному материалу. В его окрестности эффективные характеристики композита Δ_{eff} и ε_{eff} имеют вид линейной зависимости от параметров Δ_{12} и Δ_{13} , что следует также из выражения (29).

Штриховая кривая на рис. 5 соответствует зависимости $\Delta_{eff}(\Delta_{12})$ для двухкомпонентного материала, когда все включения в системе с плотной упаковкой имеют одинаковые диэлектрические проницаемости: $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ ($\Delta_{12} = \Delta_{13}$).

5. Соотношения взаимности. Используя выражение (10), можно установить, что эффективная диэлектрическая проницаемость рассматриваемого изотропного трехкомпонентного материала удовлетворяет соотношению взаимности

$$\varepsilon_{eff}(\Delta_{12}, \Delta_{13})\varepsilon_{eff}(\Delta_{21}, \Delta_{31}) = \varepsilon_1^2, \quad (30)$$

где по определению (11) перемена индексов параметров Δ_{12} и Δ_{13} приводит к изменению их знаков: $\Delta_{12} = -\Delta_{21}$ и $\Delta_{13} = -\Delta_{31}$.

При переходе к двумерной системе ($\varepsilon_3 = \varepsilon_2$ ($\Delta_{13} = \Delta_{12}$)) соотношение взаимности (30) принимает вид

$$\varepsilon_{eff}(\Delta_{12})\varepsilon_{eff}(\Delta_{21}) = \varepsilon_1^2. \quad (31)$$

Обычно соотношение (31) записывается следующим образом:

$$\varepsilon_{eff}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\varepsilon_{eff}(\varepsilon_2, \varepsilon_1) = \varepsilon_1\varepsilon_2. \quad (32)$$

Здесь первый аргумент параметра ε_{eff} обозначает диэлектрическую проницаемость матрицы, второй — включения.

Соотношения (31) и (32) эквивалентны, что следует из полученных выше формул для параметра ε_{eff} , а также из аналитических выражений для эффективных параметров некоторых двумерных систем, допускающих точное решение. В качестве примера можно рассмотреть систему со структурой типа шахматного поля, черные и белые клетки которой представлены различными диэлектриками с проницаемостями ε_1 и ε_2 . Эта изотропная неоднородная система имеет, как известно [11, 12], эффективную диэлектрическую проницаемость

$$\varepsilon_{eff} = \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \quad (33)$$

и удовлетворяет соотношению взаимности (32).

Если ввести параметр Δ_{12} , то формула (33) преобразуется к виду

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{1 - \Delta_{12}}{1 + \Delta_{12}}}. \quad (34)$$

Соотношение взаимности принимает теперь вид (31).

Если перейти к выражению для относительной эффективной диэлектрической проницаемости Δ_{eff} , то формула (34) примет вид

$$\Delta_{eff} = \frac{2}{\Delta_{12}} (1 - \sqrt{1 - \Delta_{12}^2}). \quad (35)$$

Из формулы (35) следует, что соотношение взаимности записывается как условие нечетности функции $\Delta_{eff}(\Delta_{12})$:

$$\Delta_{eff}(\Delta_{12}) = -\Delta_{eff}(\Delta_{21}). \quad (36)$$

График этой функции симметричен относительно начала координат (штриховая кривая на рис. 5).

Для относительной эффективной диэлектрической проницаемости для трехкомпонентной среды (25) соотношение взаимности также представляется в виде условия нечетности функции двух независимых переменных

$$\Delta_{eff}(\Delta_{12}, \Delta_{13}) = -\Delta_{eff}(\Delta_{21}, \Delta_{31}). \quad (37)$$

Это соотношение следует из выражения (25) с учетом четности и нечетности функций $\Phi^+(\Delta_{12}, \Delta_{13})$ и $\Phi^-(\Delta_{21}, \Delta_{31})$ соответственно, определенных формулами (27) (см. также рис. 5).

Соотношение (37) является обобщением (36). Продолжая процесс вычислений, по индукции можно получить соотношение взаимности для изотропных матричных композитов с произвольным числом компонентов. Если, например, диэлектрический материал с проницаемостью ε_1 содержит n видов включений с проницаемостями $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_{n+1}$, то соотношение взаимности для относительной эффективной диэлектрической проницаемости такого композита записывается следующим образом:

$$\Delta_{eff}(\Delta_{12}, \Delta_{13}, \dots, \Delta_{1(n+1)}) = -\Delta_{eff}(\Delta_{21}, \Delta_{31}, \dots, \Delta_{(n+1)1}). \quad (38)$$

Соотношение взаимности отражает наиболее общие свойства изотропного матричного материала независимо от его структуры, числа компонентов и их объемной концентрации. В виде теоремы утверждение (38) доказано Келлером [13] для двумерного двухкомпонентного матричного материала с цилиндрическими включениями (модель Рэлея [10]). При достаточно общих предположениях справедливость соотношения взаимности для двумерных двухкомпонентных систем доказал алгебраическими методами Мендельсон [14].

Соотношение взаимности имеет общетеоретическое значение, но используется также в практических расчетах для контроля точности вычислений эффективных параметров.

Соотношению взаимности в виде (32) можно дать наглядную физическую интерпретацию. Для композитов с числом компонентов более двух такая наглядность теряется. Соотношение взаимности в виде (37) и (38) характерно также для феноменологических коэффициентов электромагнетизма.

Заключение. В исследованиях рассмотренной системы используются точные решения модельных задач о взаимодействии двух разнородных цилиндрических тел во внешнем однородном электрическом поле. Парные взаимодействия включений суммируются с учетом конечной зоны их взаимного влияния. Очевидно, что чем больше область влияния, тем больше включений попадает в зону взаимодействий и тем точнее рассчитываются осредненные характеристики неоднородной среды. Однако с увеличением области влияния быстро возрастает объем вычислений. В принятой схеме расчета погрешность вычислений можно оценить на каждом шаге решения задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Хорошун Л. П., Маслов Б. П., Лещенко П. В.** Прогнозирование эффективных свойств пьезоактивных композитных материалов. Киев: Наук. думка, 1989.
2. **Физика тонких пленок** / Под общ. ред. Г. Хасса, М. Франкомба, М. Гофмана. М.: Мир, 1978.
3. **Фокин А. Г.** Макроскопическая проводимость случайно-неоднородных сред. Методы расчета // Успехи физ. наук. 1996. Т. 166, № 7. С. 110–115.
4. **Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.** Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
5. **Аннин Б. Д., Каламкарров А. Л., Колпаков А. Г., Партон В. З.** Расчет и проектирование композиционных материалов и элементов конструкций. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 1993.
6. **Емец Ю. П.** Электрические характеристики композиционных материалов с регулярной структурой. Киев: Наук. думка, 1986.
7. **Победря Б. Е.** Механика композиционных материалов. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.
8. **Emets Yu. P., Onofrichuk Yu. P.** Interaction forces of dielectric cylinders in electric fields // IEEE Trans. Dielectr. Electr. Insulat. 1996. V. 3, N 1. P. 87–98.
9. **Емец Ю. П., Обносков Ю. В.** Точно разрешимая задача о взаимном влиянии включений в теории гетерогенных сред // ПМТФ. 1990. № 1. С. 21–29.
10. **Lord Rayleigh J. W.** On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium // Philos. Mag. 1892. V. 34, N 5. P. 87–98.
11. **Дыхне А. М.** Проводимость двумерной двухфазной системы // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1970. Т. 59, № 7. С. 110–115.
12. **Емец Ю. П.** Преобразование симметрии двумерной двухкомпонентной электропроводной системы // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1989. Т. 96, № 2. С. 701–711.
13. **Keller J. B.** A theorem on the conductivity of a composite medium // J. Math. Phys. 1964. V. 5, N 4. P. 548, 549.
14. **Mendelson K. S.** A theorem on the effective conductivity of a two-dimensional heterogeneous medium // J. Appl. Phys. 1975. V. 46, N 11. P. 4740, 4741.

*Поступила в редакцию 20/XII 1999 г.,
в окончательном варианте — 14/XII 2000 г.*