

УДК 519.6:532.517+621.7

Численная оценка режимов модифицирования поверхностного слоя металла лазерным импульсом при наличии поверхностно-активного вещества в расплаве*

В.Н. Попов, А.Н. Черепанов

*Институт теоретической и прикладной механики
им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск*

E-mail: popov@itam.nsc.ru

Выполнено численное моделирование процесса модифицирования поверхностного слоя металла тугоплавкими наноразмерными частицами с помощью импульсного лазерного излучения. Определены режимы импульсного лазерного воздействия, способствующие формированию течений для гомогенного распределения частиц модифицирующего вещества в расплаве при различных количествах поверхностно-активной примеси в металле.

Ключевые слова: модифицирование, наноразмерные тугоплавкие частицы, импульсное лазерное излучение, конвективный теплоперенос, численное моделирование.

Введение

При модификации поверхностей деталей для улучшения их эксплуатационных свойств широко применяется лазерное излучение. Одним из перспективных способов решения этой задачи является модифицирование расплава наноразмерными специально подготовленными частицами тугоплавких соединений (карбиды, нитриды, карбонитриды и др.) [1]. При этом увеличение дисперсности частиц позволяет при сохранении их массы увеличить количество центров кристаллизации, а следовательно, измельчать структурные составляющие затвердевающего металла, повышая его однородность.

При исследовании процессов, происходящих в поверхностном слое металла под воздействием лазерного импульса, определено, что одним из главных факторов, влияющих на эффективность модифицирования, является термокапиллярная конвекция, которая может способствовать гомогенному распределению вносимых материалов, проникающих в ходе подплавления в расплав [2–5]. В работах [6–10] рассматривалось влияние растворенных в расплаве поверхностно-активных веществ (ПАВ) на характер конвекции, было определено, что структура течений в расплавленном металле зависит от количества и состава присутствующих в нем примесей. Наряду с этим по результатам исследований [9, 10] можно сделать вывод, что разное количество ПАВ в металле требует различных режимов

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-08-00633).

воздействия лазерного импульса для получения высокой однородности распределения модифицирующих добавок в объеме расплава.

В настоящей работе с использованием численного моделирования исследуется распределение модифицирующего материала, проникающего в металлическую подложку с ее поверхности при импульсном лазерном воздействии. Рассматривается нестационарный процесс, включающий разогрев металла, его плавление, тепло- и массоперенос в расплаве и далее, после окончания импульса, зарождение и рост твердой фазы. С помощью математической модели [10], описывающей термо- и гидродинамические явления, а также процессы затвердевания в подложке, анализируется характер формирующихся течений и распределение модифицирующих наноразмерных частиц в зависимости от количества поверхностно-активного вещества в металле и режимов импульсного лазерного воздействия.

Постановка задачи

Рассматривается воздействие импульсного лазерного луча с фокусным пятном радиуса r_0 на металлическую подложку из низкоуглеродистого сплава железа с содержанием серы, являющейся поверхностно-активным веществом. Импульс имеет продолжительность t_H , а плотность мощности потока описывается распределением Гаусса. Поверхность подложки покрыта слоем специально подготовленных модифицирующих наноразмерных частиц тугоплавкого соединения, которые служат активными центрами кристаллизации [1]. Под воздействием лазерной энергии металл разогревается и плавится. Фазовый переход происходит при температуре плавления материала подложки T_m . В образовавшейся и увеличивающейся со временем жидкой лунке развивается конвекция под действием капиллярных и термогравитационных сил. Смачиваемые частицы под действием конвективных потоков проникают в глубину проплавленной лунки. Для расплава используются условия прилипания на твердом фронте кристаллизации. После завершения импульса за счет отвода тепла в неразогретый материал подложки и теплообмена с окружающей средой происходит остывание расплава и его объемно-последовательная кристаллизация в предположении, что все проникшие наночастицы являются ее центрами. Границы r_g , z_g рассматриваемой области выбраны таким образом, чтобы их положение не оказывало влияние на исследуемые процессы.

Для упрощения задачи считается, что теплофизические характеристики жидкой, твердой и двухфазной сред являются одинаковыми и не зависят от температуры. Массовое содержание частиц m_p , проникающих в расплав, мало ($m_p \leq 0,05\%$), их диаметр d_p много меньше характерного размера жидкой лунки, так что влиянием включений на физические параметры расплава можно пренебречь. Количество растворенных примесных компонентов в расплаве незначительно, так что можно не учитывать их влияние на температуру фазового перехода, полагая $T_m = \text{const}$. Плавление металла рассматривается в приближении Стефана с использованием эффективной теплоемкости [11]. Предполагается, что при используемых режимах нагрева небольшие величины конвективных скоростей обуславливают плоскую форму свободной поверхности жидкости [12].

Распределение температурного поля в твердом и жидком материалах подложки описывается уравнениями конвективного теплопереноса в цилиндрической системе координат, которые для безразмерных переменных запишутся в виде

$$c_{\text{ef}}[\theta_t + (\nabla \cdot \mathbf{u})\theta] = \frac{1}{\text{Pr}} \nabla^2 \theta, \quad 0 \leq r \leq r_g, \quad -z_g \leq z \leq 0, \quad 0 \leq t \leq t_H \quad (1)$$

при воздействии лазерного импульса и

$$\theta_t + (\nabla \cdot \mathbf{u})\theta = \frac{1}{\text{Pr}} \nabla^2 \theta + \text{St}(f_s)_t, \quad 0 \leq r \leq r_g, \quad -z_g \leq z \leq 0, \quad t > t_H \quad (2)$$

после завершения разогрева. Здесь θ — температура, t — время, $Pr = \nu/a$ — число Прандтля, ν — кинематическая вязкость расплава, a — температуропроводность, \mathbf{u} — вектор скорости в расплавленном металле с компонентами u, w в радиальном (r) и вертикальном (z) направлениях соответственно (в твердом металле $u \equiv 0, w \equiv 0$), $St = \kappa/(c_p T_m)$ — число Стефана, κ — удельная теплота плавления, c_p — удельная теплоемкость, f_s — доля твердой фазы в материале. Эффективная теплоемкость, учитывающая скрытую теплоту фазового перехода κ , описывается соотношением $c_{ef} = 1 + \delta(\theta)St$, где $\delta(\theta) = 1$ при $\theta \in [1 - \Delta\theta/2, 1 + \Delta\theta/2]$ и $\delta(\theta) = 0$, если $\theta \notin [1 - \Delta\theta/2, 1 + \Delta\theta/2]$, $\Delta\theta$ — температурный интервал, на котором размывается фазовая граница. Безразмерные параметры определяются с помощью характерного размера r_0 , скорости $v_0 = v/r_0$, времени $t_0 = r_0/v_0$ и температуры T_m : $r = r/r_0, z = z/r_0, u = u/v_0, w = w/v_0, t = t/t_0, \theta = T/T_m$. При плавлении материала скорость v_n каждой точки границы «расплав–твердая фаза» $\zeta(r, z, t)$ определяется условием

$$St v_n = \frac{1}{Pr} \left(\left. \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\theta=1-} - \left. \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\theta=1+} \right),$$

где \mathbf{n} — единичный вектор нормали. При затвердевании предполагается, что все наночастицы являются центрами кристаллизации, тогда доля твердой фазы f_s в двухфазной зоне расплава определяется согласно [13] из соотношения $f_s = 1 - \exp\{-\Omega N_p\}$, где

$$\Omega(r, z, t - \xi) = \frac{4\pi}{3} \left[r_p + K_v \int_{\xi}^t (T_m - T) d\zeta \right]^3$$

— объем растущего зародыша, возникшего в момент времени $t = \xi$, N_p — число наночастиц в единице объема расплава, $r_p = d_p/2$, K_v — эмпирическая константа.

Граничные условия для уравнений (1), (2) определены следующим образом.

На оси симметрии

$$\partial\theta/\partial r = 0, \quad r = 0, \quad -z_g \leq z \leq 0; \quad (3)$$

на внешней боковой границе расчетной области

$$\partial\theta/\partial r = 0, \quad r = r_g, \quad -z_g \leq z \leq 0; \quad (4)$$

на верхней границе ($z = 0$) при нагреве от источника ($t \leq t_H$)

$$\partial\theta/\partial z = q(r), \quad 0 \leq r \leq 1, \quad \partial\theta/\partial z = \alpha(\theta_c - \theta), \quad 1 < r \leq r_g \quad (5)$$

и после завершения импульса ($t > t_H$)

$$\partial\theta/\partial z = \alpha(\theta_c - \theta), \quad 0 \leq r \leq r_g; \quad (6)$$

на нижней границе расчетной области

$$\partial\theta/\partial z = 0, \quad 0 \leq r \leq r_g, \quad z = -z_g, \quad (7)$$

здесь $\alpha = \alpha_0 r_0 / \lambda$, $q(r) = [q_0 \exp(-2r^2)] r_0 / (\lambda T_m)$, $\alpha_0 = \varepsilon \sigma_0 (T^2 + T_c^2)(T + T_c)$, $q(r)$ — плотность мощности теплового источника (в безразмерном виде), σ_0 — постоянная Стефана–Больцмана, λ, ε — теплопроводность и степень черноты материала подложки,

q_0 — максимальная плотность мощности потока, T_c — температура окружающей среды ($\theta_c = T_c / T_m$).

При плавлении металла в области $\theta > 1$ с границей «расплав–твердая фаза» $\zeta(r, z, t)$ течение в жидкости описывается уравнениями Навье–Стокса в приближении Буссинеска:

$$\begin{aligned} u_t + (\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} &= -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{k}Gr(\theta - 1), \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

здесь p — давление ($p = p / p_0$, $p_0 = \rho v_0^2$, ρ — плотность материала подложки), $Gr = \beta_\rho g r_0^3 T_m / \nu^2$ — число Грасгофа, g — ускорение свободного падения, β_ρ — коэффициент объемного теплового расширения расплава, \mathbf{k} — единичный вектор вдоль координатной оси z .

Граничные условия для уравнений (8) заданы следующим образом.

На поверхности «расплав–твердая фаза» $\zeta(r, z, t)$

$$u = 0, \quad w = 0; \quad (9)$$

на оси симметрии $r = 0$, $-z_f(t) \leq z \leq 0$ ($-z_f(t)$ — координата границы фазового перехода)

$$u = 0, \quad \partial w / \partial r = 0; \quad (10)$$

на поверхности жидкости $z = 0$, $0 \leq r < r_f(t)$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{Mn}{Pr} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial r} \eta, \quad w = 0, \quad (11)$$

где $r_f = r_f(t)$ — радиус лунки расплавленного металла на свободной поверхности. При наличии в расплаве поверхностно-активных веществ для описания поверхностного натяжения используется эмпирическая формула [7]

$$\sigma = \sigma_0 - k_\sigma (T - T_m) - TR\Gamma_s \ln(1 + KC_s), \quad K = S_l \exp[-\Delta H^0 / (RT)],$$

где σ_0 — поверхностное натяжение в чистом металле в точке плавления, $k_\sigma = -\partial \sigma / \partial T$ — для чистого металла, R — универсальная газовая постоянная, C_s — концентрация примеси ПАВ на поверхности расплава, S_l — константа, соответствующая энтропии сегрегации, ΔH^0 — стандартная теплота адсорбции, Γ_s — избыток примеси в поверхностном слое на единицу площади. Тогда

$$\frac{\partial \sigma}{\partial T} = -k_\sigma - R\Gamma_s \ln(1 + KC_s) - \frac{KC_s}{1 + KC_s} \cdot \frac{\Gamma_s \Delta H^0}{T}, \quad (12)$$

откуда определяются $Mn = -k_\sigma T_m r_0 / (\rho \nu a)$ — число Марангони и $\eta = 1 + R\Gamma_s \ln(1 + KC_s) / k_\sigma + \frac{KC_s}{1 + KC_s} \cdot \frac{\Gamma_s \Delta H^0}{Tk_\sigma}$.

Начальные условия для уравнения теплопереноса (1) имеют вид:

$$\theta = \theta_0, \quad (13)$$

для (8) (в только что расплавленном металле)

$$u = 0, \quad w = 0. \quad (14)$$

Предполагается, что хорошо смачиваемые модифицирующие наноразмерные частицы под действием конвективных потоков проникают в глубину проплавленной лунки. Движение и распределение наночастиц в расплаве оценивались с помощью M -маркеров, начальное положение которых описывалось координатами (r_m^0, z_m^0) , $0 \leq r_m^0 \leq 1$, $z_m^0 = -r_p$, $m = 1, \dots, M$. Маркеры перемещались в соответствии с локально осредненными скоростями в ближайшей окрестности каждого из них. Отметим, что механизм взаимодействия с расплавом частиц модифицирующего вещества, расположенных на поверхности подложки, не рассматривается ввиду того, что не все частицы могут быть одинаково обработаны в процессе плакирования.

Алгоритм решения задачи

При реализации модели (1)–(13), которая включает в себя уравнения Навье–Стокса и конвективного тепло- и массопереноса, применялся конечно-разностный алгоритм. Дискретизация пространственной расчетной области осуществлялась на $I \times K$ ячеек. По временной переменной использовался постоянный шаг τ . Распределение температуры описывалось значениями в узлах сетки. Разностные уравнения строились посредством неявной аппроксимации балансных соотношений, полученных интегрированием уравнений (1), (2), (8) с учетом соответствующих граничных условий. При аппроксимации (8) в области расплавленного материала, по аналогии с методами типа MAC и SIMPLE [14, 15], составляющие скоростей u , w определялись в серединах боковых граничных ячеек, а давление p — в центрах ячеек.

Алгоритм включал следующий порядок действий. Первоначально вычислялось температурное поле в подложке при воздействии энергии лазерного луча. После появления жидкой лунки на каждом временном шаге устанавливалась граница фазового перехода. Подстановка найденных значений температуры в уравнения количества движения делала возможным определение составляющих поля скоростей. Далее с использованием метода искусственной сжимаемости [16] рассчитывалось давление. Производилось несколько итераций для согласования найденных величин распределения давления и скоростей до выполнения неравенства $\max |\nabla \cdot \mathbf{u}| \leq \Delta$, где Δ — заданное малое число. Решение алгебраических систем, получаемых при аппроксимации уравнений движения и теплопереноса, осуществлялось итерационным методом блочной последовательной верхней релаксации [17].

С помощью соотношений $r_m^n = r_m^{n-1} + u_m^n \tau$, $z_m^n = z_m^{n-1} + v_m^n \tau$, $m = 1, \dots, M$, вычислялись новые координаты маркеров r_m^n , z_m^n на n -ом временном шаге. Здесь u_m^n , v_m^n — скорости перемещения частиц, определяемые в соответствии с локально осредненными скоростями в ближайшей окрестности каждой из них.

После завершения лазерного импульса решение задачи продолжалось до момента полного затвердевания материала подложки. Конвективное перераспределение маркеров происходило только в расплаве, а в затвердевшей области фиксировались последние вычисленные координаты.

Вычисления проводились на пространственных сетках $I \times K$ от 120×150 до 240×300 ячеек при временном шаге $\tau = 5 \cdot 10^{-6}$, $\Delta = 10^{-4}$, $\Delta \theta = 0,005$, $M = 25$.

Результаты численных экспериментов

Численные исследования проводились при следующих параметрах: $r_0 = 0,001$ м, $z_g = 0,0006$ м, $r_g = 0,0015$ м, $t_H = 0,002$ – $0,009$ сек, $T_c = 300$ К, $T_0 = 300$ К, $q_0 = (2-6) \cdot 10^8$ Вт/м². Теплофизические свойства сплава составляли: $\rho = 7065$ кг/м³, $T_l = 1775$ К, $\lambda = 27$ Вт/(м·К),

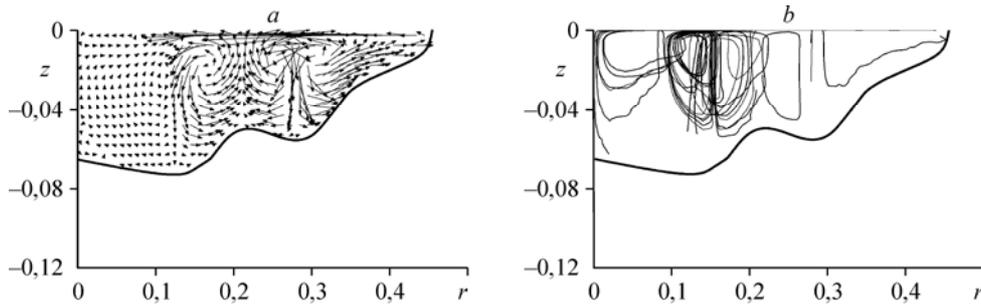


Рис. 1. Поле скоростей (а), траектории и распределение маркеров (b) в расплаве при $q_0 = 4 \cdot 10^8 \text{ Вт/м}^2$, $t_H = 0,0045 \text{ с}$.

$c_p = 787 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$, $\kappa = 2,77 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$, $\nu = 8,5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$, $k_\sigma = 4,3 \cdot 10^{-4} \text{ Н/(м}\cdot\text{К)}$, $\beta_\rho = 1,18 \cdot 10^{-4} \text{ 1/К}$, $\varepsilon = 0,5$, $R = 8314,3 \text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)}$, $S_l = 3,18 \cdot 10^{-3}$, $\Gamma_s = 1,3 \cdot 10^{-8} \text{ моль/м}^2$, $\Delta H^0 = -1,88 \cdot 10^8 \text{ Дж/моль}$, $K_v = 0,025 \text{ м/(с}\cdot\text{К)}$, $d_p = 10^{-7} \text{ м}$, $N_p = 2,0 \cdot 10^{18} \text{ 1/м}^3$ [7, 8]. Рассматриваемые объемы серы в железе C_s составляли 0–0,04 % от массы.

На рис. 1, 2 отображены структура течения и распределение модифицирующих частиц при концентрации поверхностно-активного вещества в расплаве 0,02 % от массы при различных характеристиках лазерного импульса. Рисунок 1 иллюстрирует результаты, полученные при $q_0 = 4 \cdot 10^8 \text{ Вт/м}^2$, $t_H = 0,0045 \text{ сек}$. На рис. 1а изображено поле скоростей в расплаве в момент завершения лазерного импульса. Здесь и далее стрелки на рисунке указывают направление потока, а их длина характеризует его интенсивность. Из расчетов следует, что к моменту прекращения импульса вдоль свободной поверхности жидкости имеет место существенная немонотонность параметра $\partial\sigma/\partial T$, принимающего как положительные, так и отрицательные значения, которая приводит к возникновению нескольких тороидальных вихрей. Было определено, что с момента подплавления подложки вблизи свободной поверхности при незначительном перегреве расплава присутствует течение от границы фазового перехода к центру лунки, которое переносит модифицирующие частицы в эту область. В центральной части лунки модификаторы проникают на значительную глубину лишь на первом этапе плавления за счет нисходящего течения, а при значительном перегреве расплава восходящее движение жидкости, являющееся следствием естественной конвекции, этому препятствует (рис. 1b). На момент прекращения импульса восходящее течение вдоль границы фазового перехода не дает проникать вводимому материалу в глубь расплава на его периферии. Нисходящее течение способствует переносу в глубь расплава как тепла, оказывающего влияние на форму границы фазового перехода, так и модифицирующих частиц. Таким образом, модифицирование происходит в незначительной области лунки, фактически отсутствует в центре

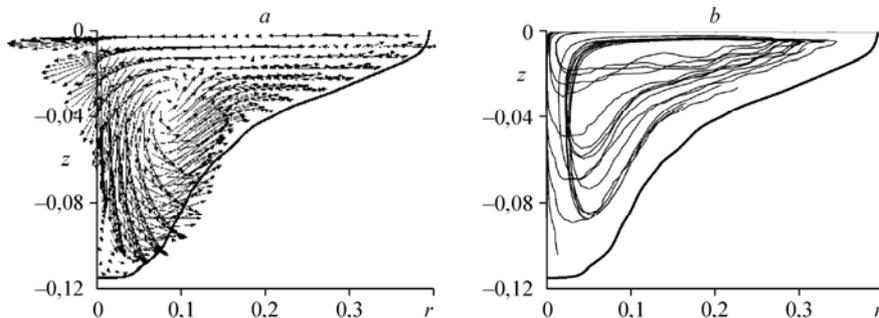


Рис. 2. Поле скоростей (а), траектории и распределение маркеров (b) в расплаве при $q_0 = 3,3 \cdot 10^8 \text{ Вт/м}^2$, $t_H = 0,0055 \text{ с}$.

и на периферии расплава, а рассмотренный режим обработки поверхности металла не является эффективным.

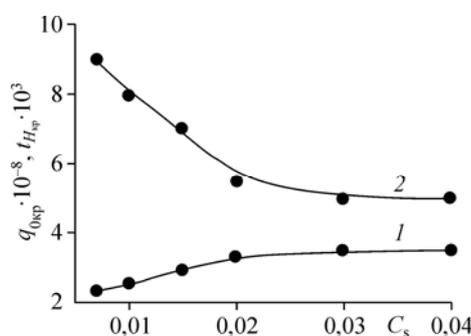
Рисунок 2 отображает результаты, полученные при $q_0 = 3,3 \cdot 10^8 \text{ Вт/м}^2$, $t_H = 0,0055 \text{ с}$. Из представленных данных следует, что к моменту прекращения импульса в расплаве формируется главный вихрь, определяемый силами поверхностного натяжения, с направлением течения вблизи свободной поверхности жидкости от границы фазового перехода к центру лунки с сильным нисходящим потоком в этой области (рис. 2a) и слабый вихрь в придонной части, являющийся следствием естественной конвекции. Незначительный перегрев поверхности расплава позволяет сохранять подобную структуру течения с момента плавления металла до завершения импульса. Это приводит к тому, что с появлением расплавленного металла модифицирующие частицы увлекаются течением и проникают в центре лунки в глубь расплава, а затем расходящимся потоком с высокой равномерностью распределяются по всему его объему (рис. 2b). Слабое восходящее движение жидкости от границы фазового перехода в центре лунки препятствует проникновению частиц в эту область. При этом незначительный перегрев поверхности расплава способствует сохранению ее плоской формы, что важно при модифицировании поверхностного слоя металла.

В ходе численных экспериментов было определено, что при различных концентрациях поверхностно-активного вещества в расплаве железа ($0,005 \% < C_s \leq 0,04 \%$) существуют режимы воздействия лазерного импульса для получения структуры течения с наиболее однородным распределением наноразмерных частиц в расплаве, совпадающим с представленным на рис. 2. На рис. 3 представлены кривые, иллюстрирующие предельные (критические) значения максимальной плотности мощности потока $q_{0\text{кр}}$ (1) и продолжительности лазерного импульса $t_{H\text{кр}}$ (2) при различных концентрациях ПАВ, определенные по результатам расчетов. В случае продолжительности импульса выше $t_{H\text{кр}}$ для представленных мощностей потока $q_{0\text{кр}}$ в расплаве возникает несколько тороидальных вихрей, а распределение вводимых частиц становится не достаточно однородным и результат качественно совпадает с представленным на рис. 1. Если же $t_H < t_{H\text{кр}}$ при $q_0 = q_{0\text{кр}}$, то структура течений и распределение частиц сохраняется подобно представленным на рис. 2, однако размер образующейся лунки и модифицированного металла сокращается. Схожий результат получается при превышении $q_{0\text{кр}}$ мощности потока для установленных величин $t_{H\text{кр}}$. То есть в ходе численных экспериментов было определено, что для повышения эффективности модифицирования поверхностного слоя металла необходимо принимать во внимание содержание в нем ПАВ и с учетом этого выбирать режимы его обработки.

После отключения источника энергии температурные градиенты в жидкости уменьшаются, интенсивность конвекции снижается, металл остывает, чему способствует низкая начальная температура подложки. После снятия перегрева в металле начинается объемно-последовательная кристаллизация в направлении к поверхности подложки, продолжающаяся 1–1,5 мс. Толщина двухфазной

Рис. 3. Значения максимальной мощности потока $q_{0\text{кр}}$ (1) и продолжительности импульса $t_{H\text{кр}}$ (2) при различных концентрациях ПАВ в металле для получения однородного распределения наночастиц.

Символы — вычисленные значения.



зоны может достигать 10 мкм. Как показали численные расчеты, возможный учет гомогенного зарождения кристаллов при наличии в расплаве высокоактивированных наночастиц никак не сказывается на кинетике кристаллизации. Это связано с тем, что при реальных скоростях охлаждения необходимые условия для возникновения такого типа зародышеобразования не достигаются.

Заключение

В результате численного моделирования показано, что при наличии в жидком металле ПАВ можно влиять на структуру конвективного течения, меняя продолжительность и мощность импульса, что способствует более однородному распределению модифицирующих частиц. Можно сделать вывод о том, что поверхностно-активные вещества, являясь компонентами расплава, существенно влияют на процессы модифицирования и, следовательно, для повышения качества обработки поверхностного слоя металла необходимо принимать во внимание его состав и с учетом этого выбирать режимы его обработки. Определение оптимального режима обработки поверхности металла с учетом присутствия ПАВ в расплаве может способствовать проникновению большого количества модифицирующих частиц на значительную глубину, что приведет к измельчению структурных составляющих затвердевшего металла и повышению его однородности.

Список литературы

1. Сабуров В.П., Еремин Е.Н., Черепанов А.Н., Миннеханов Г.Н. Модифицирование сталей и сплавов дисперсными инокуляторами. Омск: Изд-во ОмГТУ, 2002. 212 с.
2. Uglov A.A., Smurov I.Yu., Taguirov K.I., Guskov A.G. Simulation of unsteady-state thermocapillary mass transfer for laser doping of metals // Int. J. Heat Mass Transfer. 1992. Vol. 35, No. 4. P. 783–793.
3. He X., Fuerschbach P.W., DeRoy T. Heat transfer and fluid flow during laser spot welding of 304 stainless steel // J. Phys. D: Appl. Phys. 2003. Vol. 36. P. 1388–1398.
4. Майоров В.С. Лазерное упрочнение металлов // Лазерные технологии обработки материалов: современные проблемы фундаментальных исследований и прикладных разработок / Под ред. В.Я. Панченко. М.: Физматлит, 2009. С. 439–469.
5. Зуев А.Л., Костарев К.Г. Особенности концентрационно-капиллярной конвекции // Успехи физических наук. 2008. Т. 178, № 10. С. 1065–1085.
6. Гладуш Г.Г., Лиханский В.В., Лобойко А.И. Влияние поверхностно-активных веществ на тепло- и массоперенос при плавлении поверхности вещества лазерным импульсом // Квантовая электроника. 1997. Т. 24, № 3. С. 274–278.
7. Sahoo P., DeRoy T., McNallan M.J. Surface tension of binary metal-surface active solute systems under conditions relevant to welding metallurgy // Metall. Trans. B. 1988. Vol. 19B. P. 483–491.
8. Ehlen G., Ludwig A., Sahm P.R. Simulation of time-dependent pool shape during laser spot welding: transient effects // Metall. Mater. Trans. A. 2003. Vol. 34A. P. 2947–2961.
9. Попов В.Н., Цивинский М.Ю., Цивинская Ю.С. Численная оценка влияния поверхностно-активного вещества в расплаве на конвективный массоперенос при воздействии на металл лазерным импульсом // Математическое моделирование. 2012. Т. 24, № 3. С. 87–96.
10. Черепанов А.Н., Попов В.Н. Численный анализ влияния поверхностно-активного вещества в расплаве на распределение модифицирующих частиц и кристаллизацию при обработке поверхности металла лазерным импульсом // Теплофизика и аэромеханика. 2014. Т. 21, № 3. С. 273–281.
11. Будаг Б.М., Соловьева Е.Н., Успенский А.Б. Разностный метод со сглаживанием коэффициентов для решения задач Стефана // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1965. Т. 5, № 5. С. 828–840.
12. Hñche D., Müller S., Rapin G. et al. Marangoni convection during free electron laser nitriding of titanium // Metall. Mater. Trans. B. 2009. Vol. 40, No. 4. P. 497–507.
13. Баландин Г.Ф. Основы теории формирования слитка. М.: Машиностроение, 1979. 335 с.
14. Harlow F.H., Welch J.E. Numerical calculation of time-depend viscous incompressible flow of fluid with free surface // Phys. Fluids. 1965. Vol. 8. P. 2182–2189.
15. Patankar S.V., Spalding D.B. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows // Int. J. Heat Mass Trans. 1972. Vol. 15. P. 1787–1806.
16. Chorin A.J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems // J. Comput. Phys. 1967. Vol. 2. P. 12–26.
17. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решений сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 592 с.

*Статья поступила в редакцию 2 апреля 2015 г.,
после доработки — 3 августа 2016 г.*