

УДК 534.1

## ИССЛЕДОВАНИЕ ИНЕРЦИОННОЙ СТАДИИ ВЫПУЧИВАНИЯ СТЕРЖНЯ ПРИ ПРОДОЛЬНОМ СЖАТИИ

М. А. Ильгамов

Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН, 117901 Москва, Россия  
Институт механики им. Р. Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН,  
450054 Уфа, Россия  
E-mail: ilgamov@anrb.ru

Решается задача о динамическом выпучивании стержня под действием сжимающей силы с учетом инерционных и упругих сил на различных стадиях процесса. Определена длительность инерционной стадии. Показано, что в твердых телах и газожидкостных средах длительность инерционной стадии для реальных параметров элементов конструкций может быть больше длительности ударного нагружения.

Ключевые слова: стержень, динамическое сжатие, инерционные и упругие силы, динамическое выпучивание.

DOI: 10.15372/PMTF20170418

**1. Постановка задачи.** Изучению динамического выпучивания тонкостенных упругих тел посвящено большое количество работ. В [1] рассматривается выпучивание тонкой полосы единичной ширины под действием продольной сжимающей силы  $P$ , которая мгновенно прикладывается в момент времени  $t = 0$  и остается постоянной до момента времени  $t = t_e$ , а затем резко уменьшается до нуля. При этом не учитывается продольная волновая динамика и предполагается, что сила мгновенно действует по всей длине стержня. Учитываются начальные малые прогибы, причем это состояние является ненапряженным. Найдены решения для случаев

$$P < P_E, \quad P = P_E, \quad P > P_E \quad (P_E = \pi^2 D/L^2, \quad D = Eh^3/12), \quad (1.1)$$

где  $P_E$  — статическая критическая нагрузка;  $E$ ,  $L$ ,  $h$  — модуль упругости материала, длина и толщина полосы. Несмотря на то что в [1] приведено решение для произвольного числа полуволен  $n$ , основное внимание уделяется сравнению динамического и статического выпучивания при  $n = 1$ . В [2] рассматривается та же задача о динамическом выпучивании при  $t_e \rightarrow \infty$ .

В работе [3] исследовано динамическое выпучивание цилиндрической оболочки (трубки) как по низшей гармонике  $n = 2$ , так и по высшим гармоникам [4]. Кроме того, в [3] приведен результат эксперимента по выпучиванию стержня при продольном ударе. Также в [3] подтверждено волнообразование с различным числом полуволен  $n$  в зависимости от отношения  $P/P_E$ . Преобладающей является гармоника  $n$  в окрестности значения

$$n_L = \sqrt{P/(2P_E)}. \quad (1.2)$$

В работах [5–7] изучалась динамика тонких стержней, пластин, панелей и оболочек с учетом различных факторов. В частности, численно изучено влияние продольных волн, возбуждаемых ударом груза по торцу стержня. Различные аспекты задачи рассматривались в работах [8–11] и др. Аналитическое решение задачи получено в случае мгновенного увеличения сжимающей силы  $P$ , которая далее оставалась постоянной (как при конечных значениях  $t_e$ , так и при  $t_e \rightarrow \infty$ ), а также в случае ее увеличения по линейному закону [7].

В данной работе задача рассматривается в постановке [1–3] при  $L/h \geq 10^3$ . Нагружение сжимающей силой  $P$  начинается в момент  $t = 0$ . Продольные колебания не учитываются. Стержень со свободно опертыми концами имеет начальный и дополнительный прогибы:

$$w_0 = W_{0n} \sin(n\beta x), \quad w = W_n(t) \sin(n\beta x), \quad \beta = \pi/L, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.3)$$

Предполагается, что при начальном прогибе  $w_0(x)$  стержень свободен от напряжений. Начальные условия имеют вид  $w(x, 0) = 0$ ,  $\dot{w}(x, 0) = 0$ .

Решая уравнение динамического изгиба

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2(w_0 + w)}{\partial x^2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1.4)$$

с учетом (1.3) и указанных выше начальных условий, получаем [1, 2, 7]

$$\frac{W_n}{W_{0n}} = \left(\frac{s_n}{k_n}\right)^2 (\operatorname{ch}(k_n t) - 1), \quad k_n > 0, \quad (1.5)$$

$$k_n^2 = s_n^2 - \omega_n^2, \quad s_n^2 = P n^2 \beta^2 / (\rho h), \quad \omega_n^2 = P E n^4 \beta^2 / (\rho h).$$

Случаю  $k_n = 0$  соответствует движение с постоянным ускорением ( $2W_n = W_{0n} s_n^2 t^2$ ). При  $k_n < 0$  второе выражение в скобках в (1.5) нужно заменить выражением  $1 - \cos(k_n t)$ , где  $k_n^2 = \omega_n^2 - s_n^2$ .

**2. Начальная стадия динамического выпучивания стержня при мгновенном приложении нагрузки.** Рассмотрим случай  $k_n t < 1$ . Сохраняя в (1.5) три члена разложения функции  $\operatorname{ch}(k_n t)$  в степенной ряд, получаем

$$\frac{W_n}{W_{0n}} = \frac{s_n^2 t^2}{2} \left(1 + \frac{k_n^2 t^2}{12}\right), \quad k_n > 0. \quad (2.1)$$

При  $k_n t \leq 1/3$  в формуле (2.1) можно сохранить только первый член в скобках, при этом погрешность будет составлять приблизительно 1 %. С использованием выражения для скорости  $\dot{W}_n = W_{0n} s_n^2 t (1 + k_n^2 t^2 / 6)$  получаем оценку  $k_n t \leq 1/4$ . Это приближение означает, что в стержне упругие силы малы по сравнению с внешними и инерционными силами в интервале  $0 < t \leq t_*$ , где  $t_* = 1/(4k_n)$ , или

$$t_* = \frac{\sqrt{3} L^2}{2\pi^2 n h c \sqrt{\eta^2 - n^2}}, \quad c^2 = \frac{E}{\rho}, \quad \eta^2 = \frac{P}{P_E}. \quad (2.2)$$

Время  $t_*$  инерционного сопротивления стержня действию продольной сжимающей силы тем больше, чем больше длина стержня и чем меньше его толщина и скорость распространения волны растяжения-сжатия. Наименьшее значение  $t_*$  достигается для гармоник с числом полувольт  $n \approx \eta/\sqrt{2}$  (или в соответствии с (1.2) с числом полувольт  $n$ , приближенно равным числу Лаврентьева  $n_L$ ), а наибольшее — для гармоник с  $n \approx \eta$ . В случае  $L = 1$  м,  $L/h = 10^3$ ,  $c = 5000$  м/с,  $\eta^2 = 4,1$  при  $n = 1$  из формулы (2.2) получаем  $t_* \approx 0,01$  с, при  $n = 2$  —  $t_* \approx 0,0277$  с. В случае  $L = 0,1$  м  $t_* \approx 0,0001$  с ( $n = 1$ ).

За время  $t_*$ , определенное по формуле (2.2), прогиб достигает величины  $2W_n = W_{0n}s_n^2t_*^2$ , или  $2W_n = W_{0n}(s_n/(4k_n))^2$ . С учетом (1.5), (2.2) отсюда получаем

$$\frac{W_n}{W_{0n}} = \frac{\eta^2}{32(\eta^2 - n^2)}. \quad (2.3)$$

Следует отметить, что на начальной стадии динамики стержня максимальное значение прогиба (2.3) зависит только от отношения  $P/P_E = \eta^2$  и числа полуволн  $n$ , которое определяется начальными условиями. При  $t_* = 0,0100; 0,0277$  с из (2.3) следует  $W_1/W_{01} \approx 0,04$ ,  $W_2/W_{02} \approx 1,28$ .

Естественно, если в (1.5) сохранить следующие члены ряда, то длительность начальной стадии увеличится. При этом упругие силы становятся сравнимыми с инерционными силами. В данной работе рассматривается случай  $k_n t \leq 1/4$  и используется оценка (2.2). Заметим, что в случае  $k_n < 0$  в (2.1) знак “плюс” перед вторым членом нужно заменить на знак “минус”. Во всех трех случаях ( $k_n < 0$ ,  $k_n = 0$ ,  $k_n > 0$ ) на рассматриваемой начальной стадии

$$2W_{0n} = W_{0n}s_n^2t^2, \quad \dot{W}_n = W_{0n}s_n^2t \quad (0 \leq t \leq t_*). \quad (2.4)$$

Эти выражения при  $t = t_*$  являются начальными условиями при решении задачи при  $t \geq t_*$  (на этом интервале времени сила  $P$  постоянна). Из решения уравнения (1.4) с учетом (2.4) получаем

$$\frac{W_n}{W_{0n}} = \left(\frac{s_n}{k_n}\right)^2 \begin{cases} [1 - (1 - k_n^2 t_*^2/2) \cos k_n(t - t_*) + k_n t_* \sin k_n(t - t_*)], & k_n < 0, t \geq t_*, \\ [(1 + k_n^2 t_*^2/2) \operatorname{ch} k_n(t - t_*) + k_n t_* \operatorname{sh} k_n(t - t_*) - 1], & k_n > 0, t \geq t_*. \end{cases} \quad (2.5)$$

Представляет интерес оценка принятого в работах [1–3] и др. допущения о мгновенном действии силы  $P$  по всей длине стержня. Отношение времени  $t_*$  (2.2) к наибольшему периоду продольных колебаний  $2L/c$  имеет порядок  $0,044L/(hn\sqrt{\eta^2 - n^2})$ . При принятых выше данных и  $n = 1, 2$  это отношение равно 25 и 71 соответственно. Таким образом, за время  $t_* = 0,010; 0,055$  с происходит многократное отражение продольных волн от концов стержня, в результате чего сжимающая сила выравнивается по всей длине, при этом прогибы малы и равны  $W_1 = 0,04W_{01}$ ,  $W_2 = 1,28W_{02}$  соответственно.

На рис. 1 представлены зависимости прогиба от времени, вычисленные по соотношениям (1.5), (2.4), (2.5) при  $t_* = 0,01; 0,02; 0,03$  с, хотя для данных, принятых при построении рис. 1, значения  $t_*$ , вычисленные по формуле (2.2), равны  $t_* = 0,0058$  с ( $n = 1$ ) и  $t_* = 0,0035$  с ( $n = 2$ ). Кривая 2 ( $t_* = 0,01$  с) незначительно отличается от кривой, соответствующей точному решению. Существенное различие этих кривых наблюдается при  $t_* = 0,02; 0,03$  с, значительно превышающих значения  $t_*$ , вычисленные по критерию (2.2).

В случае равномерно распределенной по длине стержня боковой нагрузки  $q$ , мгновенно приложенной в момент  $t = 0$  и далее остающейся постоянной, полагая в (1.3), (1.4)  $n = 1$ ,  $w_0 = 0$ ,  $P = 0$ ,  $W_1(0) = 0$ ,  $\dot{W}_1(0) = 0$ , получаем

$$W_1 = \frac{4q}{\pi D \beta^4 \omega_1^2} (1 - \cos \omega_1 t), \quad \omega_1^2 = \frac{D \beta^4}{\rho h}.$$

С учетом трех членов разложения  $\cos \omega_1 t$  в степенной ряд находим

$$W_1 \approx \frac{2qt^2}{\pi D \beta^4} \left(1 - \frac{\omega_1^2 t^2}{12}\right), \quad \dot{W}_1 \approx \frac{4qt^2}{\pi D \beta^4} \left(1 - \frac{\omega_1^2 t^2}{6}\right).$$

Из этих формул следует, что чисто инерционное движение имеет место до момента  $t_* = 1/(4\omega_1)$ , или

$$t_* = \sqrt{3} L^2 / (2\pi^2 hc). \quad (2.6)$$

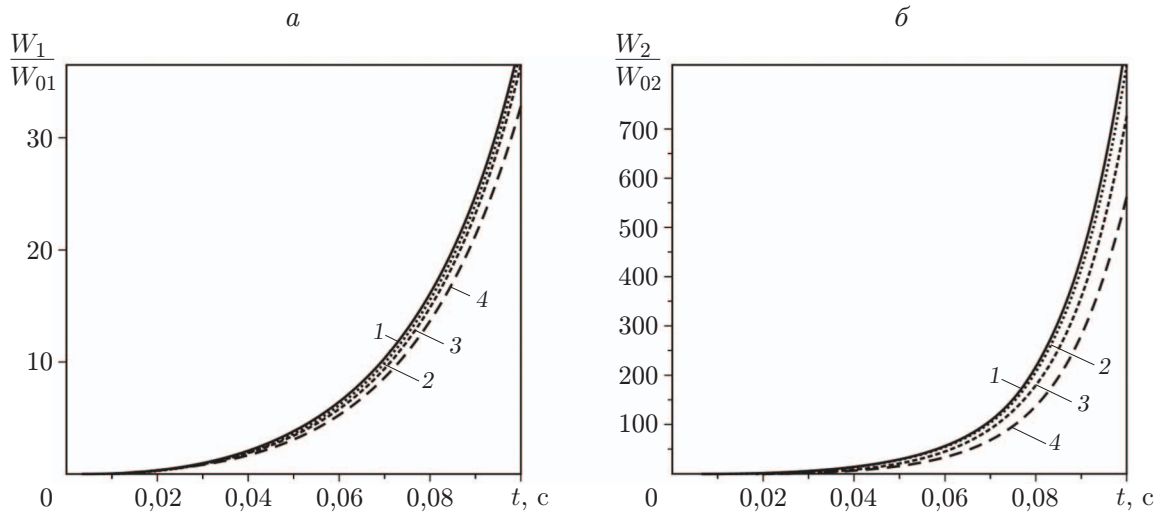


Рис. 1. Зависимости относительных амплитуд прогибов  $W_n/W_{0n}$  от времени  $t$  при  $L = 1$  м,  $L/h = 10^3$ ,  $c = 5000$  м/с,  $\eta^2 = 10$ :  
 а —  $n = 1$ , б —  $n = 2$ ; 1 — расчет по формуле (1.5) при  $k_n > 0$ , 2–4 — расчет по формулам (2.4), (2.5) (2 —  $t_* = 0,01$  с, 3 —  $t_* = 0,02$  с, 4 —  $t_* = 0,03$  с)

В отличие от случая продольного изгиба это время зависит не от действующей силы, а от размеров и материала стержня. Значения  $t_*$ , вычисленные по (2.6), совпадают со значениями  $t_*$ , вычисленными по формуле (2.2), если в ней принять  $\sqrt{|\eta^2 - n^2|} \approx 1$ . Таким образом, в случае действия боковых сил также может быть выделена инерционная стадия изгиба стержня.

**3. Выпучивание стержня при сложных законах нагружения.** На инерционной стадии движения стержня решение уравнения (1.4) с достаточной точностью можно представить в виде степенного ряда. Это представление можно использовать при исследовании движения стержня не только в случае скачкообразного приложения силы  $P$ , но и в случае более сложных законов ее изменения в интервале  $[0, t_e]$  ( $t_e \leq t_*$ ). В частности, можно получить формулы (2.1), (2.4).

Рассмотрим случай изменения нагрузки по закону  $P(t) = P_0(t/t_e)$  при  $0 \leq t \leq t_e$ ,  $P(t) = P_0$  при  $t > t_e$ . Считаем, что начальный и дополнительный прогибы задаются формулами (1.3). Первые члены решения уравнения (1.4) в степенных рядах по  $t$  имеют вид

$$\frac{W_n}{W_{0n}} = \frac{s_n^2 t^3}{6t_e} \left(1 - \frac{\omega_n^2 t^2}{20}\right), \quad \frac{\dot{W}_n}{W_{0n}} = \frac{s_n^2 t^2}{2t_e} \left(1 - \frac{\omega_n^2 t^2}{12}\right) \quad (0 \leq t \leq t_e). \quad (3.1)$$

Из условия  $\omega_n t_* = 1/3$  с учетом определения  $\omega_n$  в (1.5) находим

$$t_* = 2L^2 / (\sqrt{3} \pi^2 n^2 hc). \quad (3.2)$$

Тогда в соответствии с (3.1) при  $t_* = t_e$  амплитуда прогиба равна

$$\frac{W_n}{W_{0n}} = \frac{s_n^2 t_*^3}{6t_e} = \frac{\eta^2}{54n^2}. \quad (3.3)$$

Отношения длительности инерционной стадии выпучивания стержня (3.2) и амплитуды в конце этой стадии (3.3) к соответствующим значениям, вычисленным по формулам (2.2) и (2.3), равны  $4\sqrt{\eta^2 - n^2}/(3n)$  и  $16(\eta^2 - n^2)/(27n^2)$ . Эти отношения зависят только

от  $\eta$  и  $n$ . Если  $\eta^2 = 4,1$ , то при  $n = 1$  они равны 2,35 и 1,84, при  $n = 2$  — 0,21 и 0,015. Таким образом, в зависимости от отношения  $P/P_E$  и числа полувольт  $n$ , задаваемого начальным прогибом, длительность  $t_*$  чисто инерционной стадии выпучивания стержня (при  $t_e = t_*$ ) и соответствующий прогиб в случае нагружения по закону  $P = P(t/t_e)$  при  $0 \leq t \leq t_e$ ,  $P = \text{const}$  при  $t > t_e$  могут быть как больше, так и меньше, чем в случае нагружения по закону  $P = \text{const}$  при  $t > 0$ .

Рассмотрим случай  $k_n > 0$ . При  $t > t_*$  ( $t_* = t_e$ ) и начальных условиях  $6W_n = W_{0n}s_n^2t_e^2$ ,  $2\dot{W}_n = W_{0n}s_n^2t_e$ , следующих из (3.1), решение уравнения (1.4) имеет вид

$$\frac{W_n}{W_{0n}} = \frac{s_n^2}{k_n^2} \left( \left( 1 + \frac{k_n^2 t_e^2}{6} \right) \text{ch } k_n(t - t_e) + \frac{k_n t_e}{2} \text{sh } k_n(t - t_e) - 1 \right) \quad (k_n > 0, \quad t > t_e). \quad (3.4)$$

В случае нагружения по закону  $P = P(t/t_e)^2$  при  $0 \leq t \leq t_e$ ,  $P = \text{const}$  при  $t > t_e$  решение уравнения (1.4) имеет вид

$$\frac{W_n}{W_{0n}} = \frac{s_n^2 t^4}{12 t_e^2} \left( 1 - \frac{\omega_n^2 t^2}{30} \right), \quad \frac{\dot{W}_n}{W_{0n}} = \frac{s_n^2 t^3}{3 t_e^2} \left( 1 - \frac{\omega_n^2 t^2}{20} \right) \quad (0 \leq t \leq t_e). \quad (3.5)$$

Полагая  $(\omega_n t_*)^2 = 1/5$ , находим длительность инерционной стадии выпучивания

$$t_* \approx 3L^2 / (2\pi^2 n^2 h c). \quad (3.6)$$

При  $t_* = t_e$  соответствующее значение амплитуды прогиба равно

$$W_n / W_{0n} = \eta^2 / (60n^2). \quad (3.7)$$

Отношения значений  $t_*$ , вычисленных по формулам (3.6), (3.2), и значений  $W_n / W_{0n}$ , вычисленных по формулам (3.7), (3.3), составляют 1,3 и 0,9 соответственно. Таким образом, в случае квадратичного закона увеличения нагрузки длительность инерционной стадии выпучивания больше, чем в случае линейного закона приложения нагрузки, а значения прогибов в конце инерционной стадии — меньше.

При  $t \geq t_e = t_*$  получаем решение уравнения (1.4) с начальными условиями при  $t = t_e$ , следующими из (3.5), с учетом первых трех членов:

$$\frac{W_n}{W_{0n}} = \frac{s_n^2}{k_n^2} \left( \left( 1 + \frac{k_n^2 t_e^2}{12} \right) \text{ch } k_n(t - t_e) + \frac{k_n t_e}{3} \text{sh } k_n(t - t_e) - 1 \right) \quad (k_n > 0, \quad t \geq t_e). \quad (3.8)$$

На рис. 2 приведены зависимости амплитуд прогиба, вычисленных по формулам (1.5), (3.1), (3.4), (3.5), (3.8), от времени.

**4. Выпучивание стержня при кратковременном нагружении.** В случае приложения сжимающей силы в интервале времени  $0 \leq t \leq t_e$  будем полагать  $t_e \leq t_*$ . Оценки значений  $t_*$  приведены выше.

При нагружении по закону  $P = P_0$  при  $0 \leq t \leq t_e$ ,  $P = 0$  при  $t > t_e$  амплитуда прогиба при любом значении  $k_n$  определяется первым членом в выражении (2.1). Так как при  $t > t_e$  нагрузка  $P = 0$ , то решение описывает колебательный процесс, определяемый условиями (2.4) при  $t = t_e$ . Поэтому, с учетом того что при  $t > t_e$   $k_n = \omega_n$ , из (2.1) и уравнения (1.4) при  $P = 0$  получаем

$$2W_n = W_{0n}s_n^2t_e^2 \quad (0 \leq t \leq t_e), \quad (4.1)$$

$$\frac{W_n}{W_{0n}} = \frac{s_n^2 t_e^2}{2} \left( \cos \omega_n(t - t_e) + \frac{2}{\omega_n t_e} \sin \omega_n(t - t_e) \right) \quad (t > t_e).$$

В случае изменения нагрузки по закону  $P = P(t/t_e)$  при  $0 \leq t \leq t_e$ ,  $P = 0$  при  $t > t_e$  решение имеет вид

$$\frac{W_n}{W_{0n}} = \begin{cases} s_n^2 t^3 / (6t_e), & 0 \leq t \leq t_e, \\ (s_n^2 t_e^2 / 6) [\cos \omega_n(t - t_e) + (3 / (\omega_n t_e)) \sin \omega_n(t - t_e)], & t > t_e. \end{cases} \quad (4.2)$$

Частота  $\omega_n$  определяется из условий  $6W_n = W_{0n}s_n^2t_e^2$ ,  $2\dot{W}_n = W_{0n}s_n^2t_e$  при  $t = t_e$ .

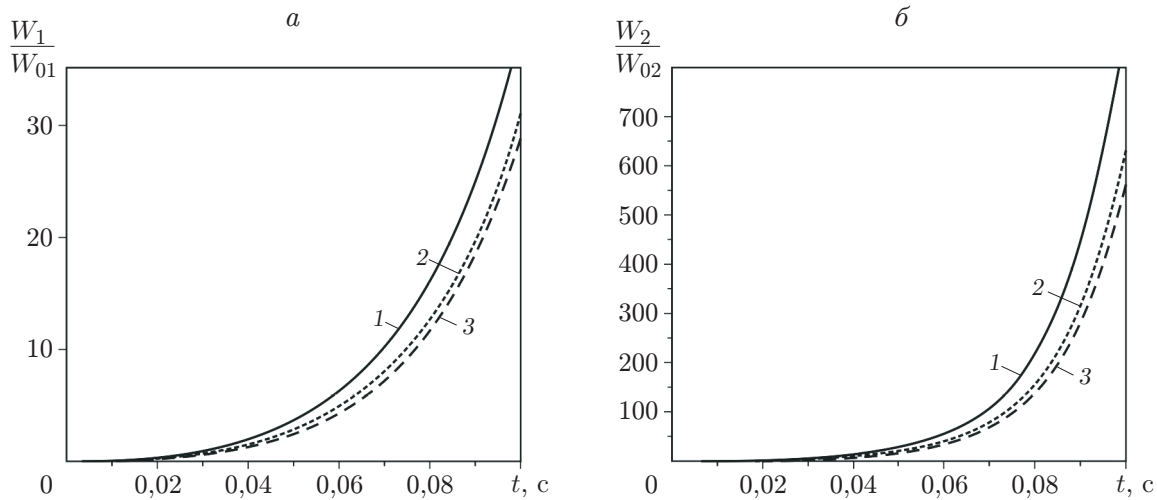


Рис. 2. Зависимости относительных амплитуд прогибов  $W_n/W_{0n}$  от времени  $t$  при  $L = 1$  м,  $L/h = 10^3$ ,  $c = 5000$  м/с,  $\eta^2 = 10$ ,  $k_1 > 0$ :  
 а —  $n = 1$ , б —  $n = 2$ ; 1 — расчет по формуле (1.5), 2 — расчет по формулам (3.1), (3.4), 3 — расчет по формулам (3.5), (3.8)

В случае изменения нагрузки по закону  $P = 4P(t/t_e - t^2/t_e^2)$  при  $0 \leq t \leq t_e$  имеем

$$\frac{W_n}{W_{0n}} = \frac{2s_n^2 t^3}{3t_e} \left( 1 - \frac{t}{2t_e} - \frac{\omega_n^2 t^2}{20} \right), \quad \dot{W}_n = \frac{2s_n^2 t^2}{t_e} \left( 1 - \frac{2t}{3t_e} - \frac{\omega_n^2 t^2}{12} \right). \quad (4.3)$$

Из второго выражения (4.3) следует выражение  $t_* = 1/(3\omega_n)$ , которое совпадает с (3.2). При этом выражение для амплитуды прогиба имеет вид

$$\frac{W_n}{W_{0n}} = \begin{cases} (2s_n^2 t^3 / (3t_e))(1 - t/(2t_e)), & 0 \leq t \leq t_e, \\ (s_n^2 t_e^2 / 3)[\cos \omega_n(t - t_e) + (2/(\omega_n t_e)) \sin \omega_n(t - t_e)], & t \geq t_e. \end{cases} \quad (4.4)$$

Так как  $\omega_n = \pi n/T_1$  ( $T_1$  — половина периода изгибных колебаний по первой гармонике), то время  $t_* = 1/(3\omega_n) = T_1/(3\pi n)$  при  $n = 1$  составляет приблизительно  $1/10$  полупериода колебаний.

Из (4.1) следует, что в случае мгновенного приложения нагрузки при  $t = 0$  и снятии ее при  $t = t_e$  прогиб увеличивается с постоянным ускорением на интервале  $[0, t_e]$ . При действии нагрузки на интервале  $[0, t_e]$  по закону  $P = P(t/t_e)$  прогиб, соответствующий решению (4.2) на этом интервале, возрастает с ускорением, изменяющимся по линейному закону. При действии нагрузки на интервале  $[0, t_e]$  по закону  $P = 4P(t/t_e - t^2/t_e^2)$  прогиб, соответствующий решению (4.4), возрастает с ускорением, изменяющимся по более сложному закону. На рис. 3 приведены решения (4.1), (4.2), (4.4).

**5. Сравнение длительностей ударного нагружения и инерционной стадии выпучивания стержня.** Ниже проводится сравнение длительности инерционной стадии изгиба  $t_*$  и длительности ударного воздействия на стержень  $t_e$ .

В случае удара грузом массой  $M$  по торцу стержня длиной  $L$  (другой конец стержня неподвижен) с площадью поперечного сечения  $F = 1 \cdot h$  при скорости распространения в стержне волны с продольная сила изменяется во времени по закону  $P = \exp[-ct/(\varkappa L)]$ , где  $\varkappa$  — отношение массы груза  $M$  к массе стержня  $\rho FL$  [7, 12]. Предполагается, что груз абсолютно жесткий и после завершения удара не взаимодействует с торцом стержня. Уменьшение экспоненты на порядок происходит за время  $t \approx 5\varkappa L/(2c)$ . Это время примем

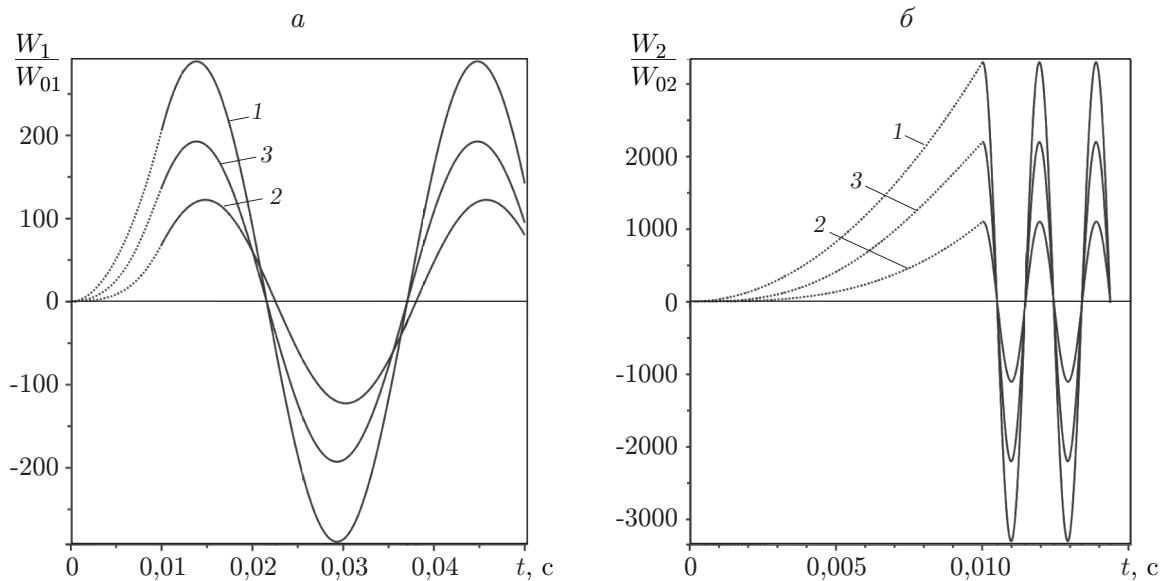


Рис. 3. Зависимости относительных амплитуд прогибов  $W_n/W_{0n}$  от времени  $t$  при  $L = 1$  м,  $L/h = 10^3$ ,  $c = 5000$  м/с,  $\eta^2 = 10$ ,  $k_1 > 0$ :  
 а —  $n = 1$ , б —  $n = 2$ ; 1 — расчет по формуле (4.1), 2 — расчет по формуле (4.2), 3 — расчет по формуле (4.4); пунктирные линии —  $0 \leq t \leq t_e$ , сплошные —  $t > t_e$

в качестве времени  $t_e$ . Так как время распространения волны от одного конца до другого и обратно равно  $2L/c$ , то за время  $t_e$  волна пробегает по стержню от одного конца до другого и обратно более  $\varkappa$  раз. При  $c = 5000$  м/с,  $L = 0,1$  м,  $\varkappa = 2$  получаем  $t_e \approx 10^{-4}$  с. Это значение меньше значения  $t_* \approx 10^{-3}$  с, которое было определено при этих параметрах выше. Поэтому сжатие стержня при таком ударе по торцу происходит на стадии его чисто инерционного изгиба. Таким образом, при принятых параметрах системы условие  $t_* \leq t_e$  выполняется. Представим эту оценку через произвольные входные параметры, например в случае нагрузки, действующей по закону  $P = 4P(t/t_e - t^2/t_e^2)$  на интервале  $[0, t_e]$ .

Так как согласно (4.3)  $t_* = 1/(3\omega_n)$ , то условие  $t_* \geq t_e$  принимает вид

$$L/h \geq 2\pi^2 n^2 \varkappa. \quad (5.1)$$

Если ударник изготовлен из того же материала, что и стержень, и имеет такую же площадь поперечного сечения и длину  $L/2$ , то из (5.1) следует  $L/h \geq \pi^2 n^2$ . Таким образом, для тонких стержней условие (5.1) выполняется.

Представляет интерес сравнение времени  $t_+$  изменения величины прогиба  $W_n/W_{0n}$  в соответствии с (1.5) в  $e^1$  раз и времени  $t_-$  изменения продольной силы  $P \exp[-ct/(\varkappa L)]$  в  $e^{-1}$  раз. Нетрудно показать, что  $t_+ = 1/k_n$ ,  $t_- = \varkappa L/c$ . С учетом (1.5) имеем

$$\frac{t_+}{t_-} \approx \frac{L}{3n\varkappa h \sqrt{\eta^2 - n^2}}. \quad (5.2)$$

Для гармоники  $n_L = \eta/\sqrt{2}$ , возрастающей наиболее быстро,  $t_+/t_- = 2L/(3\eta^2 h \varkappa)$ . При  $\eta^2 \varkappa < L/h$  уменьшение нагрузки происходит быстрее, чем увеличение прогиба. В этом случае  $t_* \leq t_e$ . При больших отношениях массы груза к массе стержня (отношение  $\varkappa$  порядка  $L/h$ ) происходит медленное уменьшение нагрузки, что соответствует допущению о постоянстве сжимающей силы после ее скачкообразного приложения, принятому в [1–3]. Более точное описание рассматриваемого процесса можно получить, если в случае  $\varkappa \sim L/h$  в выражении для  $s_n^2$  в (1.5) учесть силу, медленно изменяющуюся по закону  $P = P \exp[-ct/(\varkappa L)]$ .

В жидкостях длительность действия ударной волны имеет порядок  $10^{-3}$  с [13, 14]. Такая же оценка длительности действия ударной волны может быть получена из формулы  $t_e = 5\kappa L/(2c)$ , если, например, принять  $c = 1500$  м/с,  $L = 1$  м,  $\kappa = 1$ . Случай  $\kappa \gg 1$  соответствует длинной волне в жидкости, когда сила  $P$  уменьшается медленно в соответствии с приведенным выше законом. При получении этих оценок предполагалось, что давление жидкости приложено к торцу стержня.

Следует отметить, что при взрыве различных ВВ и разных режимах взрыва длительность действия волны в воздухе имеет порядок  $10^{-4} \div 10^{-3}$  с [15].

**Закключение.** При выпучивании стержня под действием продольной сжимающей силы  $P$ , мгновенно приложенной в момент времени  $t = 0$  и далее остающейся постоянной, существует начальная стадия  $0 \leq t \leq t_*$ , на которой упругие силы малы по сравнению с инерционными. При этом значение прогиба одинаково при любых значениях отношения  $P$  к критическому значению статической сжимающей силы  $P_E$ . Если оценивать длительность инерционной стадии выпучивания  $t_*$  через входные параметры, то она тем больше, чем больше длина стержня и чем меньше его толщина и скорость волны растяжения-сжатия, а также чем ближе номер гармоники  $n$  к числу Лаврентьева  $n_L$ .

Решение задачи для инерционной стадии движения может быть найдено в степенных рядах по  $t$ . Это позволяет рассматривать не только случай мгновенно приложенной нагрузки, остающейся постоянной на некотором интервале, но и другие случаи нагружения. Получены решения в случаях линейного и квадратичного законов приложения нагрузки.

Установлено, что для тонких стержней длительность инерционной стадии  $t_*$  может быть больше длительности ударного воздействия  $t_e$ . Для рассмотренных примеров  $t_* \approx 10^{-3} \div 10^{-1}$  с. При продольном ударе грузом по торцу стального стержня время  $t_e$  имеет порядок  $10^{-4}$  с, а при ударе поршнем по водяному столбу в вертикальной трубе  $t_e \approx 10^{-3}$  с.

Предложенный в работе подход позволяет проводить приближенный анализ динамического выпучивания тонкостенных элементов типа стержней, пластин и оболочек при кратковременном ударном воздействии на них в различных средах.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Koning C., Taub J.** Stossartige Knickbeanspruchung schlanker Stäbe im elastischen Bereich bei beidderseits gelänkiger Lagerung // Luftfahrtforschung. 1933. Bd 10, N 2. S. 65–85.
2. **Meier J. H.** On the dynamics of elastic buckling // J. Aeronaut. Sci. 1945. V. 12, N 4. P. 433–440.
3. **Лаврентьев М. А., Ишлинский А. Ю.** Динамические формы потери устойчивости упругих систем // Докл. АН СССР. 1949. Т. 64, № 6. С. 779–782.
4. **Ишлинский А. Ю.** Деятельность Михаила Алексеевича Лаврентьева в Академии наук УССР // ПМТФ. 1960. № 3. С. 16–19.
5. **Lindberg H. E.** Impact buckling of a thin bar // J. Appl. Mech. 1965. V. 32, N 2. P. 315–322.
6. **Корнев В. М.** О формах потери устойчивости упругого стержня при ударе // ПМТФ. 1968. № 3. С. 63–66.
7. **Вольмир А. С.** Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967.
8. **Беляев А. К., Ильин Д. Н., Морозов Н. Ф.** Динамический подход к задаче Ишлинского — Лаврентьева // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2013. № 5. С. 28–33.
9. **Морозов Н. Ф., Товстик П. Е.** Поперечные колебания стержня, вызванные кратковременным продольным ударом // Докл. АН. 2013. Т. 452, № 1. С. 37–41.
10. **Морозов Н. Ф., Товстик П. Е.** О динамической потере устойчивости стержня при продольной нагрузке, меньшей эйлеровой // Докл. АН. 2013. Т. 453, № 3. С. 1–5.



11. **Ильгамов М. А.** Зависимость динамического выпучивания стержня от начальных условий // Докл. АН. 2014. Т. 457, № 6. С. 656–659.
12. **Манжосов В. К.** Моделирование продольного удара в стержневых системах неоднородной структуры / В. К. Манжосов, В. В. Слепухин. Ульяновск: Ульян. гос. техн. ун-т, 2011.
13. **Кедринский В. К.** Гидродинамика взрыва // ПМТФ. 1987. № 4. С. 23–48.
14. **Кедринский В. К.** Гидродинамика взрыва: эксперимент и модели. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
15. **Гельфанд Б. Е.** Баротермическое действие взрывов / Б. Е. Гельфанд, М. В. Сильников. СПб.: Астерион, 2006.

*Поступила в редакцию 8/II 2016 г.,  
в окончательном варианте — 13/VII 2016 г.*

---