

КРИВОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОГО ПУЗЫРЯ

А. Г. Петров

(Москва)

При помощи уравнений Лагранжа изучается криволинейное движение эллипсоида-дального пузыря. При малом отклонении малой оси эллипсоида от вертикали возникают колебания эллипсоида относительно положения равновесия и раскачивание его траектории. Приведены аналитические выражения для частоты колебаний и для отношения амплитуды раскачивания к амплитуде колебаний эллипсоида. Предполагается, что пузырь имеет форму осесимметричного эллипсоида [1].

Пусть декартова система координат, оси которой x_1, x_2, x_3 направлены параллельно главным осям эллипсоида, связана с неподвижной системой координат y_1, y_2, y_3 соотношением

$$\begin{aligned} x_i &= A_{ij}y_j; \quad A_{11} = \cos\varphi, \quad A_{12} = \sin\varphi, \quad A_{13} = 0 \\ A_{21} &= -\sin\varphi \cos\theta, \quad A_{22} = \cos\varphi \cos\theta, \quad A_{23} = \sin\theta \\ A_{31} &= \sin\varphi \cos\theta, \quad A_{32} = -\cos\varphi \sin\theta, \quad A_{33} = \cos\theta \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь и далее по повторяющимся индексам предполагается суммирование, A_{ij} — ортогональная матрица, θ — угол Эйлера между осями x_3 и y_3 , φ — угол между линией узлов и осью y_1 . В силу симметрии эллипсоида относительно оси x_3 можно считать, что ось x_1 лежит в горизонтальной плоскости y_1y_2 и совпадает с линией узлов.

Пусть y_i, x_i — компоненты скорости центра эллипсоида соответственно в неподвижной и подвижной системах координат. Зная углы Эйлера, x_i можно выразить через y_i и наоборот

$$x_i = A_{ij}y_j, \quad y_i = A_{ji}x_j \quad (2)$$

Так как момент инерции эллипсоида относительно оси x_3 равен нулю, то можно считать, что вектор угловой скорости направлен перпендикулярно оси x_3 . Квадрат угловой скорости равен $\theta^2 + \sin^2\theta\varphi^2$. Кинетическая энергия жидкости T , в которой движется вращающийся и деформирующийся эллипсоид, равна [1, 2]

$$\begin{aligned} T &= T_0 + T_1, \quad 2T_1 = \lambda_i x_i^2 + I\varphi^2 \sin^2\theta, \quad 2T_0 = I\theta^2 + I_\alpha \alpha^2 \\ \lambda_1 &= \lambda_2 = \frac{4\pi\rho}{3} l^3 \frac{1-yB}{1+yB}, \quad \lambda_3 = \frac{4\pi\rho}{3} l^3 \frac{yB}{1-yB} \\ I &= \frac{4\pi\rho l^5 (3yB-1)}{15(\alpha y)^{2/3} [2-(3yB-1)(1+2\alpha^2)]} \\ B &= 1 - \alpha \operatorname{arctg} \alpha, \quad y = 1 + \alpha^2, \quad \alpha / \sqrt{1 + \alpha^2} = l_3 / l_1 \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь l_3, l_1 — длины малой и большой оси эллипсоида, l — радиус сферы эквивалентного объема ($l^3 = l_1^2 l_3$), $I_\alpha \alpha^2$ — часть кинетической энергии, обусловленная деформацией пузыря. Аналитическое выражение для I_α было приведено ранее [1].

Если в качестве системы обобщенных координат выбрать $q_i = y_i$, $q_4 = \theta$, $q_5 = \varphi$, $q_6 = \alpha$, то движение эллипсоидального пузыря будет описываться следующей системой уравнений [1]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{4\pi}{3} \rho l^3 g \delta_{3i} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i}$$

$$L = T_0 + T_1 - \sigma S, \quad \delta_{3i} = \begin{cases} 1, & i = 3 \\ 0, & i \neq 3 \end{cases} \quad (4)$$

$$S = 2\pi l^2 \frac{y^{1/2}}{\alpha^{2/3}} \left(1 + \frac{\alpha}{V\bar{y}} \ln \frac{1 + V\bar{y}}{\alpha} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, 6)$$

$$2T_1 = \lambda_1 y_i \dot{y}_i + (\lambda_3 - \lambda_1) A_{3i} A_{3j} y_i \dot{y}_j + I\varphi^2 \sin^2 \theta$$

$$E = E_1 y_i \dot{y}_i + (E_3 - E_1) A_{3i} A_{3j} y_i \dot{y}_j + E_4 (\theta^2 + \varphi^2 \sin^2 \theta) + E_5 \alpha^2$$

($i, j = 1, 2, 3$)

Здесь E — диссипация энергии, которая при больших числах Рейнольдса R рассчитывается через потенциал поля скоростей [1].

Стационарное решение уравнений (4), соответствующее вертикальному подъему пузыря с постоянной скоростью ($y_1, y_2, \theta, \varphi$ равны нулю, $\alpha = \alpha_0$), было найдено ранее [1].

При малом отклонении обобщенных координат от своих равновесных значений будут происходить затухающие колебания.

Как показывают оценки, время затухания по порядку величины превышает период колебания в R раз. Поэтому процессы, происходящие на временах, много меньших времени затухания, можно описывать уравнениями Лагранжа без учета вязких членов

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (5)$$

Четыре первых координаты циклические и поэтому имеют место закон сохранения момента и три закона сохранения импульса

$$I \dot{\varphi} \sin^2 \theta = M, \quad \lambda_i y_i \dot{y}_i + (\lambda_3 - \lambda_1) A_{3i} A_{3j} y_j \dot{y}_j = P_i \quad (6)$$

Неподвижную систему координат всегда можно выбрать так, чтобы вектор импульса P был направлен по оси y_3 , и, таким образом, можно считать, что $P_i = P \delta_{3i}$. Разрешая систему уравнений (6) относительно $y_i \dot{y}_i$, $\dot{\varphi}$, можно получить

$$y_1 \dot{y}_1 = P (\lambda_3^{-1} - \lambda_1^{-1}) \sin \varphi \sin \theta \cos \theta, \quad y_2 \dot{y}_2 = P (\lambda_3^{-1} - \lambda_1^{-1}) \cos \varphi \sin \theta \cos \theta$$

$$y_3 \dot{y}_3 = P (\lambda_3^{-1} \cos^2 \theta + \lambda_1^{-1} \sin^2 \theta), \quad \dot{\varphi} = M / (I \sin^2 \theta) \quad (7)$$

При заданных P и M система (5) эквивалентна динамической системе с кинетической энергией T_0 и потенциальной энергией V , равной

$$V = \sigma S + 1/2 (P_i y_i \dot{y}_i + M \dot{\varphi}) =$$

$$= \sigma S + 1/2 P^2 (\lambda_3^{-1} \cos^2 \theta + \lambda_1^{-1} \sin^2 \theta) + M^2 (2I \sin^2 \theta)^{-1} \quad (8)$$

Таким образом, уравнения движения имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_0}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T_0}{\partial \theta} = - \frac{\partial V}{\partial \theta}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T_0}{\partial \dot{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial \alpha} (T_0 - V) \quad (9)$$

При малых отклонениях θ и α от своих равновесных значений уравнения (7) и (9) линеаризуются

$$\begin{aligned} y_1' &= P\theta(\lambda_3^{-1} - \lambda_1^{-1}) \sin \varphi, & y_2' &= P\theta(\lambda_3^{-1} - \lambda_1^{-1}) \cos \varphi \\ y_3' &= P\lambda_3^{-1}, & \varphi' I\theta^2 &= M, & I\theta'' &= \frac{M^2}{I\theta^3} - P^2(\lambda_1^{-1} - \lambda_3^{-1})\theta, & (10) \\ I_\alpha \alpha'' &= -\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sigma S + \frac{P}{2\lambda_3} + \frac{M^2}{2I\theta^2} \right) \end{aligned}$$

Скорость подъема пузыря $u = y_3'$ определяется из баланса сил Архимеда и вязкого сопротивления. Последнее уравнение системы (10) определяет отклонение степени деформации от равновесного значения. Соответствующие формулы для частоты деформации Ω_α получены ранее [1]. При $M = 0$ предпоследнее уравнение (10) показывает, что θ колеблется с частотой Ω_θ . Так как в этом случае $\varphi = 0$, то траектория движения пузыря является плоской кривой и можно считать, что $\varphi = 0$. Таким образом, уравнения (10) имеют следующее решение:

$$\begin{aligned} \alpha - \alpha_0 &= \Delta \alpha \cos(\Omega_\alpha t + \gamma), & \theta &= \theta_0 \sin(\Omega_\theta t) \\ y_2 &= i\theta_0 Y \cos(\Omega_\theta t), & y_1 &= 0 \\ \Omega_\theta &= u \left[\frac{(\lambda_3 - \lambda_1)\lambda_3}{\lambda_1 I} \right]^{1/2}, & Y^2 &= \frac{(\lambda_3 - \lambda_1) I}{\lambda_1 \lambda_3 l^2} \end{aligned} \quad (11)$$

Из формул (11) следует, что горизонтальное смещение центра эллипсоида y_2 опережает по фазе угол наклона малой оси эллипсоида на $1/2\pi$. Если $M \neq 0$, то существует решение уравнений (10), при котором $\theta' = 0$, $\alpha = 0$, а эллипсоид движется по винтовой линии с амплитудой $I\theta_0 Y$ и частотой вращения Ω_θ .

Движение твердого тела в безграничной идеальной несжимаемой жидкости исследовалось многими учеными, включая Чаплыгина, Ляпунова, Кирхгофа, Клебша и других. Формулы (5)–(10) согласуются с соответствующими результатами, приведенными в монографиях [2–4].

На фигуре приведены графики зависимостей функций $\chi = l_2/l_1$, u/u_0 , $\Omega_\alpha/\Omega_\theta$, Y от безразмерного радиуса сферы

эквивалентного объема $\xi = l/l_0$. При малой степени деформации $\chi - 1 \ll 1$ соответствующие функции имеют вид

$$\begin{aligned} \chi - 1 &= \frac{\xi^5}{288}, & \frac{u}{u_0} &= \frac{\xi^2}{9}, & \frac{\Omega_\alpha}{\Omega_\theta} &= \frac{2\sqrt{3}}{\xi^{3/2}}, & \frac{\Omega_\theta}{\Omega_0} &= \frac{2\sqrt{7}}{\xi^{3/2}} \\ Y &= \frac{\xi^{15/2}}{2880\sqrt{7}}, & l_0^5 &= \frac{\sigma v^2}{\rho g^2}, & u_0^5 &= \frac{\sigma^2 g}{\rho^2 v}, & \Omega_0 &= \frac{u_0}{l_0} \end{aligned}$$

Из фигуры видно, что скорость подъема пузыря имеет в точке $\xi = 3.84$ максимум, равный 0,6005, частоты Ω_α и Ω_θ по порядку величины совпадают с частотой капиллярных колебаний сферы радиуса l . Функция $Y(\xi)$ быстро возрастает с увеличением размера пузыря, поэтому для круп-

ного пузыря сравнительно малые отклонения оси эллипсоида от вертикали вызывают большие горизонтальные смещения центра эллипсоида.

Следует отметить, что полученные результаты справедливы при большом числе Рейнольдса и, с другой стороны, степень деформации эллипсоида χ не должна превышать значения, примерно равного пяти, в противном случае, не оправдано приближение потенциального обтекания [5]. В связи с этим безразмерный радиус пузыря должен удовлетворять следующим условиям:

$$\left(\frac{\sigma^3}{\rho^3 g \nu^4}\right)^{1/5} \xi \frac{u}{u_0} \gg 1, \quad \xi \lesssim 8$$

Поступила 9 III 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Воинов О. В., Головин А. М., Петров А. Г. Движение эллипсоидального пузыря в жидкости малой вязкости. ПМТФ, 1970, № 3.
2. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидродинамика, ч. 1. М., Физматгиз, 1963.
3. Ламб Г. Гидродинамика. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
4. Милн-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. М., «Мир», 1964.
5. Moore D. W. The velocity of rise of distorted gas bubbles in a liquid of small viscosity. J. Fluid Mech., 1965, vol. 23, No. 4.