

## ЛИТЕРАТУРА

1. Буренин А. А., Лапыгин В. В., Чернышов А. Д. К решению плоских автомодельных задач нелинейной динамической теории упругости // *Нелинейные волны деформаций*.— Таллинн, 1978.— Т. 2.
2. Буренин А. А., Лапыгин В. В. Автомодельная задача об ударном нагружении упругого полупространства // *ПММ*.— 1979.— Т. 43, вып. 4.
3. Буренин А. А., Лапыгин В. В. Об отражении плоской продольной ударной волны постоянной интенсивности от плоской жесткой границы нелинейной упругой среды // *ПМТФ*.— 1985.— № 5.
4. Сабодаш П. Ф., Тихомиров Н. А., Навал И. К. Автомодельные движения физически нелинейной упругой среды, вызванные локальным выделением энергии // *Нелинейные волны деформаций*.— Таллинн, 1978.— Т. 2.
5. Буренин А. А., Чернышов А. Д. Ударные волны в изотропном упругом пространстве // *ПММ*.— 1978.— Т. 42, вып. 4.
6. Гольденблат И. И. *Нелинейные проблемы теории упругости*.— М.: Наука, 1969.
7. Томас Т. *Пластическое течение и разрушение в твердых телах*.— М.: Мир, 1964.

*г. Воронеж, г. Куйбышев*

*Поступила 28/VII 1987 г.,*

*в окончательном варианте — 3/VIII 1988 г.*

УДК 539.3:536.2

*А. Л. Каламбаров*

### ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ КОНСТРУКТИВНО-НЕОДНОРОДНЫХ ОБОЛОЧЕК РЕГУЛЯРНОЙ СТРУКТУРЫ

В различных областях техники применяются конструктивно-неоднородные оболочки, обладающие регулярной структурой. К их числу относятся тонкие оболочки, подкрепленные регулярным набором часто поставленных продольных или поперечных ребер жесткости (ребристые оболочки), продольно-поперечной системой стрингеров (вафельные оболочки), трехслойные оболочки с наполнителем сотовой структуры (сотовые оболочки), а также различные сетчатые и каркасные оболочки и пластины. Эти и другие конструктивно-неоднородные оболочки эксплуатируются обычно в условиях переменных тепловых полей, резких перепадов температуры, поэтому решение задач теплопроводности и термоупругости для них представляет практический интерес.

Быстрая осцилляция коэффициентов уравнений и граничных условий для таких конструктивных элементов делает задачу в точной постановке практически неразрешимой даже с использованием быстродействующих ЭВМ. С этим связана необходимость разработки некоторых приближенных методов, например конструктивно-анизотропных подходов. Регулярная структура оболочек позволяет применить к их расчету асимптотический метод осреднения периодических структур, на основании которого в [1—3] рассмотрены задачи теории упругости, теплопроводности и термоупругости для композиционных и каркасных материалов регулярного строения. Метод осреднения [1—3] применим для регулярно неоднородных сред, обладающих периодической структурой во всех трех измерениях. Конструктивно-неоднородные оболочки, рассматриваемые в данной работе, не являются ни одномерными или двумерными композитами (типа слоистых или волокнистых материалов), ни трехмерными композитами (типа гранулированных материалов). Периодичность имеется только по двум тангенциальным координатам, введенным на срединной поверхности оболочки или обшивки, а по поперечной координате ее нет. При этом малые размеры периода и толщина оболочки соизмеримы, а на верхней и нижней поверхностях оболочки задаются силовые и тепловые граничные условия. Указанные особенности конструктивных элементов требуют специального (отличного от изложенного в [1—3]) асимптотического анализа соответствующих пространственных задач для тонкого слоя, который бы совмещал асимптотический переход от трехмерной задачи к двумерной оболочечной и переход (по методу осреднения) от неоднородного (композиционного) материала к эквивалентному однородному (квазиоднородному). Впервые в рамках теории упругости двухмасштабный асимптотический метод в такой постановке для пластины предложен в [4, 5]. В [6] построены и обоснованы полные асимптотические разложения в трехмерной задаче теории упругости для тонкой пластины с толщиной, равной характерному размеру неоднородностей. В [7, 8] проведен асимптотический анализ трехмерной задачи теории упругости для тонкой однородной пластины с быстро осциллирующей толщиной. Достаточно полный обзор работ, связанных с применением метода осреднения в задачах механики деформируемого твердого тела, представлен в [9]. В [10, 11] в рамках теории упругости без принятия каких-либо упрощающих гипотез произведен асимптотический переход от пространственной задачи для искривленного регулярно неоднородного слоя с быстро осциллирующей толщиной к модели осредненной оболочки. В [12] аналогичный анализ проведен для задачи теплопроводности в случае условий теплооб-

мена второго или третьего рода на поверхностях оболочки. В [13] разработанный метод применен в квазистатической задаче термоупругости.

В данной работе обобщаются результаты, полученные в [10—13], и приведены некоторые приложения общей модели. В первой части работы изложены определяющие соотношения и уравнения осредненной оболочки. Ее эффективные термоупругие и теплофизические характеристики определяются из решения вспомогательных локальных задач на ячейке периодичности. На основании решения локальных задач и краевой задачи для осредненной оболочки с большой точностью восстанавливается трехмерная локальная структура исследуемых полей. Даны приложения общей модели к различным конструктивно-неоднородным оболочкам. На основании решения локальных задач в явном виде получены формулы для всех эффективных термоупругих и теплофизических характеристик ребристых, вафельных, сотовых и сетчатых оболочек регулярной структуры.

1. Рассмотрим неоднородную оболочку регулярной структуры, обладающую ячейкой периодичности  $\Omega_\varepsilon$ , которая в ортогональной системе координат  $\alpha_1, \alpha_2, \gamma$  задается неравенствами

$$-\varepsilon h_1/2 < \alpha_1 < \varepsilon h_1/2, \quad -\varepsilon h_2/2 < \alpha_2 < \varepsilon h_2/2, \quad \varepsilon z^- < \gamma < \varepsilon z^+,$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр, определяющий толщину оболочки (обшивки);  $\varepsilon h_1, \varepsilon h_2$  — расстояния между подкрепляющими элементами;  $z^+(y_1, y_2)$  и  $z^-(y_1, y_2)$  — периодические по переменным  $y_1 = \alpha_1/(\varepsilon h_1), y_2 = \alpha_2/(\varepsilon h_2)$  функции, задающие форму подкреплений на верхней  $S^+$  и нижней  $S^-$  поверхностях оболочки. Обозначим  $z = \gamma/\varepsilon, y = (y_1, y_2), \alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ . Будем считать, что коэффициенты упругости  $c_{ijmn}(y, z)$ , теплопроводности  $\lambda_{ij}(y, z)$ , теплового расширения  $\alpha_{ij}^\theta(y, z)$  и другие характеристики материала являются кусочно-гладкими периодическими по  $y_1, y_2$  функциями с ячейкой периодичности  $\Omega: \{y_1, y_2 \in (-1/2, 1/2), z \in (z^-, z^+)\}$ , терпящими разрывы первого рода на конечном числе непересекающихся поверхностей контакта.

Следуя методу [10—13], представим компоненты вектора перемещений и приращение температуры в форме асимптотических разложений

$$(1.1) \quad u_i = u_i^{(0)}(\alpha, t) + \varepsilon u_i^{(1)}(\alpha, t, y, z) + \varepsilon^2 u_i^{(2)}(\alpha, t, y, z) + \dots, \\ \theta = \theta_1 + z\theta_2, \quad \theta_\nu = \theta_\nu^{(0)}(\alpha, t) + \varepsilon \theta_\nu^{(1)}(\alpha, t, y, z) + \dots,$$

где  $u_i^{(l)}(\alpha, t, y, z), \theta_\nu^{(l)}(\alpha, t, y, z)$  при  $l = 1, 2, \dots, \nu = 1, 2$  — периодические по  $y_1, y_2$  функции с ячейкой периодичности  $\Omega$ .

В [10—13] показано, что для главных членов (1.1) и соответствующих разложений по  $\varepsilon$  для компонент тензора напряжений и вектора потока тепла справедливы соотношения, определяющие их локальную структуру:

$$(1.2) \quad u_1 = v_1(\alpha, t) - \varepsilon \frac{z}{A_1} \frac{\partial w(\alpha, t)}{\partial \alpha_1} + \varepsilon U_1^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} + \varepsilon^2 U_1^{*\mu\nu} \tau_{\mu\nu} + O(\varepsilon^3) \quad (1 \leftrightarrow 2),$$

$$u_3 = w(\alpha, t) + \varepsilon U_3^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} + \varepsilon^2 U_3^{*\mu\nu} \tau_{\mu\nu} + O(\varepsilon^3),$$

$$\theta = \theta_1^{(0)}(\alpha, t) + z\theta_2^{(0)}(\alpha, t) + \varepsilon \left( \bar{W}_u \frac{1}{A_\mu} \frac{\partial \theta_1^{(0)}}{\partial \alpha_\mu} + \bar{W}_u^* \frac{1}{A_\mu} \frac{\partial \theta_2^{(0)}}{\partial \alpha_\mu} \right) + O(\varepsilon^2);$$

$$(1.3) \quad \sigma_{ij} = b_{ij}^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} + \varepsilon b_{ij}^{*\mu\nu} \tau_{\mu\nu} - s_{ij} \theta_1^{(0)} - s_{ij}^* \theta_2^{(0)} + O(\varepsilon^2),$$

$$q_i = -\varepsilon^{-1} \lambda_{i3} \theta_2^{(0)} + q_i^{(0)} + O(\varepsilon), \quad q_i^{(0)} = -l_{iv} \frac{1}{A_v} \frac{\partial \theta_1^{(0)}}{\partial \alpha_v} - l_{iv}^* \frac{1}{A_v} \frac{\partial \theta_2^{(0)}}{\partial \alpha_v}.$$

Здесь и далее по одинаковым индексам производится суммирование, причем латинские индексы принимают значения 1, 2, 3, а греческие 1, 2;  $A_1(\alpha), A_2(\alpha)$  — коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности ( $\gamma = 0$ );  $\omega_{11} = \varepsilon_1, \omega_{22} = \varepsilon_2, \omega_{12} = \omega_{21} = \omega/2$  — деформации растяжения и сдвига;  $\tau_{11} = \varkappa_1, \tau_{22} = \varkappa_2, \tau_{12} = \tau_{21} = \tau$  — деформации изгиба и кручения срединной поверхности. Эти функции выражаются через  $v_1, v_2, w$  при помощи известных соотношений теории тонких оболочек [11].

Для коэффициентов соотношений (1.3) справедливы формулы

$$\begin{aligned}
 (1.4) \quad U_{ij}^{\mu\nu} &= \frac{1}{h_\beta} c_{ijm\beta} \frac{\partial U_m^{\mu\nu}}{\partial \xi_\beta} + c_{ijmz} \frac{\partial U_m^{\mu\nu}}{\partial z} + c_{ij\mu\nu}, \\
 b_{ij}^{*\mu\nu} &= \frac{1}{h_\beta} c_{ijm\beta} \frac{\partial U_m^{*\mu\nu}}{\partial \xi_\beta} + c_{ijmz} \frac{\partial U_m^{*\mu\nu}}{\partial z} + z c_{ij\mu\nu}, \\
 s_{ij} &= -\frac{1}{h_\beta} c_{ijm\beta} \frac{\partial V_m}{\partial \xi_\beta} - c_{ijmz} \frac{\partial V_m}{\partial z} + c_{ijmn} \alpha_{mn}^\theta, \\
 s_{ij}^* &= -\frac{1}{h_\beta} c_{ijm\beta} \frac{\partial V_m^*}{\partial \xi_\beta} - c_{ijmz} \frac{\partial V_m^*}{\partial z} + z c_{ijmn} \alpha_{mn}^\theta; \\
 (1.5) \quad l_{i\mu} &= \frac{1}{h_\beta} \lambda_{i\beta} \frac{\partial W_\mu}{\partial \xi_\beta} + \lambda_{iz} \frac{\partial W_\mu}{\partial z} + \lambda_{i\mu}, \\
 l_{i\mu}^* &= \frac{1}{h_\beta} \lambda_{i\beta} \frac{\partial W_\mu^*}{\partial \xi_\beta} + \lambda_{iz} \frac{\partial W_\mu^*}{\partial z} + z \lambda_{i\mu}.
 \end{aligned}$$

Функции  $U_m^{\mu\nu}$ ,  $U_m^{*\mu\nu}$ ,  $V_m$ ,  $V_m^*$ ,  $W_\mu$  и  $W_\mu^*$ , входящие в соотношения (1.2)–(1.5), зависят от  $\xi_1 = A_1 y_1$ ,  $\xi_2 = A_2 y_2$  и  $z$ . Они представляют собой периодические по  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  (с периодами  $A_1$ ,  $A_2$  соответственно) решения следующих локальных задач на ячейке периодичности:

$$\begin{aligned}
 (1.6) \quad \frac{1}{h_\beta} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta} b_{i\beta}^{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial z} b_{iz}^{\mu\nu} &= 0, \\
 \left( \frac{1}{h_\beta} N_\beta^\pm b_{i\beta}^{\mu\nu} + N_z^\pm b_{iz}^{\mu\nu} \right) \Big|_{z=z^\pm} &= 0 \quad (b_{ij}^{\mu\nu} \leftrightarrow b_{ij}^{*\mu\nu} \leftrightarrow s_{ij} \leftrightarrow s_{ij}^*);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1.7) \quad \frac{1}{h_\beta} \frac{\partial l_{\beta\mu}}{\partial \xi_\beta} + \frac{\partial l_{z\mu}}{\partial z} &= 0, \\
 \left( \frac{1}{h_\beta} N_\beta^\pm l_{\beta\mu} + N_z^\pm l_{z\mu} \right) \Big|_{z=z^\pm} &= 0 \quad (l_{i\mu} \leftrightarrow l_{i\mu}^*)
 \end{aligned}$$

( $N_i^\pm$  — компоненты нормалей к поверхностям  $z = z^\pm(y)$ ).

На поверхностях разрывов характеристик материала выполняются условия непрерывности, отвечающие идеальному контакту ( $n_i$  — компоненты нормали к поверхности разрыва):

$$\begin{aligned}
 (1.8) \quad [U_m^{\mu\nu}] &= 0, \quad \left[ \frac{n_\beta}{h_\beta} b_{i\beta}^{\mu\nu} + n_z b_{iz}^{\mu\nu} \right] = 0 \\
 (U_m^{\mu\nu} \leftrightarrow U_m^{*\mu\nu} \leftrightarrow V_m \leftrightarrow V_m^*, b_{ij}^{\mu\nu} \leftrightarrow b_{ij}^{*\mu\nu} \leftrightarrow s_{ij} \leftrightarrow s_{ij}^*);
 \end{aligned}$$

$$(1.9) \quad [W_\mu] = 0, \quad \left[ \frac{n_\beta}{h_\beta} l_{\beta\mu} + n_z l_{z\mu} \right] = 0 \quad (W_\mu \leftrightarrow W_\mu^*, l_{i\mu} \leftrightarrow l_{i\mu}^*).$$

Локальные задачи (1.4), (1.6), (1.8) и (1.5), (1.7), (1.9) имеют единственные с точностью до постоянных слагаемых решения. Эта неоднозначность устраняется наложением условий

$$\begin{aligned}
 (1.10) \quad \langle U_m^{\mu\nu} \rangle_\xi &= 0 \quad \text{или} \quad z = 0 \\
 (U_m^{\mu\nu} \leftrightarrow U_m^{*\mu\nu} \leftrightarrow V_m \leftrightarrow V_m^* \leftrightarrow W_\mu \leftrightarrow W_\mu^*).
 \end{aligned}$$

Индекс  $\xi$  означает интегрирование по координатам  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ .

Осредняя соотношения (1.3) при помощи интегрирования по объему  $\Omega$ , получим ( $r = 0, 1$ )

$$\begin{aligned}
 (1.11) \quad \langle z^r \sigma_{ij} \rangle &= \langle z^r b_{ij}^{\mu\nu} \rangle \omega_{\mu\nu} + \varepsilon \langle z^r b_{ij}^{*\mu\nu} \rangle \tau_{\mu\nu} - \\
 &\quad - \langle z^r s_{ij} \rangle \theta_1^{(0)} - \langle z^r s_{ij}^* \rangle \theta_2^{(0)} + O(\varepsilon^2);
 \end{aligned}$$

$$(1.12) \quad \langle z^r q_i^{(0)} \rangle = - \langle z^r l_{iv} \rangle \frac{1}{A_v} \frac{\partial \theta_1^{(0)}}{\partial \alpha_v} - \langle z^r l_{iv}^* \rangle \frac{1}{A_v} \frac{\partial \theta_2^{(0)}}{\partial \alpha_v}.$$

Соотношения (1.11), (1.12) представляют собой уравнения состояния осредненной оболочки, а коэффициенты этих соотношений — ее эффективные термоупругие и теплофизические характеристики. При этом на основании (1.4)—(1.10) доказано, что

$$(1.13) \quad \langle b_{3i}^{\mu\nu} \rangle = 0, \quad \langle z b_{3i}^{\mu\nu} \rangle = 0 \quad (b_{3i}^{\mu\nu} \leftrightarrow b_{3i}^{*\mu\nu} \leftrightarrow s_{3i} \leftrightarrow s_{3i}^* \leftrightarrow l_{3\mu} \leftrightarrow l_{3\mu}^*),$$

$$\langle b_{\beta\delta}^{\mu\nu} \rangle = \langle b_{\mu\nu}^{\beta\delta} \rangle, \quad \langle z b_{\beta\delta}^{\mu\nu} \rangle = \langle z b_{\mu\nu}^{*\beta\delta} \rangle,$$

$$\langle z b_{\beta\delta}^{*\mu\nu} \rangle = \langle z b_{\mu\nu}^{*\beta\delta} \rangle, \quad \langle l_{\mu\nu} \rangle = \langle l_{\nu\mu} \rangle,$$

$$\langle z l_{\mu\nu} \rangle = \langle z l_{\nu\mu} \rangle, \quad \langle l_{\nu\mu}^* \rangle = \langle l_{\mu\nu}^* \rangle.$$

Соотношения (1.13) обеспечивают симметрию матриц, составленных из коэффициентов уравнений состояния осредненной оболочки.

В [10—13] получены системы разрешающих уравнений относительно функций  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $w$  и  $\theta_1^{(0)}$ ,  $\theta_2^{(0)}$ . Отметим, что, как показано в [11—13], в случае однородного материала и постоянной толщины оболочки ( $z^\pm = \pm 1/2$ ) осредненная модель сводится к соотношениям, принятым в теории термоупругости анизотропных оболочек, причем для погонных усилий, моментов и интегральных характеристик температуры справедливы формулы

$$N_1 = \varepsilon \langle \sigma_{11} \rangle, \quad M_1 = \varepsilon^2 \langle z \sigma_{11} \rangle \quad (1 \leftrightarrow 2),$$

$$N_{12} = \varepsilon \langle \sigma_{12} \rangle, \quad M_{12} = \varepsilon^2 \langle z \sigma_{12} \rangle, \quad T = \theta_1^{(0)}, \quad T^* = \theta_2^{(0)}/2.$$

Остановимся на некоторых приложениях общей модели к расчету конструктивно-неоднородных оболочек регулярной структуры, изготовленных из однородного изотропного материала.

2. Рассмотрим вафельную оболочку с ячейкой периодичности, состоящей из трех взаимно перпендикулярных элементов (рис. 1). Приближенное аналитическое решение локальных задач (1.4)—(1.10) для ячейки указанного вида может быть найдено в предположении о малости толщины каждого из элементов ячейки по сравнению с другими размерами, т. е. при условиях  $t_1 \ll h_1$ ,  $t_2 \ll h_2$ ,  $h_1, h_2 \sim H$ .

Используемый при решении локальных задач (1.4)—(1.10) метод аппроксимации задач теории термоупругости задачами теории пластин и оболочек был предложен и обоснован в [14, 15] при определении эффективных характеристик мелкоячеечных каркасных конструкций периодического строения. В сочетании с изложенной выше общей моделью осредненной оболочки он позволяет получить в явном виде и с достаточной степенью точности эффективные характеристики для большого числа применяемых на практике подкрепленных оболочек.

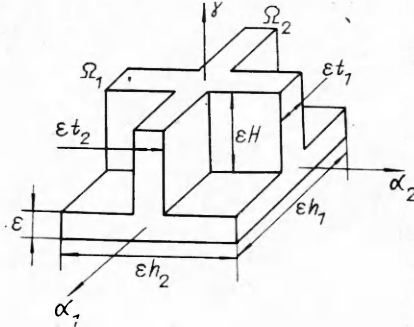
В этом случае для всех отличных от нуля эффективных характеристик, входящих в уравнения состояния (1.11), (1.12), с учетом соотношений (1.13) получим

$$(2.1) \quad \langle b_{11}^{11} \rangle = \frac{E}{1-\nu^2} + EF_2, \quad \langle b_{22}^{22} \rangle = \frac{E}{1-\nu^2} + EF_1,$$

$$\langle b_{22}^{11} \rangle = \frac{E\nu}{1-\nu^2}, \quad \langle b_{12}^{12} \rangle = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \langle b_{11}^{*11} \rangle = ES_2, \quad \langle b_{22}^{*22} \rangle = ES_1,$$

$$\langle z b_{11}^{*11} \rangle = \frac{E}{12(1-\nu^2)} + EJ_s, \quad \langle z b_{22}^{*22} \rangle = \frac{E}{12(1-\nu^2)} + EJ_1, \quad \langle z b_{22}^{*11} \rangle = \frac{E\nu}{12(1-\nu^2)},$$

$$\langle z b_{12}^{*12} \rangle = \frac{E}{24(1+\nu)} \left[ 1 + H^3 \left( \frac{t_1}{h_1} + \frac{t_2}{h_2} \right) - K_1 - K_2 \right],$$



Р и с. 1

$$\begin{aligned}
\langle s_{11} \rangle &= \frac{E\alpha^0}{1-\nu} + E\alpha^0 F_2, & \langle s_{22} \rangle &= \frac{E\alpha^0}{1-\nu} + E\alpha^0 F_1, \\
\langle s_{11}^* \rangle &= E\alpha^0 S_2, & \langle s_{22}^* \rangle &= E\alpha^0 S_1, \\
\langle z s_{11}^* \rangle &= \frac{E\alpha^0}{12(1-\nu)} + E\alpha^0 J_2, & \langle z s_{22}^* \rangle &= \frac{E\alpha^0}{12(1-\nu)} + E\alpha^0 J_1, \\
\langle l_{11} \rangle &= \lambda + \lambda F_2, & \langle l_{22} \rangle &= \lambda + \lambda F_1, & \langle l_{11}^* \rangle &= \lambda S_2, & \langle l_{22}^* \rangle &= \lambda S_1, \\
\langle z l_{11}^* \rangle &= \frac{\lambda}{12} \left( 1 + \frac{t_1 H^3}{h_1} + 12J_2 - K_1 \right), \\
\langle z l_{22}^* \rangle &= \frac{\lambda}{12} \left( 1 + \frac{t_2 H^3}{h_2} + 12J_1 - K_2 \right).
\end{aligned}$$

Здесь  $K_1 = \frac{96H^4}{\pi^2 A_1 h_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^n]}{n^5} \operatorname{th} \frac{\pi n A_1 t_1}{2H}$  ( $1 \leftrightarrow 2$ );  $\bar{E}$ ,  $\nu$ ,  $\lambda$ ,  $\alpha^0$  — характеристики материала;  $\bar{F}_1$ ,  $\bar{F}_2$  — площади сечений;  $S_1$ ,  $S_2$  — статические моменты;  $J_1$ ,  $J_2$  — моменты инерции сечений подкрепляющих элементов  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  относительно срединной поверхности обшивки ( $z = 0$ ), вычисленные в системе координат  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $z$ . Для них справедливы формулы (см. рис. 1)

$$(2.2) \quad F_1 = \frac{t_1 H}{h_1}, \quad S_1 = \frac{t_1 (H^2 + H)}{2h_1}, \quad J_1 = \frac{t_1 (4H^3 + 6H^2 + 3H)}{12h_1} \quad (1 \leftrightarrow 2).$$

Формулы (2.1), (2.2) для эффективных модулей жесткости (упругая часть характеристик) хорошо согласуются с известными соотношениями конструктивно-анизотропной теории подкрепленных пластинок. Формула для крутильной жесткости  $\langle z b_{12}^{*12} \rangle$  выходит за рамки этой теории, по которой для нее принимается

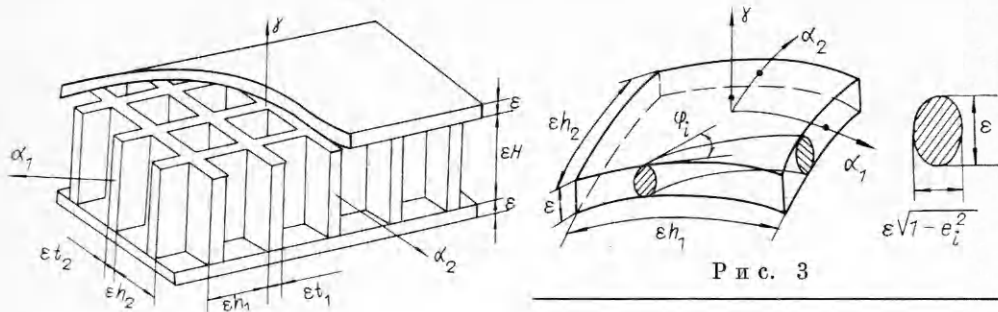
$$(2.3) \quad \langle z b_{12}^{*12} \rangle = \frac{E}{24(1+\nu)} \left( 1 + H \frac{t_1^3}{h_1} + H \frac{t_2^3}{h_2} \right).$$

Поправки формул (2.1) по сравнению с (2.3) существенны в случае высоких ребер жесткости. Например, при  $A_1 = A_2 = 1$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $H = 20$ ,  $h_1 = h_2 = 60$ ,  $t_1 = t_2 = 2$  получим по (2.1)  $\langle z b_{12}^{*12} \rangle / E = 0,1922$  (поправка  $-5,3\%$ ), при  $H = 10$ ,  $h_1 = h_2 = 10$ ,  $t_1 = t_2 = 1$  имеем  $\langle z b_{12}^{*12} \rangle / E = 0,0921$  (поправка  $-4,3\%$ ).

Для проверки погрешности формул (2.1) было проведено более точное (численное) решение локальных задач (1.4)–(1.10), которое показало, что погрешность формул (2.1), (2.2) (за исключением формулы для  $\langle z b_{22}^{*11} \rangle$ ) составляет менее 1%, поэтому они могут быть использованы на практике с приемлемой для большинства инженерных расчетов точностью. Наибольшие поправки получены при этом для эффективных модулей жесткости  $\langle b_{22}^{*11} \rangle$  и  $\langle z b_{22}^{*11} \rangle$ , для которых при  $\nu = 0,3$  из (2.1) вытекает  $\langle b_{22}^{*11} \rangle = 0$ ,  $\langle z b_{22}^{*11} \rangle / E = 0,0275$ . Для сравнения результаты численного расчета этих модулей в семи вариантах (при  $\nu = 0,3$ ) представлены в таблице.

Формулы (2.1), (2.2) можно использовать для определения эффективных характеристик ребристых оболочек. Например, в случае ребер жесткости, направленных вдоль координатной линии  $O\alpha_1$ , на рис. 1 следует отбросить подкрепляющий элемент  $\Omega_1$ , а в формулах (2.1) положить  $t_1 = 0$  и соответственно  $F_1 = S_1 = J_1 = K_1 = 0$ .

3. Рассмотрим трехслойную оболочку, состоящую из верхнего и нижнего несущих слоев и сотового заполнителя четырехгранной структуры (рис. 2). На основании приближенного аналитического решения локальных задач (1.4)–(1.10), полученного аналогично предыдущему случаю,



Р и с. 2

для всех отличных от нуля эффективных характеристик сотовой оболочки (с учетом соотношений (1.13)) имеем

$$\begin{aligned}
 (3.1) \quad \langle b_{11}^{11} \rangle &= \frac{2E_0}{1-\nu_0^2} + EF_2, & \langle b_{22}^{22} \rangle &= \frac{2E_0}{1-\nu_0^2} + EF_1, \\
 \langle b_{22}^{11} \rangle &= \frac{2E_0\nu_0}{1-\nu_0^2}, & \langle b_{12}^{12} \rangle &= \frac{E_0}{1+\nu_0}, & \langle zb_{11}^{*11} \rangle &= \frac{2E_0J_3}{1-\nu_0^2} + E\frac{t_2H^3}{12h_2}, \\
 \langle zb_{22}^{*22} \rangle &= \frac{2E_0J_3}{1-\nu_0^2} + E\frac{t_1H^3}{12h_1}, & \langle zb_{22}^{*11} \rangle &= \frac{2E_0\nu_0}{1-\nu_0^2}J_3, \\
 \langle zb_{12}^{*12} \rangle &= \frac{E_0J_3}{1+\nu_0} + \frac{E}{24(1+\nu)} \left( \frac{H^3t_1}{h_1} + \frac{H^3t_2}{h_2} - K_1 - K_2 \right), \\
 \langle s_{11} \rangle &= \frac{2E_0\alpha_0^\theta}{1-\nu_0} + E\alpha^\theta F_2, & \langle s_{22} \rangle &= \frac{2E_0\alpha_0^\theta}{1-\nu_0} + E\alpha^\theta F_1, \\
 \langle zs_{11}^* \rangle &= \frac{2E_0\alpha_0^\theta}{1-\nu_0}J_3 + E\alpha^\theta \frac{t_2H^3}{12h_2}, \\
 \langle zs_{22}^* \rangle &= \frac{2E_0\alpha_0^\theta}{1-\nu_0}J_3 + E\alpha^\theta \frac{t_1H^3}{12h_1}, \\
 \langle l_{11} \rangle &= 2\lambda_0 + \lambda F_2, & \langle l_{22} \rangle &= 2\lambda_0 + \lambda F_1, \\
 \langle zl_{11}^* \rangle &= 2\lambda_0J_3 + \frac{\lambda}{12} \left( \frac{t_1H^3}{h_1} + \frac{t_2H^3}{h_2} - K_1 \right), \\
 \langle zl_{22}^* \rangle &= 2\lambda_0J_3 + \frac{\lambda}{12} \left( \frac{t_1H^3}{h_1} + \frac{t_2H^3}{h_2} - K_2 \right),
 \end{aligned}$$

где  $E_0, \nu_0, \lambda_0, \alpha_0^\theta$  — характеристики материала верхнего и нижнего несущих слоев;  $E, \nu, \lambda, \alpha^\theta$  — характеристики материала фольги сотового заполнителя;  $F_1, F_2, K_1, K_2$  определены выше;  $J_3 = (3H^2 + 6H + 4)/12$ . Первые слагаемые в формулах (3.1) отвечают вкладу несущих слоев, а вторые — вкладу сотового заполнителя.

4. Рассмотрим сетчатую оболочку регулярной структуры, образованную  $N$  семействами параллельных между собой секций эллиптического, в частности, круглого поперечного сечения. Обозначим через  $\varepsilon$  толщину оболочки,  $\varphi_i$  — угол, образованный секциями  $i$ -го семейства с координатной линией  $O\alpha_1$ ,  $\nu_i$  — объемное содержание секций  $i$ -го семейства в ячейке периодичности,  $\varepsilon_i$  — эксцентриситет поперечного сечения секций  $i$ -го семейства,  $E_i, \nu_i, \lambda_i, \alpha_i^\theta$  — характеристики материала секций  $i$ -го семейства. На рис. 3 изображены ячейка периодичности и одна из секций  $i$ -го семейства.

На основании аналитического решения локальных задач (1.4)—(1.10) для секций, образующих сетку, и принципа расщепления осредненного оператора [1] получены следующие формулы для всех отличных от нуля

Номер варианта	Параметры ячейки периодичности	$\langle b_{22}^{*11} \rangle / E$	$\langle zb_{22}^{*11} \rangle / E$
1	$H = 10, h_1 = h_2 = 10$ $t_1 = t_2 = 1$	-0,0648	-0,3705
2	$H = 10, h_1 = h_2 = 10$ $t_1 = 1, t_2 = 0,5$	-0,0432	-0,2378
3	$H = 10, h_1 = h_2 = 20$ $t_1 = t_2 = 0,5$	-0,0078	-0,0207
4	$H = 8, h_1 = h_2 = 30$ $t_1 = t_2 = 0,8$	-0,0028	0,0132
5	$H = 8, h_1 = h_2 = 30$ $t_1 = 0,8, t_2 = 0,4$	-0,0019	0,0180
6	$H = 20, h_1 = h_2 = 20$ $t_1 = t_2 = 0,5$	-0,0648	-0,7406
7	$H = 20, h_1 = h_2 = 60$ $t_1 = t_2 = 2$	-0,0277	-0,3030

эффективных характеристик сетчатой оболочки:

$$(4.1) \quad \langle b_{\beta\delta}^{\mu\kappa} \rangle = \sum_{i=1}^N E_i b_i \gamma_i, \quad \langle zb_{\beta\delta}^{\mu\kappa} \rangle = \sum_{i=1}^N E_i b_i \left( 1 + \frac{c_i}{1 + \nu_i} \right) \frac{\gamma_i}{16},$$

$$\langle s_{\beta\delta} \rangle = \sum_{i=1}^N E_i \alpha_i^0 s_i \gamma_i, \quad \langle zs_{\beta\delta}^* \rangle = \langle s_{\beta\delta} \rangle / 16,$$

$$\langle l_{\beta\delta} \rangle = \sum_{i=1}^N \lambda_i s_i \gamma_i, \quad \langle zl_{\beta\delta}^* \rangle = \sum_{i=1}^N \lambda_i l_i \gamma_i / 16.$$

Параметры  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $s_i$  и  $l_i$ , входящие в (4.1), зависят от набора индексов  $\beta\delta\mu\kappa$  и определяются по формулам:

при  $\beta\delta\mu\kappa = 1111$

$$b_i = A_1^4 B_i^{-4} \cos^4 \varphi_i, \quad c_i = 2A_2^4 \operatorname{tg}^2 \varphi_i (1 - e_i^2) \Delta_i,$$

$$s_i = \sqrt{b_i}, \quad l_i = [A_1^2 \cos^2 \varphi_i + A_1^2 A_2^2 (1 - e_i^2)] \Delta_i \quad (\beta\delta = 11);$$

при  $\beta\delta\mu\kappa = 2222$

$$b_i = A_2^4 B_i^{-4} \sin^4 \varphi_i, \quad c_i = 2A_1^4 \operatorname{ctg}^2 \varphi_i (1 - e_i^2) \Delta_i,$$

$$s_i = \sqrt{b_i}, \quad l_i = [A_2^2 \sin^2 \varphi_i + A_1^2 A_2^2 (1 - e_i^2)] \Delta_i \quad (\beta\delta = 22);$$

при  $\beta\delta\mu\kappa = 1212$

$$b_i = A_1^2 A_2^2 B_i^{-4} \cos^2 \varphi_i \sin^2 \varphi_i,$$

$$c_i = \frac{1}{2} (A_1^4 \operatorname{ctg}^2 \varphi_i + A_2^4 \operatorname{tg}^2 \varphi_i - 2A_1^2 A_2^2) (1 - e_i^2) \Delta_i,$$

$$s_i = \sqrt{b_i}, \quad l_i = A_1 A_2 \Delta_i \cos \varphi_i \sin \varphi_i \quad (\beta\delta = 12, 21);$$

при  $\beta\delta\mu\kappa = 1122, 2211$

$$b_i = A_1^2 A_2^2 B_i^{-4} \cos^2 \varphi_i \sin^2 \varphi_i, \quad c_i = -2A_1^2 A_2^2 (1 - e_i^2) \Delta_i;$$

при  $\beta\delta\mu\kappa = 1112, 1211$

$$b_i = A_1^3 A_2 B_i^{-4} \cos^3 \varphi_i \sin \varphi_i, \quad c_i = A_2^3 (A_2^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_i - A_1^2) (1 - e_i^2) \Delta_i;$$

при  $\beta\delta\mu\kappa = 1222, 2212$

$$b_i = A_1 A_2^3 B_i^{-4} \cos \varphi_i \sin^3 \varphi_i, \quad c_i = A_1^2 (A_1^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi_i - A_2^2) (1 - e_i^2) \Delta_i.$$

Здесь  $B_i^2 = A_1^2 \cos^2 \varphi_i + A_2^2 \sin^2 \varphi_i$ ;  $\Delta_i = [B_i^2 + A_1^2 A_2^2 (1 - e_i^2)]^{-1}$ .

Формулы для эффективных характеристик  $\langle b_{\beta\delta}^{\mu\kappa} \rangle$ ,  $\langle s_{\beta\delta} \rangle$  и  $\langle l_{\beta\delta} \rangle$  справедливы для произвольного поперечного сечения секций. Кососимметрическая часть эффективных характеристик равна нулю в силу симметрии рассматриваемого эллиптического сечения секций относительно срединной поверхности оболочки.

Отметим, что в частных случаях прямоугольной, ромбической и треугольной сетчатых оболочек формулы, следующие из (4.1), в рамках теории упругости получены в [16] и в рамках задачи теплопроводности — в [17].

Автор благодарит В. З. Партона и Б. А. Кудрявцева за помощь в работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. — М.: Наука, 1984.
2. Sanchez-Palencia E. Non-homogeneous media and vibration theory // Lect. Notes Phys.— 1980.— N 127. Рус. пер. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний.— М.: Мир, 1984.
3. Победра Б. Е. Механика композиционных материалов.— М.: Изд-во МГУ, 1984.
4. Caillerie D. Plaques élastiques minces à structure périodique de période et d'épaisseur comparables // C. r. Acad. sci. Ser. II.— 1982.— V. 294, N 3.
5. Caillerie D. Thin elastic and periodic plates // Math. Meth. in Appl. Sci.— 1984.— V. 6, N 2.
6. Панасенко Г. П., Резцов М. В. Осреднение трехмерной задачи теории упругости в неоднородной пластине // ДАН СССР.— 1987.— Т. 294, № 5.
7. Kohn R. V., Vogelius M. A new model for thin plates with rapidly varying thickness // Intern. J. Solids and Struct.— 1984.— V. 20, N 4.
8. Kohn R. V., Vogelius M. A new model for thin plates with rapidly varying thickness. II. A convergence proof // Quart. Appl. Math.— 1985.— V. 43, N 1.
9. Каламкар А. Л., Кудрявцев Б. А., Партон В. З. Асимптотический метод осреднения в механике композитов регулярной структуры // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела.— М.: ВИНТИ, 1987.— Т. 19.
10. Партон В. З., Каламкар А. Л., Кудрявцев Б. А. Напряженно-деформированное состояние искривленного анизотропного неоднородного слоя периодической структуры с волнообразными поверхностями // ДАН СССР.— 1986.— Т. 291, № 6.
11. Каламкар А. Л., Кудрявцев Б. А., Партон В. З. Задача об искривленном слое из композиционного материала с волнистыми поверхностями периодической структуры // ПММ.— 1987.— Т. 51, вып. 1.
12. Каламкар А. Л. Теплопроводность искривленного неоднородного анизотропного слоя периодической структуры с волнистыми поверхностями // ИФЖ.— 1987.— Т. 52, № 5.
13. Каламкар А. Л., Кудрявцев Б. А., Партон В. З. Термоупругость регулярно неоднородного искривленного слоя с волнистыми поверхностями // ПММ.— 1987.— Т. 51, вып. 6.
14. Колпаков А. Г. К определению усредненных характеристик упругих каркасов.— ПММ.— 1985.— Т. 49, вып. 6.
15. Колпаков А. Г. Усредненные характеристики термоупругих каркасов // Изв. АН СССР. МТТ.— 1987.— № 6.
16. Каламкар А. Л. К определению эффективных характеристик сетчатых оболочек и пластинок периодической структуры // Изв. АН СССР. МТТ.— 1987.— № 2.
17. Каламкар А. Л. Теплопроводность сетчатых оболочек и пластин регулярной структуры // ИФЖ.— 1988.— Т. 54, № 3.

г. Москва

Поступила 30/V 1988 г.,  
в окончательном варианте — 12/VII 1988 г.