УДК 532.546

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЗАПЫЛЕННОЙ ЖИДКОСТИ БИНГАМА ЧЕРЕЗ ПОРИСТУЮ СРЕДУ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ

Х. А. Аттиа, В. Аббас*, А. Л. Абуль-Хасан**, М. А. М. Абдин**, М. А. Ибрагим***

Университет г. Эль-Файюм, 63514 Эль-Файюм, Египет
* Колледж техники и технологии Арабской академии наук, технологий и морского транспорта, Каир, Египет
** Каирский университет, 12211 Гиза, Египет
*** Университет Хелуана, Каир, Египет
E-mails: ah1113@yahoo.com, wael_abass@hotmail.com, a_l_aboulhassan@hotmail.com, mostafa_a_m_abdeen@hotmail.com, eng_mohamedibrahim@hotmail.com

Рассматривается нестационарное течение запыленной вязкой несжимаемой жидкости Бингама через пористую среду в круглой трубе под действием постоянного градиента давления, направленного вдоль оси. В предположении, что фаза частиц является вязкой жидкостью, исследуются влияние пористости среды, свойств неньютоновской жидкости, вязкости фазы частиц на скорость нестационарного течения, расход жидкости и коэффициенты поверхностного трения жидкости и фазы частиц. Методом конечных разностей получено численное решение нелинейных уравнений движения.

Ключевые слова: неустойчивое течение, круглая труба, пористая среда, неньютоновская жидкость, жидкость Бингама.

DOI: 10.15372/PMTF20160403

Введение. Течения запыленных жидкостей по круглым трубам имеют место в насосах, ускорителях и измерителях расхода. На эффективность работы таких устройств оказывают влияние взвешенные твердые частицы (шлак, копоть), образующиеся вследствие коррозии и износа. При большой концентрации частиц их взаимодействие, приводящее к увеличению вязких напряжений фазы частиц, может быть учтено путем введения в модель так называемой вязкости фазы частиц [1].

Течение электропроводящей жидкости в круглой трубе исследовалось во многих работах. В [2] изучено нестационарное течение несжимаемой электропроводящей микрополярной жидкости через круглую пористую трубу при наличии периодических вдува и отсоса на стенках и поперечного магнитного поля. В [3] в предположении, что жидкость-носитель является вязкой несжимаемой и электропроводящей, исследовано нестационарное течение запыленной жидкости через круглую трубу с учетом эффекта Холла. Решения задачи о нестационарном течении запыленного газа через круглую трубу в случае отсутствия магнитного поля без учета вязких напряжений фазы частиц описаны в работе [4]. В [5] получено аналитическое решение уравнений движения жидкости при наличии внешнего однородного магнитного поля с учетом вязкости фазы частиц. В [6] исследована задача о течении запыленной электропроводящей жидкости в круглой трубе с учетом эффекта Холла и ионного проскальзывания. Движение запыленной жидкости через пористую среду в однородной трубе с сечением в форме кругового сектора рассмотрено в работе [7]. В [8] получено аналитическое решение задачи о несжимаемом магнитогидродинамическом течении через круглую трубу жидкостей, описываемых степенным законом четвертого порядка. В [9] исследовано влияние магнитного поля и скорости проскальзывания на стенке на нестационарное течение вязкой несжимаемой электропроводящей жидкости в круглой трубе постоянного сечения, заполненной пористым материалом, под действием периодически изменяющегося градиента давления. Исследования запыленной жидкости при различных условиях проводились также в работах [10, 11].

Поскольку неньютоновские материалы, такие как пластмассы, полимеры и т. п., широко используются в промышленности, представляет интерес исследование их свойств [12]. Многие неупругие неньютоновские жидкости, применяемые в химической промышленности, являются жидкостями, имеющими предел текучести. Такие жидкости начинают двигаться, только если касательное напряжение превышает предел текучести [13]. В работе [14] получены точные решения уравнений течения вязкопластических жидкостей Бингама через трубу с эксцентрическим кольцевым поперечным сечением. В [15, 16] изучены течения запыленных проводящих неньютоновских жидкостей в круглой трубе при различных условиях.

В данной работе рассматривается нестационарное течение запыленной вязкой несжимаемой жидкости Бингама через пористую среду в круглой трубе под действием постоянного градиента давления, приложенного в направлении оси трубы. Жидкость предполагается вязкой и несжимаемой, в то время как фаза частиц считается несжимаемой. Нелинейные уравнения сохранения количества движения для жидкости и фазы частиц решены численно методом конечных разностей. Исследовано влияние пористости среды, свойств неньютоновской жидкости, вязкости фазы частиц на скорости жидкости и фазы частиц.

Основные уравнения. Рассматривается нестационарное осесимметричное горизонтальное течение запыленной неньютоновской жидкости в бесконечно длинной трубе радиусом d под действием постоянного градиента давления. Предполагается, что обе фазы являются вязкими жидкостями [5], при этом объемная доля взвешенных частиц конечна и постоянна. Для анализа течения через пористую среду используются описывающие движение жидкости дифференциальные уравнения, основанные на законе Дарси, который учитывает сопротивление, оказываемое пористой средой [17–19]. Схема течения показана на рис. 1.

С учетом принятых выше предположений уравнения сохранения количества движения для жидкости и фазы частиц соответственно имеют вид

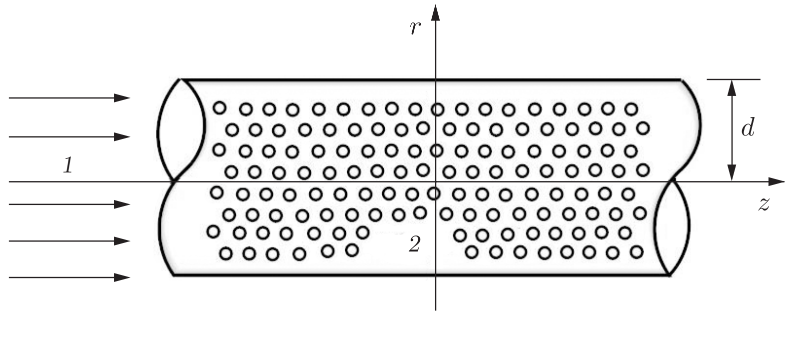

Рис. 1. Геометрия задачи:
1 — основной поток, *2* — запыленная жидкость Бингама

$$
\begin{gathered}
\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \Big(\mu r \frac{\partial u}{\partial r}\Big) + \frac{\rho_p \varphi}{1-\varphi} N(u_p - u) - \frac{\mu}{K} u, \\
\rho_p \frac{\partial u_p}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \Big(\mu_p r \frac{\partial u_p}{\partial r}\Big) + \rho_p N(u - u_p) - \frac{\mu_p}{K} u_p,
\end{gathered} \qquad (1)
$$

где t — время; r — радиальная координата; u — скорость жидкой фазы; u_p — скорость фазы частиц; ρ — плотность жидкой фазы; ρ_p — плотность фазы частиц; K — проницаемость Дарси; $\partial P/\partial z$ — градиент гидродинамического давления; φ — объемная доля фазы частиц; N — коэффициент переноса импульса (величина, обратная времени релаксации, или время, необходимое для того, чтобы относительная скорость фаз уменьшилась в e^{-1} раз относительно начального значения [5]); μ_p — вязкость фазы частиц, которая предполагается постоянной; μ — кажущаяся вязкость жидкости.

В жидкости Бингама напряжение сдвига задается соотношениями [15]

$$
\tau = \tau_0 + \mu_0 \dot\gamma \quad \text{при} \quad |\tau| > \tau_0, \qquad \dot\gamma = 0 \quad \text{при} \quad |\tau| \leqslant \tau_0, \qquad (2)
$$

где τ — напряжение сдвига; $\dot\gamma = \partial u/\partial r$ — скорость сдвига; τ_0 — предел текучести; μ_0 — пластическая вязкость жидкости Бингама. Заметим, что если напряжение сдвига τ меньше τ_0, возникает жесткая зона. Сложность решения уравнений сформулированной задачи обусловлена тем, что условия (2) имеют разрывный характер [20]. В работе [21] предложена модифицированная модель, содержащая следующую зависимость напряжения от скорости сдвига:

$$
\tau = \tau_0(1 - \mathrm{e}^{-m\dot\gamma}) + \mu_0 \dot\gamma \qquad \forall \dot\gamma.
$$

При достаточно большом значении параметра m ($m > 100$) эта модель переходит в модель жидкости Бингама [22, 23]. Таким образом, кажущаяся вязкость определяется соотношением

$$
\mu = \mu_0 + \frac{\tau_0(1 - \mathrm{e}^{-m|\partial u/\partial r|})}{|\partial u/\partial r|}. \qquad (3)
$$

Начальные данные и краевые условия формулируются следующим образом:

$$
\begin{gathered}
u(r,0) = 0, \qquad u_p(r,0) = 0, \\
\frac{\partial u(0,t)}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial u_p(0,t)}{\partial r} = 0, \\
u(d,t) = 0, \qquad u_p(d,t) = 0
\end{gathered}
$$

(d — радиус трубы).

Вводя безразмерные переменные и параметры

$$
\begin{gathered}
\bar r = \frac{r}{d}, \quad \bar t = \frac{t\mu_0}{\rho d^2}, \quad G_0 = -\frac{\partial p}{\partial z}, \quad k = \frac{\rho_p \varphi}{\rho(1-\varphi)}, \quad \bar\mu = \frac{\mu}{\mu_0}, \\
\bar u(r,t) = \frac{\mu_0 \mu(r,t)}{G_0 d^2}, \qquad \bar u_p(r,t) = \frac{\mu_0 \mu_p(r,t)}{G_0 d^2},
\end{gathered}
$$

уравнения (1), (3) можно записать в виде

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial u}{\partial t} = 1 + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + k\alpha(u_p - u) - Mu, \\
\frac{\partial u_p}{\partial t} = \beta\Big(\frac{\partial^2 u_p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_p}{\partial r}\Big) + \alpha(u - u_p) - \beta M u_p; \\
\mu = 1 + \frac{\tau_D(1 - \mathrm{e}^{-\lambda|\partial u/\partial r|})}{|\partial u/\partial r|},
\end{gathered} \qquad (4)
$$

где $\alpha = Nd^2\rho/\mu_0$ — число, обратное числу Стокса; $\beta = \mu_p/\mu_0$ — отношение вязкостей; $M = d^2/K$ — параметр пористости; $\tau_D = \tau_0/(G_0 d)$ — число Бингама (безразмерный предел текучести); $\lambda = mdG_0/\mu_0$.

Безразмерные начальные и краевые условия формулируются следующим образом:

$$u(r,0) = 0, \qquad u_p(r,0) = 0,$$
$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial u_p(0,t)}{\partial r} = 0, \qquad u(1,t) = 0, \quad u_p(1,t) = 0. \tag{5}$$

Выражения для расхода жидкости и коэффициентов поверхностного трения для жидкости и фазы частиц записываются в виде [5]

$$Q = 2\pi \int_0^1 r u(r,t)\, dr, \qquad Q_p = 2\pi \int_0^1 r u_p(r,t)\, dr,$$
$$C = -\frac{\partial u(1,t)}{\partial r}, \qquad C_p = -\beta k\, \frac{\partial u_p(1,t)}{\partial r}.$$

Результаты исследования и их обсуждение. Уравнения (4) представляют собой систему связанных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, которые решены численно с начально-краевыми условиями (5) с использованием аппроксимаций конечными разностями. Сначала применяется линеаризация нелинейных членов с поправками на последующих итерациях, до тех пор пока не будет достигнута сходимость. На двух последовательных временных шагах используется неявный метод Кранка — Николсона [24–26]. Для решения линеаризованной системы разностных уравнений используется итерационная схема. На каждом временном шаге в качестве начальных условий используется решение, полученное на предыдущем шаге. Итерации продолжаются до достижения сходимости с заданной степенью точности. Полученная блочная трехдиагональная система решается с помощью обобщенного алгоритма Томаса. В данной работе проведены вычисления при $\alpha = 1$, $\lambda = 200$, $k = 10$. На основе тестовых расчетов показано, что расчетная область $0 < t < \infty$, $0 < r < 1$ может быть разбита на интервалы с шагами по времени и пространству соответственно $\Delta t = 0{,}0001$, $\Delta r = 0{,}005$. Следует отметить,

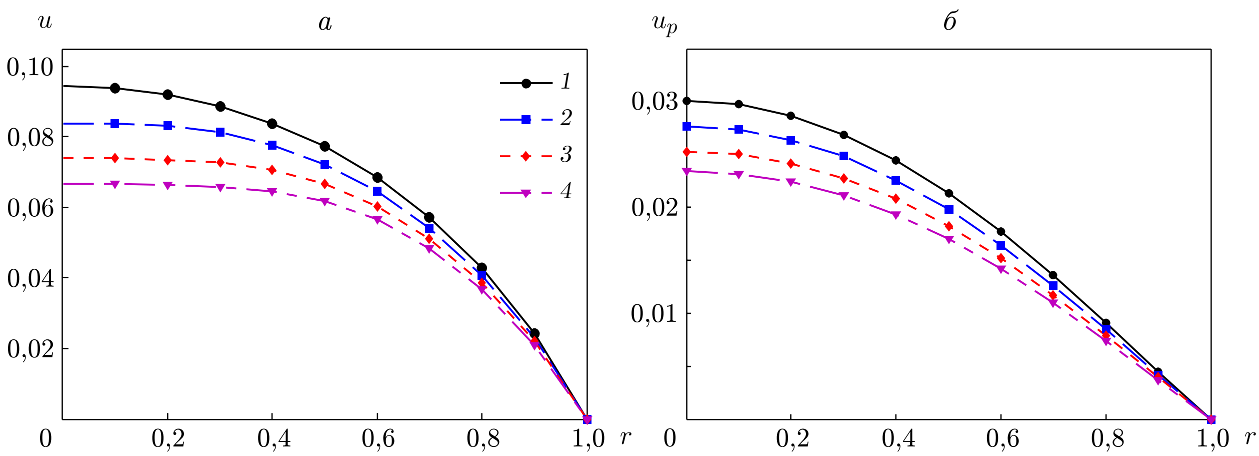

Рис. 2. Распределения скоростей жидкости (*а*) и частиц пыли (*б*) при $\beta = 0{,}5$, $M = 1$ и различных значениях τ_D:
1 — $\tau_D = 0$, *2* — $\tau_D = 0{,}025$, *3* — $\tau_D = 0{,}05$, *4* — $\tau_D = 0{,}075$

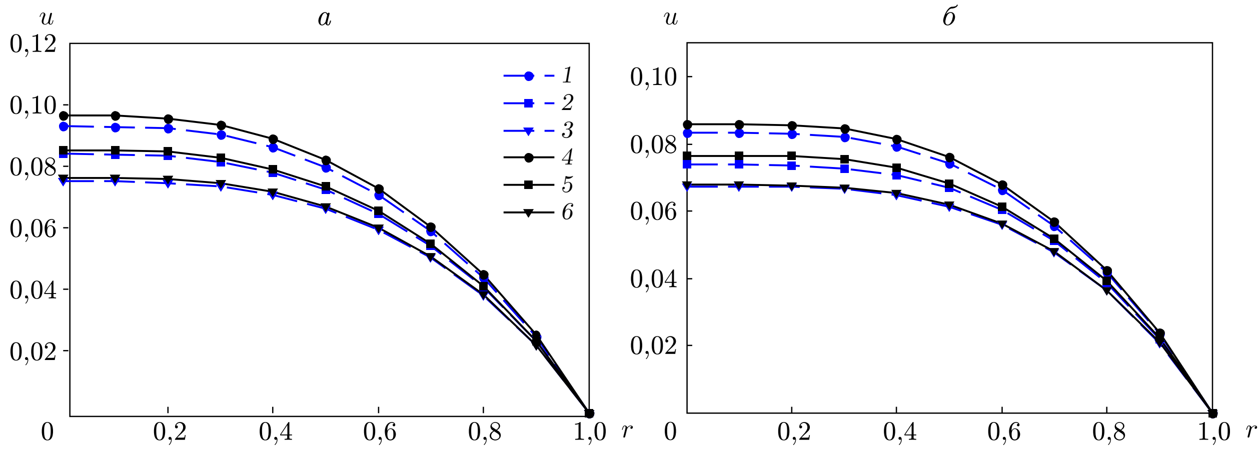

Рис. 3. Распределения скорости жидкости при $\beta = 0{,}5$ и различных значениях M, t, τ_D:
а — $\tau_D = 0{,}025$, *б* — $\tau_D = 0{,}05$; штриховые линии — $t = 1$, сплошные — $t = 2$; *1*, *4* — $M = 0$, *2*, *5* — $M = 1$, *3*, *6* — $M = 2$

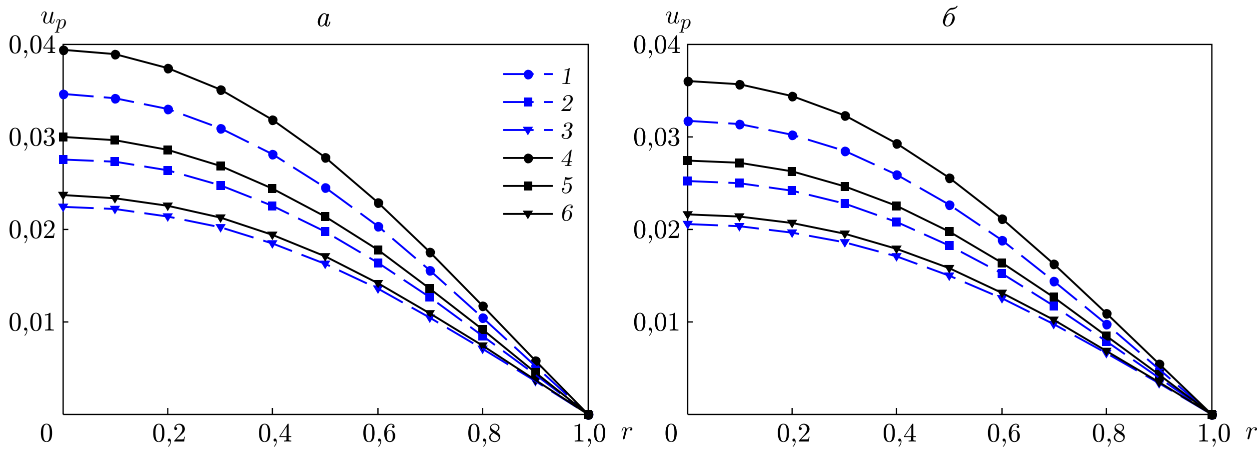

Рис. 4. Распределения скорости частиц пыли при $\beta = 0{,}5$ и различных значениях M, t, τ_D (обозначения те же, что на рис. 3)

что в случае непористой невязкой фазы частиц и ньютоновской жидкости результаты, полученные в данной работе, согласуются с результатами работ [4, 5].

На рис. 2 представлены профили скоростей жидкости u и частиц пыли u_p при $M = 1$, $\beta = 0{,}5$ и различных значениях параметра τ_D. Видно, что при увеличении числа Бингама τ_D значения u, u_p уменьшаются. Это обусловлено наличием вязких сил. На рис. 3, 4 представлены распределения скоростей жидкости u и частиц пыли u_p при $\beta = 0{,}5$, $t = 1, 2$ и различных значениях параметра τ_D и параметра пористости M. На рис. 3 видно, что при увеличении параметра M вследствие наличия вязких сил скорость жидкости u уменьшается при всех рассмотренных значениях τ_D. Кроме того, с увеличением параметра пористости M длительность неустановившегося режима течения жидкости значительно уменьшается. Из рис. 4 следует, что скорость частиц пыли u_p уменьшается при увеличении параметра пористости M. Результаты сравнения рис. 3, 4 показывают, что при всех рассмотренных значениях M и τ_D длительность неустановившегося режима течения частиц пыли больше длительности неустановившегося режима течения жидкости.

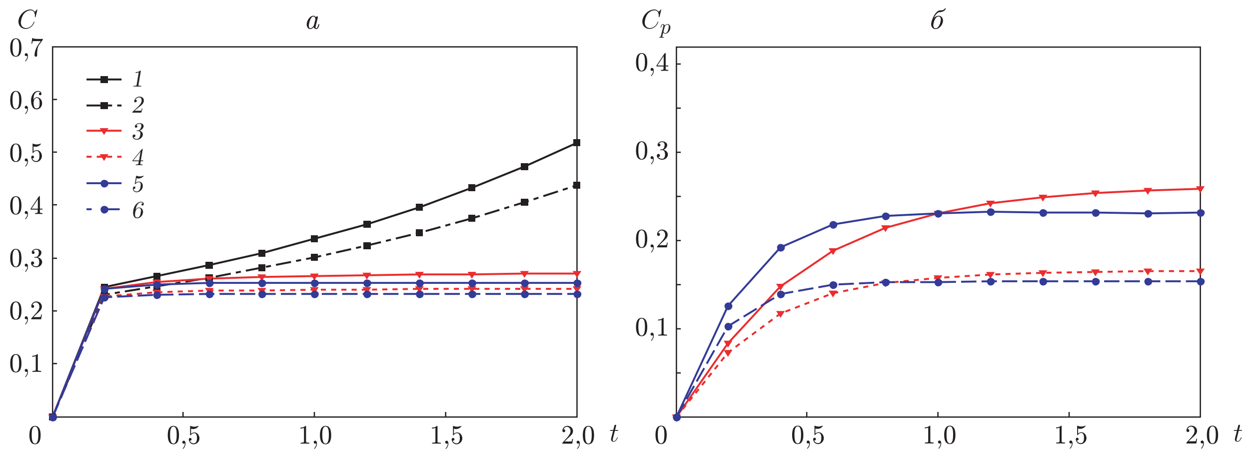

Рис. 5. Зависимости коэффициентов поверхностного трения жидкости (*а*) и фазы частиц (*б*) от времени при различных значениях M и β:
1, 2 — $\beta = 0$, *3, 4* — $\beta = 0{,}5$, *5, 6* — $\beta = 1$; *1, 3, 5* — $M = 0$, *2, 4, 6* — $M = 2$

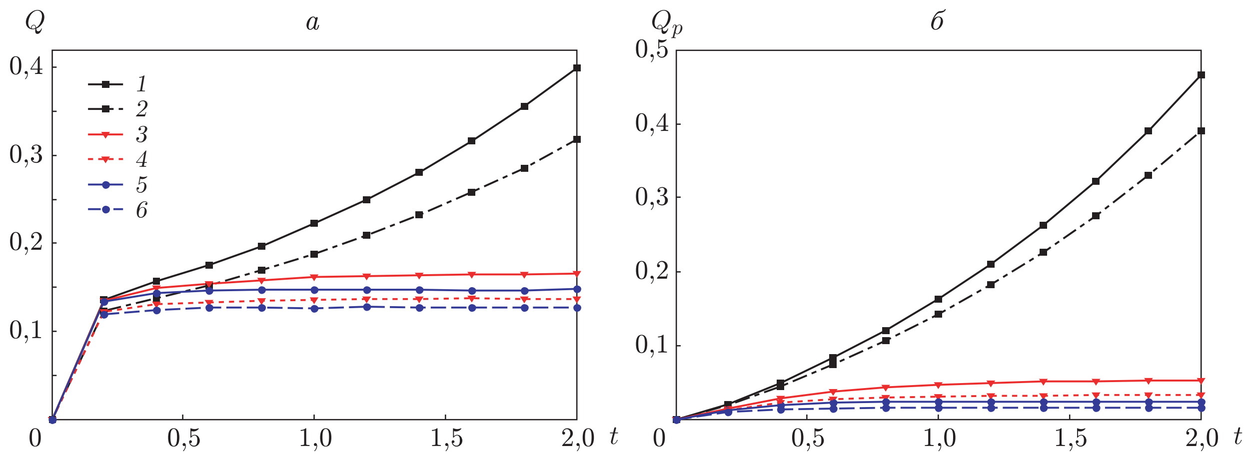

Рис. 6. Зависимости расходов жидкости (*а*) и фазы частиц (*б*) от времени при различных значениях M и β (обозначения те же, что на рис. 5)

На рис. 5, 6 показано влияние параметра пористости M и параметра вязкости фазы частиц на коэффициенты поверхностного трения жидкости C и фазы частиц C_p, а также на расходы жидкости Q и фазы частиц Q_p при $\tau_D = 0{,}05$. Видно, что при учете вязких напряжений фазы частиц значения Q, Q_p, C уменьшаются. На рис. 5,*б* видно, что и при $M = 1$, и при $M = 2$ кривые, соответствующие различным значениям β, пересекаются в некоторой точке. Перед точкой пересечения бо́льшим значениям β соответствуют бо́льшие значения C_p, за точкой пересечения бо́льшим значениям β соответствуют меньшие значения C_p. Для невязкой фазы частиц ($\beta = 0$) стационарный режим течения наступает быстрее (см. рис. 5, 6). Также на рис. 5, 6 видно, что с увеличением параметра M значения C, C_p, Q, Q_p уменьшаются при всех рассмотренных значениях t и β.

Заключение. Исследовано нестационарное течение запыленной неньютоновской жидкости Бингама через пористую среду в круглой трубе. Методом конечных разностей численно решены определяющие нелинейные уравнения в частных производных. Исследовано влияние параметра пористости, числа Бингама и вязкости фазы частиц на скорость течения, расходы жидкости и частиц пыли и коэффициенты поверхностного трения для фазы частиц и жидкости. Установлено, что при увеличении пористости и предела текучести значения этих величин уменьшаются. Следует отметить, что влияние вязкости и поверхностного трения фазы частиц зависит от времени. Стационарный режим течения наступает быстрее при увеличении вязкости фазы частиц или параметра пористости.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Attia H. A.** Hall effect on the flow of a dusty Bingham fluid in a circular pipe // Turk. J. Engng Environ. Sci. 2006. V. 30. P. 14–21.
2. **Murthy J. R., Bahali N. K., Srinivasacharya D.** Unsteady flow of micropolar fluid through a circular pipe under a transverse magnetic field with suction/injection // Selcuk J. Appl. Math. 2010. V. 11. P. 13–25.
3. **Attia H. A.** Transient circular pipe MHD flow of a dusty fluid considering the Hall effect // Kragujevac J. Sci. 2011. V. 33. P. 15–23.
4. **Dube S. N., Sharma C. L.** A note on unsteady flow of a dusty viscous liquidin a circular pipe // J. Phys. Soc. Japan. 1975. V. 38. P. 298–310.
5. **Chamkha A. J.** Unsteady flow of a dusty conducting fluid through a pipe // Mech. Res. Comm. 1994. V. 21. P. 281–286.
6. **Attia H. A.** Analytical solution for flow of a dusty fluid in a circular pipe with Hall and ion slip effects // Chem. Engng Comm. 2007. V. 194. P. 1287–1296.
7. **Gireesha B. J., Madhura K. R., Bagewadi C. S.** Flow of an unsteady dusty fluid through porous media in a uniform pipe with sector of a circle as cross-section // Intern. J. Pure Appl. Math. 2012. V. 76. P. 29–46.
8. **Hayat T., Sajid M., Ayub M.** On explicit analytic solution for MHD pipe flow of a fourth grade fluid // Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2008. V. 13. P. 745–751.
9. **Chand K., Singh K. D., Kumar S.** Hydromagnetic periodic flow in a circular pipe through porous medium with heat transfer in slip flow regime // Res. J. Sci. Technol. 2013. V. 5. P. 148–152.
10. **Attia H. A., Abbas W., Abdeen M. A. M., Emam M. S.** Effect of porosity on the flow of a dusty fluid between parallel plates with heat transfer and uniform suction and injection // Europ. J. Environ. Civil Engng. 2014. V. 18. P. 241–251.
11. **Hatami M., Hosseinzadeh Kh., Domairry G., Behnamfar M. T.** Numerical study of MHD two-phase Couette flow analysis for fluid-particle suspension between moving parallel plates // J. Taiwan Inst. Chem. Engrs. 2014. V. 45. P. 2238–2245.
12. **Nakayama A., Koyama H.** An analysis for friction and heat transfer characteristics of power-law non-Newtonian fluid flows past bodies of arbitrary geometrical configuration // Wärme- und Stoffübertrag. 1988. Bd 22. S. 29–36.
13. **Metzner A. B.** Heat transfer in non-Newtonian fluid // Adv. Heat Transfer. 1965. V. 2. P. 357–397.
14. **Shelukhin V.** On exact solutions of the flow equations for Bingham visco-plastic fluids through an eccentric annular cross-section // Rheol. Acta. 2011. V. 50. P. 335–342.
15. **Attia H. A.** Unsteady flow of a dusty conducting non-Newtonian fluid through a pipe // Canad. J. Phys. 2003. V. 81. P. 789–795.
16. **Attia H. A., Ahmed M. E. S.** Circular pipe MHD flow of a dusty Bingham fluid // Tamkang J. Sci. Engng. 2005. V. 8. P. 257–265.
17. **Abdeen M. A. M., Attia H. A., Abbas W., Abd El-Meged W.** Effectiveness of porosity on transient generalized Couette flow with Hall effect and variable properties under exponential decaying pressure gradient // Indian J. Phys. 2013. V. 87. P. 767–775.

18. **Attia H. A., Abbas W., Abdeen M. A. M., Abdin A. E.-D.** Effect of porosity on the flow and heat transfer between two parallel porous plates with the Hall effect and variable properties under constant pressure gradient // Bulgar. Chem. Comm. 2014. V. 46. P. 535–544.
19. **Attia H. A., Abbas W., Abdeen M. A. M., Said A. A. M.** Heat transfer between two parallel porous plates for Couette flow under pressure gradient and Hall current // Sadhana. 2015. V. 40. P. 183–197.
20. **Nirmalkar N., Chhabra R. P., Poole R. J.** On creeping flow of a Bingham plastic fluid past a square cylinder // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2012. V. 171. P. 17–30.
21. **Papanastasiou T. C.** Flows of materials with yield // J. Rheol. 1987. V. 31. P. 385–404.
22. **Mitsoulis E.** Flows of viscoplastic materials: models and computations // Rheol. Rew. 2007. V. 2007. P. 135–178.
23. **Abdali S. S., Mitsoulis E., Markatos N. C.** Entry and exit flows of Bingham fluids // J. Rheol. 1992. V. 36. P. 389–407.
24. **Mitchell A. R.** The finite difference method in partial differential equations / A. R. Mitchell, D. F. Griffiths. N. Y.: John Wiley and Sons, 1980.
25. **Evans G. A.** Numerical methods for partial differential equations / G. A. Evans, J. M. Blackledge, P. D. Yardley. N. Y.: Springer Verlag, 2000.
26. **Attia H. A., Abbas W., El-Din Abdin A., Abdeen M. A. M.** Effects of ion slip and Hall current on unsteady Couette flow of a dusty fluid through porous media with heat transfer // High Temperature. 2015. V. 53. P. 891–898.

Поступила в редакцию 24/VI 2013 г.,
в окончательном варианте — 1/VII 2014 г.