СИБИРСКИЙ ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ. 2015. Т. 18, № 2

УДК 519.245

Сравнение подходов к оптимизации функциональных алгоритмов статистического моделирования в метрике пространства C*

Е.В. Шкарупа

Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

E-mail: sev@osmf.sscc.ru

Шкарупа Е.В. Сравнение подходов к оптимизации функциональных алгоритмов статистического моделирования в метрике пространства **C** // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2015. — Т. 18, № 2. — С. 219–234.

Функциональные алгоритмы статистического моделирования предназначены для построения аппроксимации решения задачи как функции на требуемой области. Для функциональных алгоритмов с различными типами стохастических оценок в узлах были разработаны подходы к построению верхних границ погрешностей в метрике пространства **C**, учитывающие степень зависимости оценок. Кроме того, существует универсальный подход, применимый при любой степени зависимости стохастических оценок. Построенная верхняя граница погрешности функционального алгоритма используется при выборе условно-оптимальных значений параметров, таких как число узлов сетки и объем выборки. Оптимальность выбираемых параметров напрямую зависит от точности используемой верхней границы погрешности. Основной целью работы является сравнение универсального подхода и подходов, учитывающих степень зависимости оценок.

DOI: 10.15372/SJNM20150209

Ключевые слова: *функциональные алгоритмы статистического моделирования, бигармоническое уравнение, оценка погрешности, оптимизация.*

Shkarupa E.V. Comparison of approaches to optimization of functional statistical modeling algorithms in the metric of the space **C** // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2015. — Vol. 18, № 2. — P. 219–234.

Functional algorithms of the statistical modeling are designed to construct an approximation of the problem solution as function on a required domain. The approaches to construction of the upper error bound in the metrics of the space **C** with allowance for the degree of dependence of the estimates were devised for functional algorithms with different types of stochastic estimates in the nodes. Furthermore, there exists a universal approach applicable at any degree of dependence. The constructed upper error bound of the functional algorithm is used for choosing an optimal value of parameters, such as the number of grid nodes and the sample size. Optimality of the chosen parameters directly depends on the accuracy of the used upper error bound. The primary intent of the present paper is a comparison of universal approaches and those with allowance for the degree of dependence of the estimates.

Keywords: *functional algorithms of statistical modeling, biharmonic equation, error estimation, optimization.*

Введение

Методы статистического моделирования (Монте-Карло) позволяют вычислять отдельные функционалы от решений интегральных и дифференциальных уравнений, в

*Работа выполнена при поддержке Президентской программы поддержки ведущих научных школ Российской Федерации НШ-5111.2014.1.

том числе значения решений в выбранных точках. В последние годы активно развиваются также подходы к построению и оптимизации алгоритмов статистического моделирования для глобального решения задач [1–18]. Такие алгоритмы будем называть *функциональными алгоритмами статистического моделирования.* Эти методы связаны с предварительной дискретизацией задачи (введением сетки), оцениванием решения в узлах сетки методом Монте-Карло с последующим восполнением решения по полученным приближенным значениям в узлах.

Наличие детерминированной и стохастической составляющих погрешности привело к многообразию подходов к исследованию сходимости и оптимизации функциональных алгоритмов статистического моделирования. В частности, возможны различные подходы к выбору вероятностной меры оценки погрешности и критерия оптимальности алгоритма. В основополагающей для данного направления работе [1] использовалась сходимость погрешности к нулю в среднем в $\mathbf{L}_2$-метрике. В работах [2, 3] проводилось исследование сходимости функциональных алгоритмов в среднем в метрике пространства непрерывных функций $\mathbf{C}$ на основе теоремы вложения. В работах [4, 5] было предложено исследовать сходимость функциональных алгоритмов по вероятности, что позволяет построить более точную верхнюю границу статистической погрешности в метрике $\mathbf{C}$. В этом подходе существенной оказалась степень вероятностной зависимости используемых стохастических оценок значений решения в узлах, а именно зависимые, независимые или слабо зависимые оценки. Построение верхних границ по вероятности для статистических погрешностей функциональных алгоритмов с различными типами стохастических оценок в узлах проводилось в работах [4–15], в том числе: для зависимых оценок, построенных в рамках так называемого “метода зависимых испытаний”, в работах [4, 10], для независимых оценок в [5], для слабозависимых в [7–9]. В работе [12] был предложен “универсальный” подход, применимый при любой степени зависимости стохастических оценок. Этот подход был успешно использован при построении верхних границ погрешностей функциональных алгоритмов метода пробных частиц для решения линеаризованного уравнения Больцмана [14] и метода прямого статистического моделирования [15].

Другой важной задачей является задача выбора оптимальных значений параметров функциональных алгоритмов, таких как число узлов сетки и число реализаций стохастических оценок решения в узлах. Широко используется подход к оптимизации, предложенный в [1]. Предполагается, что верхняя граница погрешности достаточно точно воспроизводит зависимость этой погрешности от параметров. Верхняя граница приравнивается к заданному уровню погрешности, и при полученном условии минимизируется функция трудоемкости, аргументами которой являются выбираемые параметры. Такой подход будем называть условной оптимизацией алгоритма с гарантированной по вероятности погрешностью.

При таком подходе к оптимизации оптимальность выбираемых параметров напрямую зависит от точности используемой верхней границы погрешности. Основной целью представленной работы является сравнение условно-оптимальных параметров, полученных при использовании универсального подхода, и подходов, учитывающих степень зависимости оценок.

1. Функциональные алгоритмы статистического моделирования

Пусть u — решение некоторой задачи, которое необходимо аппроксимировать на ограниченной области $D \subset \mathbf{R}^d$. Тогда функциональный алгоритм статистического моделирования выглядит следующим образом:

1. Построение сетки $\{\boldsymbol{r}^{(i)}\}_{i=1}^{M}$ в области D;
2. Использование метода Монте-Карло для оценки значений решения в узлах сетки
$$u(\boldsymbol{r}^{(i)}) \approx \tilde{u}(\boldsymbol{r}^{(i)}) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\xi_n^{(i)},$$
где $\xi_n^{(i)}$ — независимые реализации $\xi^{(i)}$ $(n = 1,\ldots,N)$, а $\xi^{(i)}$ — стохастическая оценка величины $u(\boldsymbol{r}^{(i)})$, т. е. $\mathbf{E}\xi^{(i)} = u(\boldsymbol{r}^{(i)})$ (или $\mathbf{E}\xi^{(i)} \approx u(\boldsymbol{r}^{(i)})$ для смещенных оценок);
3. Применение процедуры интерполяции к полученным значениям решения в узлах $\tilde{u}(\boldsymbol{r}^{(i)})$ для приближения u как функции на области D:
$$u(\boldsymbol{r}) \approx L_{(M)}\tilde{u}(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{M}\tilde{u}(\boldsymbol{r}^{(i)})\chi_i(\boldsymbol{r}), \tag{1.1}$$
где $\chi_i(\boldsymbol{r})$ — базисные функции интерполяции.

Для простоты будем использовать однородную сетку и так называемую мультилинейную интерполяцию [5] — интерполяцию Стренга–Фикса с кусочно-линейной финитной “производящей” функцией
$$\chi_i(\boldsymbol{r}) = \chi_{(i_1,\ldots,i_d)}(r_1,\ldots,r_d) = \chi\left(\frac{r_1}{h} - i_1\right)\cdots\chi\left(\frac{r_d}{h} - i_d\right), \tag{1.2}$$
где $(i_1,\ldots,i_d)$ — мультииндекс, соответствующий узлу $\boldsymbol{r}^{(i)}$ так, что $\boldsymbol{r}^{(i)} = (i_1h,\ldots,i_dh)$, а
$$\chi(s) = \begin{cases} 1+s & \text{при} \quad -1 \le s \le 0\,, \\ 1-s & \text{при} \quad 0 \le s \le 1\,, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$
В качестве производящей функции в интерполяции Стренга–Фикса можно использовать и B-сплайны $\beta^{(r)}(u)$ порядка r [11]. Например, в работах [12, 13] исследуются функциональные алгоритмы, построенные с применением кубических сплайнов.

Верхнюю границу погрешности аппроксимации (1.1) будем рассматривать в метрике пространства непрерывных функций $\mathbf{C}$ со сходимостью по вероятности, как и в работах [4–15], а именно, рассматривать выражения вида
$$\mathbf{P}\Big\{\delta = \sup_{\boldsymbol{r}\in D}\big|u(\boldsymbol{r}) - L_{(M)}\tilde{u}(\boldsymbol{r})\big| < T(M,N)\Big\} > 1-\theta, \tag{1.3}$$
где $T(M,N) \to 0$ при $M,N \to \infty$, а $\theta > 0$ — малое число.

На основе верхней границы погрешности из (1.3) формулируется задача выбора условно-оптимальных значений параметров рассмотренного алгоритма (числа узлов M и объема выборки N). Такая задача [1] состоит в приближенной минимизации трудоемкости алгоритма с гарантированным по вероятности уровнем погрешности
$$\min_{M,N} S(M,N) \quad \text{при условии} \quad T(M,N) = \alpha, \tag{1.4}$$
где $S(M,N)$ — функция трудоемкости, $T(M,N)$ — верхняя граница погрешности из выражения (1.3), а $\alpha > 0$ — заданный уровень погрешности.

По неравенству треугольника погрешность аппроксимации (1.1) в метрике пространства непрерывных функций $\mathbf{C}$ разлагается на три компоненты:

$$\begin{aligned}\delta &= \sup_{\boldsymbol{r}\in D}\left|u(\boldsymbol{r}) - L_{(M)}\tilde{u}(\boldsymbol{r})\right| \\ &\le \sup_{\boldsymbol{r}\in D}\left|u(\boldsymbol{r}) - L_{(M)}u(\boldsymbol{r})\right| + \sup_{\boldsymbol{r}\in D}\left|L_{(M)}u(\boldsymbol{r}) - L_{(M)}\hat{u}(\boldsymbol{r})\right| + \sup_{\boldsymbol{r}\in D}\left|L_{(M)}\hat{u}(\boldsymbol{r}) - L_{(M)}\tilde{u}(\boldsymbol{r})\right| \\ &= \delta_1 + \delta_2 + \delta_3, \end{aligned} \tag{1.5}$$

где $L_{(M)}u(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^M u(\boldsymbol{r}^{(i)})\chi_i(\boldsymbol{r})$, а $L_{(M)}\hat{u}(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^M \mathbf{E}\xi^{(i)}\chi_i(\boldsymbol{r})$. Первые две компоненты погрешности в (1.5) являются детерминированными: δ_1 — это погрешность мультилинейной интерполяции функции u по точным значениям в узлах, а δ_2 — смещение (равно нулю в случае несмещенных оценок). Третье слагаемое есть статистическая компонента погрешности.

Для мультилинейной интерполяции погрешность "сносится в узлы" [5], т. е. выполняется неравенство

$$\delta_3 \le \max_{i=1,\ldots,M}\left|\mathbf{E}\xi^{(i)} - \tilde{u}(\boldsymbol{r}^{(i)})\right| = \max_{i=1,\ldots,M}\left|\mathbf{E}\xi^{(i)} - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N \xi_n^{(i)}\right|. \tag{1.6}$$

Будем предполагать, что дисперсия оценок ограничена, т. е. существует положительная константа H_V такая, что выполняется следующее неравенство:

$$\mathbf{V}\xi^{(i)} \le H_V \quad \text{для любого} \quad i = 1, \ldots, M,$$

где $\mathbf{V}$ обозначает дисперсию случайной величины. Введем обозначение $\sigma_i = \sqrt{\mathbf{V}\xi^{(i)}}$. Тогда

$$\delta_3 \le \sqrt{\frac{H_V}{N}}\max_{i=1,\ldots,M}\left|\omega_N^{(i)}\right|, \quad \text{где} \quad \omega_N^{(i)} = \sum_{n=1}^N \frac{\xi_n^{(i)} - \mathbf{E}\xi^{(i)}}{\sigma_i\sqrt{N}}. \tag{1.7}$$

По центральной предельной теореме суммы $\omega_N^{(i)}$ сходятся по распределению к стандартным совместно нормальным случайным величинам $\gamma^{(i)}$ при $N \to +\infty$. Следовательно, при фиксированном M для любого $\theta > 0$ найдется такое $\hat{N}(\theta, M) \in \mathbf{N}$, что при $N > \hat{N}(\theta, M)$ выполнено

$$\mathbf{P}\left\{\delta_3 \le \sqrt{\frac{H_V}{N}}\max_{i=1,\ldots,M}\left|\gamma^{(i)}\right|\right\} > 1 - \theta. \tag{1.8}$$

Таким образом, чтобы построить верхнюю границу для статистической компоненты погрешности необходимо построить верхнюю границу для максимума стандартных нормальных случайных величин $\max_{i=1,\ldots,M}|\gamma^{(i)}|$. Принимая во внимание свойства использованных оценок решения в узлах (а именно независимые, слабозависимые оценки или оценки по методу зависимых испытаний), достаточно точные верхние границы для таких максимумов были построены для различных функциональных алгоритмов в работах [5–10]. Кроме того, в работе [12] был предложен "универсальный" подход к построению верхней границы для таких максимумов.

2. Подходы к оценке максимума стандартных нормальных случайных величин

Рассмотрим различные подходы к оценке максимума стандартных нормальных случайных величин из выражения (1.8) в зависимости от типов используемых стохастических оценок в узлах.

2.1. Зависимые стохастические оценки, построенные по методу зависимых испытаний

Первым функциональным алгоритмом явился так называемый *метод зависимых испытаний*, в котором искомое решение представимо в виде

$$u(\boldsymbol{r}) = \mathbf{E}\xi(\boldsymbol{r}) \approx \tilde{u}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\xi_n(\boldsymbol{r}), \tag{2.1}$$

где $\xi_n(\boldsymbol{r})$ — независимые реализации случайной функции $\xi(\boldsymbol{r})$, поэтому одни и те же выборочные значения используются при вычислении значений функции $\xi_n(\boldsymbol{r})$ одновременно для всех $\boldsymbol{r} \in D$. Этот метод был построен для аппроксимации интеграла, зависящего от параметра, в работе [16]. Здесь были отмечены преимущества функциональной оценки (2.1) (в частности, отмечено, что метод зависимых испытаний позволяет воспроизводить гладкость функции $u(\boldsymbol{r})$) и сформулированы условия, при которых погрешность метода в метрике пространства $\mathbf{C}$ стремится (по вероятности) к нулю со скоростью порядка $1/\sqrt{N}$. В работах [17, 18] с помощью специальной теории функциональной сходимости последовательностей случайных функций удалось ослабить эти условия.

В случае, когда для оценок решения в узлах сетки используются зависимые стохастические оценки, построенные по формулам типа (2.1), при оценке максимума из (1.6) можно учесть, что

$$\max_{i=1,\ldots,M}\left|\mathbf{E}\xi^{(i)} - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\xi_n^{(i)}\right| \le \sup_{\boldsymbol{r}\in D}\left|u(\boldsymbol{r}) - \tilde{u}(\boldsymbol{r})\right|,$$

где $\xi^{(i)} = \xi\left(\boldsymbol{r}^{(i)}\right)$. При выполнении определенных условий гладкости (см., напр., [4]) найдется положительная константа H_Z такая, что для любого $\theta > 0$ существует натуральное число $\tilde{N}(\theta)$ такое, что при $N > \tilde{N}(\theta)$ выполнено

$$\mathbf{P}\left\{\delta_3 \le \sup_{\boldsymbol{r}\in D}\left|u(\boldsymbol{r}) - \tilde{u}(\boldsymbol{r})\right| \le \frac{H_Z}{\sqrt{N}}\right\} > 1 - \theta. \tag{2.2}$$

2.2. Независимые стохастические оценки

В случае, когда стохастические оценки в узлах сетки независимы (а значит, независимы и стандартные нормальные случайные величины $\gamma^{(i)}$), чтобы получить распределение максимума $\max_{m=1,\ldots,M}|\gamma_m|$ в работе [5] предложено использовать теорию порядковых статистик [19]. На ее основе была построена следующая верхняя граница статистической погрешности. Для любого $\theta > 0$ существуют натуральное $\tilde{M}(\theta)$ и действительная константа $H_Q(\theta)$ такие, что для всякого $M > \tilde{M}(\theta)$ найдется натуральное число $\tilde{N}(\theta, M)$ такое, что для всех $N > \tilde{N}(\theta, M)$ выполнено

$$\mathbf{P}\left\{\delta_3 \le \sqrt{\frac{H_V}{N}}\left((2\ln M)^{1/2} + (2\ln M)^{-1/2}\left(H_Q(\theta) - \frac{\ln\ln M}{2}\right)\right)\right\} > 1 - \theta. \tag{2.3}$$

Заметим, что при вычислении условно-оптимальных параметров целесообразнее применить промежуточный результат из теории порядковых статистик и в формуле (2.3) вместо $(2\ln M)^{1/2} + (2\ln M)^{-1/2}\Big(H_Q(\theta) - (\ln\ln M)/2\Big)$ использовать более точное выражение $\sqrt{2\ln M - \ln\ln M + 2H_Q(\theta)}$.

Соотношение (2.2) отражает преимущество использования зависимых оценок в узлах по сравнению с независимыми оценками, для которых величина δ_3 растет с увеличением числа узлов M как $(\ln M)^{1/2}$ (см. соотношение (2.3)). Отметим, однако, что это преимущество реализуется только при наличии определенной гладкости функции $u(\boldsymbol{r})$. Для многих практически важных задач последнее условие выполняется достаточно редко.

2.3. Слабозависимые стохастические оценки

В некоторых функциональных алгоритмах случайные величины $\left\{\gamma^{(i)}\right\}$ зависимы, но эта зависимость асимптотически "слабая". Корреляции случайных величин $\left\{\gamma^{(i)}\right\}$ могут убывать с ростом числа узлов [7] или с увеличением расстояния между узлами [8, 9]. В работах [7–9] на основе теории экстремумов нормальных последовательностей [19] было доказано, что при выполнении соответствующих условий на корреляции $\max_{i=1,\ldots,M}|\gamma^{(i)}|$ имеет то же асимптотическое распределение, что и для независимых случайных величин.

2.4. Зависимые стохастические оценки с неизвестной степенью зависимости

В случаях, когда затруднительно получить какую-либо информацию о корреляциях оценок в узлах, необходим альтернативный ("универсальный") подход к построению верхней границы для статистической компоненты погрешности. Такой подход был впервые предложен для аппроксимации методом Монте-Карло интеграла, зависящего от параметра, в работе [12]. Он не требует никакой информации о корреляциях оценок и может применяться для $d = 1, 2, 3$. Вернемся к формуле (1.7). Будем искать верхнюю границу погрешности в следующем виде:

$$\mathbf{P}\left\{\delta_3 \le \sqrt{\frac{H_V}{N}}\tau_M(\theta)\right\} > 1-\theta, \tag{2.4}$$

где $\tau_M(\theta)$ получается из выражения

$$\mathbf{P}\left\{\max_{i=1,\ldots,M}\left|\omega_N^{(i)}\right| \le \tau_M(\theta)\right\} > 1-\theta. \tag{2.5}$$

Заметим теперь, что неравенство

$$\mathbf{P}\left\{\max_{i=1,\ldots,M}\left|\omega_N^{(i)}\right| \le \tau\right\} \ge 1 - \sum_{i=1,\ldots,M}\mathbf{P}\left\{\left|\omega_N^{(i)}\right| \ge \tau\right\} \tag{2.6}$$

выполняется при любых зависимостях между случайными величинами $\omega_N^{(i)}$. Выберем $\tau_M(\theta)$ в виде

$$\tau_M(\theta) = \Phi_{0,1}^{-1}\left(1-\frac{\theta}{2\,M}\right). \tag{2.7}$$

Тогда из выражений (2.6), (2.7) и центральной предельной теоремы следует, что для любого $\theta > 0$ существует $\hat{N}(\theta,\, M) \in \mathbf{N}$ такое, что неравенство (2.5) выполняется для любого $N > \hat{N}(\theta,\, M)$.

3. Численные эксперименты

Численные эксперименты проводились для двух функциональных алгоритмов решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения: функционального алгоритма блуждания по сферам [20] и функционального алгоритма, основанного на случайных блужданиях по решетке [21].

3.1. Функциональный алгоритм блуждания по сферам

Рассмотрим бигармоническое уравнение, описывающее изгиб тонкой упругой пластины,

$$\Delta^2 u(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r} \in D \subset \mathbf{R}^2. \tag{3.1}$$

Здесь $u(\boldsymbol{r})$ — нормальный прогиб пластины в точке $\boldsymbol{r}$, $f(\boldsymbol{r})$ — интенсивность нормальной нагрузки. Край пластины свободно оперт

$$u\big|_\Gamma = 0, \quad \Delta u\big|_\Gamma = 0, \tag{3.2}$$

где Γ — граница области D. Предполагается, что область D ограничена в одном направлении, т. е. она может быть расположена между двумя параллельными прямыми. Требуется аппроксимировать решение задачи (3.1), (3.2) на некоторой ограниченной подобласти $\bar{D} \subset D$.

Функциональный алгоритм блуждания по сферам [20] для решения бигармонического уравнения (3.1) основан на использовании однородности граничных условий, фундаментального решения бигармонического уравнения и метода двойной рандомизации. Сначала по подходящей начальной плотности $\pi(\boldsymbol{r})$ (т. е. $\pi(\boldsymbol{r}) \neq 0$ для любой точки $\boldsymbol{r}$, для которой $f(\boldsymbol{r}) \neq 0$) выбирается точка $\boldsymbol{r}$, моделируется процесс блуждания по сферам $\{\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_{L_\varepsilon}\} \subset D$, стартующий из точки $\boldsymbol{r}$ и заканчивающийся при первом попадании в ε-окрестность границы Γ_ε, затем вычисляются стохастические оценки одновременно для всех узлов прямоугольной сетки $\{\boldsymbol{r}^{(i)}\}_{i=1}^M \subset \bar{D}$ по формуле

$$\zeta_\varepsilon^{(i)} = \frac{f(\boldsymbol{r})}{\pi(\boldsymbol{r})} \Big(V\big(\boldsymbol{r}^{(i)}, \boldsymbol{r}\big) - V\big(\boldsymbol{r}^{(i)}, \boldsymbol{r}^*\big) + Q\Delta V\big(\boldsymbol{r}^{(i)}, \boldsymbol{r}^*\big) \Big), \quad Q = \frac{1}{4} \sum_{l=0}^{L_\varepsilon} d^2(\boldsymbol{r}_l). \tag{3.3}$$

Здесь $V\big(\boldsymbol{r}^{(i)}, \boldsymbol{r}\big) = \frac{|\boldsymbol{r}^{(i)} - \boldsymbol{r}|^2}{8\pi} \ln |\boldsymbol{r}^{(i)} - \boldsymbol{r}|$ — фундаментальное решение бигармонического уравнения, $\boldsymbol{r}^*$ — точка границы Γ, ближайшая к $\boldsymbol{r}_{L_\varepsilon} \in \Gamma_\varepsilon$, $d(\boldsymbol{r})$ — расстояние от точки $\boldsymbol{r}$ до границы Γ. Реализуются N независимых траекторий процесса блуждания по сферам и подсчитываются эмпирические средние, которые и рассматриваются в качестве приближений величин $u\big(\boldsymbol{r}^{(i)}\big)$.

В этом алгоритме используются одни и те же траектории для оценки решения сразу во всех узлах сетки. Более того, он является аналогом "метода зависимых испытаний". В работе [10] для представленного алгоритма была построена верхняя граница погрешности в метрике пространства $\mathbf{C}$ по вероятности вида (1.3) и решена задача оптимизации (1.4). При этом для построения верхней границы максимума $\max_{i=1,\ldots,M} |\gamma^{(i)}|$ использовалась теория метода зависимых испытаний. Доказана следующая теорема о верхней границе погрешности рассматриваемого алгоритма в метрике пространства $\mathbf{C}$.

Теорема 1 [10]. *Пусть выполнены следующие условия:*

а) существует положительная константа C_1 *такая, что* $\int_D \frac{f^2(y)}{\pi(y)}\,dy < C_1$,

б) все узлы сетки $\boldsymbol{r}^{(i)}$ *лежат в* $\bar{D} \setminus \Gamma_\varepsilon$.

Тогда существуют положительные константы H_1, H_2 *и для любого* $\theta > 0$ *существует константа* $H_3(\theta) \geq 0$ *и натуральное* $\hat{N}(\theta)$ *такие, что для любого натурального* $N > \hat{N}(\theta)$ *выполняется неравенство*

$$\mathbf{P}\left\{\delta = \sup_{\boldsymbol{r}\in\bar{D}} \bigl|u(\boldsymbol{r}) - L_{(M)}\tilde{u}(\boldsymbol{r})\bigr| \leq \frac{H_1}{M} + H_2\,\varepsilon + \frac{H_3(\theta)}{\sqrt{N}}\right\} > 1 - \theta. \tag{3.4}$$

Функция трудоемкости алгоритма имеет вид

$$S(M, N, \varepsilon) = N\,(t_1\,\mathbf{E}L_\varepsilon + t_2\,M), \tag{3.5}$$

где L_ε — случайное число переходов в цепи “блуждания по сферам” до попадания в ε-окресность границы (известно, что $\mathbf{E}L_\varepsilon = |\ln\varepsilon|$), t_1 — среднее время моделирования одного перехода в цепи, t_2 — среднее время вычисления функций в одном узле.

При решении задачи оптимизации вида (1.4) в работе [10] получены следующие асимптотически оптимальные значения параметров при $\alpha \to 0$, где α — заданный уровень погрешности:

$$\varepsilon_{\rm opt} = \frac{\alpha}{2\,H_2|\ln\alpha|}\,, \qquad M_{\rm opt} = \frac{3\,H_1}{\alpha\Bigl(1 - \frac{1}{2|\ln\alpha|}\Bigr)}\,, \qquad N_{\rm opt} = \frac{9\,H_3^2}{4\alpha^2\Bigl(1 - \frac{1}{2|\ln\alpha|}\Bigr)^2}\,. \tag{3.6}$$

При этом асимптотически оптимальное значение трудоемкости $S_{\rm opt} = O\bigl(\alpha^{-3}\bigr)$. Значения констант H_1, H_2, H_3 оцениваются на основе предварительных вычислений. Константа H_1 отвечает за погрешность мультилинейной интерполяции, а константа H_2 связана с ε-смещением оценки. Их можно оценивать по формулам [10]:

$$H_1 = \frac{\operatorname{mes}\bar{D}}{8}\sum_{i=1}^{d}\sup_{\boldsymbol{r}\in\bar{D}}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial r_i^2}\right|, \qquad H_2 = \max\left(\sup_{\boldsymbol{r}\in\bar{D}}\left|\frac{\partial u}{\partial r_1}\right|, \sup_{\boldsymbol{r}\in\bar{D}}\left|\frac{\partial u}{\partial r_2}\right|\right).$$

Константа H_3 вычисляется через приближенную оценку максимума гаусовского поля в узлах некоторой сетки (см. (2.2)).

При использовании универсального подхода к построению верхней границы максимума $\max_{i=1,\dots,M}|\gamma^{(i)}|$ вместо (3.4) получится следующая верхняя граница погрешности:

$$\mathbf{P}\left\{\delta \leq \frac{H_1}{M} + H_2\,\varepsilon + \sqrt{\frac{H_V}{N}}\,\tau_M(\theta)\right\} > 1 - \theta, \tag{3.7}$$

где $\tau_M(\theta)$ определяется выражением (2.7). При этом условно-оптимальные значения параметров получаются следующими:

$$M_{\rm opt} = \frac{(3 + 2\nu)\,H_1}{(1 + 2\nu)\alpha\left(1 - \frac{1}{2|\ln\alpha|}\right)}, \qquad N_{\rm opt} = \frac{(3 + 2\nu)^2\,H_V\mu^2 M_{\rm opt}^{2\nu}}{4\alpha^2\left(1 - \frac{1}{2|\ln\alpha|}\right)^2}. \tag{3.8}$$

Для определения μ и ν предлагается использовать следующий алгоритм [12]. Вычисляется начальное значение $M_{\rm opt}^0$ при $\nu = 0$. В некоторой окрестности $M_{\rm opt}^0$ строится аппроксимация функции $\tau_M(\theta)$ степенной функцией μM^ν, вычисляются значения μ_1 и ν_1 и $M^1_{\rm opt}$ при $\nu = \nu_1$. Если $M^1_{\rm opt}$ сильно отличается от $M^0_{\rm opt}$, то строится аппроксимация $\tau_M(\theta)$ в окрестности $M^1_{\rm opt}$, вычисляются новые значения μ_2 и ν_2 и так далее, иначе принимаются очередные μ_i и ν_i для вычисления оптимальных параметров.

Сравнивая верхние границы погрешности, построенные с использованием теории метода зависимых испытаний (3.4) и на основе универсального подхода (3.7), можно заметить, что верхняя граница для стохастической компоненты погрешности в первом случае не зависит от M. Таким образом, есть основания полагать, что при достаточно больших M она будет точнее второй, а следовательно, и условно-оптимальные значения параметров будут более эффективны.

Численные эксперименты проводились для задачи о прогибе тонкой упругой прямоугольной пластины с известным решением [22]:

$$\Delta^2 u(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r}), \quad u\big|_\Gamma = 0, \quad \Delta u\big|_\Gamma = 0,$$

где $\boldsymbol{r} \in D = [0,a]\times[0,b]$, $f(\boldsymbol{r}) = C_0 \sin\left(\frac{\pi r_1}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi r_2}{b}\right)$. Решением задачи является функция

$$u(\boldsymbol{r}) = C_0 \frac{a^4 b^4}{\pi^4 (a^2+b^2)^2} \sin\left(\frac{\pi r_1}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi r_2}{b}\right).$$

Здесь предполагается, что $\bar{D} = D$. Вычисления проводились для $C_0 = 1$, $a = 1$, $b = 1$. Случайная точка r, в которой стартуют траектории, выбиралась равномерно в D.

Для задачи были оценены необходимые константы, условно-оптимальные значения параметров $N_{\rm opt}$, $M_{\rm opt}$, $\varepsilon_{\rm opt}$ определялись по формулам (3.6). Результаты вычислений для различных уровней погрешности α приведены в табл. 1.

Величина σ оценивалась как $\max_{i=1,\dots,M} \sqrt{\mathbf{V}\zeta^{(i)}/N}$, где $\mathbf{V}\zeta^{(i)}$ — выборочная дисперсия. Символами $\delta_{\rm int}$, $\delta_{\rm st}$, δ обозначены погрешность интерполяции, статистическая и полная погрешности соответственно. Статистическая погрешность $\delta_{\rm st}$ оценивалась как максимум (по всем узлам сетки) модуля разности между полученным и точным значением решения в узле. Заметим, что при таком способе оценивания $\delta_{\rm st}$ включает в себя и смещение алгоритма. Погрешность интерполяции $\delta_{\rm int}$ оценивалась следующим образом: разыгрывалось 10^6 случайных точек в D, в этих точках вычислялось точное решение и интерполяция по точным значениям решения в узлах, а в качестве оценки $\delta_{\rm int}$ брался максимум по всем случайным точкам модуля разности между этими значениями. Полная погрешность δ вычислялась как сумма статистической погрешности $\delta_{\rm st}$ и погрешности интерполяции $\delta_{\rm int}$. Величина t — время вычисления в секундах, необходимое для вычисления приближенных значений решения в узлах сетки.

Результаты для функционального алгоритма блуждания по сферам, приведенные в табл. 1, показывают, что полная погрешность не превышает заданного уровня α.

Таблица 1. Блуждание по сферам. Тестирование условно-оптимальных параметров

$\alpha\cdot10^5$	$\sqrt{M_{\rm opt}}$	$N_{\rm opt}$	$\varepsilon_{\rm opt}\cdot10^7$	$\sigma\cdot10^5$	$\delta_{\rm st}\cdot10^5$	$\delta_{\rm int}\cdot10^5$	$\delta\cdot10^5$	t
5	19	159 720	2.52	1.25	2.57	1.57	4.14	15.92
2.5	27	634 461	1.18	0.66	1.49	0.80	2.29	120.19
1.25	38	2 522 482	0.55	0.34	0.79	0.42	1.21	922.31

В табл. 2 представлены результаты численных экспериментов для той же задачи, но с различными неоптимальными соотношениями между параметрами M и N. Учитывая, что основной вклад в трудоемкость дает слагаемое t_2NM (см. формулу (3.5)), параметры M и N варьировались при условии, что $NM = \mathrm{const}$. В этом случае трудоемкость будет мало меняться. Результаты показывают, что представленная процедура оптимизации действительно эффективна, потому что условно-оптимальный выбор параметров дает меньшую полную погрешность δ, чем неоптимальный, при сравнимой трудоемкости t.

Таблица 2. Блуждание по сферам. Неоптимальные параметры

$\alpha \cdot 10^5$	M	N	ε	$\sigma \cdot 10^5$	$\delta_{\mathrm{st}} \cdot 10^5$	$\delta_{\mathrm{int}} \cdot 10^5$	$\delta \cdot 10^5$	t
1.25	$M_{\mathrm{opt}}/4$	$4N_{\mathrm{opt}}$	$\varepsilon_{\mathrm{opt}}$	0.16	0.31	1.57	1.88	1008
1.25	$M_{\mathrm{opt}}/2$	$2N_{\mathrm{opt}}$	$\varepsilon_{\mathrm{opt}}$	0.23	0.51	0.80	1.31	960
1.25	M_{opt}	N_{opt}	$\varepsilon_{\mathrm{opt}}$	0.34	0.79	0.42	1.21	922
1.25	$2M_{\mathrm{opt}}$	$N_{\mathrm{opt}}/2$	$\varepsilon_{\mathrm{opt}}$	0.49	0.82	0.18	1.00	1057
1.25	$4M_{\mathrm{opt}}$	$N_{\mathrm{opt}}/4$	$\varepsilon_{\mathrm{opt}}$	0.71	1.27	0.11	2.38	1082

Результаты тестирования условно-оптимальных параметров, полученных на основе универсального подхода (3.8), приведены в табл. 3. Сравнение табл. 1 и табл. 3 подтверждает теоретические выводы, что условно-оптимальные значения параметров универсального подхода менее эффективны (в смысле достижения заданного уровня погрешности за меньшее время).

Таблица 3. Блуждание по сферам. Универсальный подход

$\alpha \cdot 10^5$	$\sqrt{M_{\mathrm{opt}}}$	N_{opt}	$\varepsilon_{\mathrm{opt}} \cdot 10^7$	$\sigma \cdot 10^5$	$\delta_{\mathrm{st}} \cdot 10^5$	$\delta_{\mathrm{int}} \cdot 10^5$	$\delta \cdot 10^5$	t
5	18	426 850	2.52	0.76	1.64	1.75	3.39	38
2.5	26	1 851 481	1.18	0.38	0.87	0.87	1.74	326
1.25	37	8 033 779	0.55	0.19	0.37	0.44	0.81	2787

3.2. Функциональный алгоритм блуждания по решетке

Функциональный алгоритм решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения, основанный на случайных блужданиях по решетке, построен в работе [21] для более общего вида задачи

$$\begin{cases} (\Delta + c)(\Delta + b)u = -g, \\ \Delta u + bu\big|_\Gamma = \varphi, \quad u\big|_\Gamma = \psi, \end{cases} \tag{3.9}$$

в области $D \subset \mathbf{R}^d$ с границей Γ, где $c, b \le 0$ — постоянные или переменные параметры. Предполагается, что выполнены все условия регулярности функций c, b, g, φ, ψ и границы Γ, обеспечивающие существование и единственность решения данной задачи.

В области D строится равномерная прямоугольная сетка с шагом h: $\{\boldsymbol{r}^{(i)}\}_{i=1}^{M} \subset \bar{D} = D \cup \Gamma$. Для простоты предполагается, что все граничные узлы сетки лежат на границе Γ. В качестве приближения к решению задачи (3.9) в узлах сетки рассматривается решение разностной задачи

$$\begin{cases} \Delta_h u^h + b^h u^h = v^h & \text{в} \quad D_h, \\ u^h = \psi^h & \text{на} \quad \Gamma_h, \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta_h v^h + c^h v^h = -g^h & \text{в} \quad D_h, \\ v^h = \varphi^h & \text{на} \quad \Gamma_h, \end{cases} \tag{3.10}$$

где Δ_h — стандартный разностный аналог оператора Лапласа; D_h, Γ_h — множества внутренних и граничных узлов сетки соответственно; u^h, v^h — сеточные функции определенные на $D_h \cup \Gamma_h$; g^h, b^h, c^h, φ^h, ψ^h — значения функций g, b, c, φ, ψ в узлах сетки. Все эти функции рассматриваются как функции номера узла. Итак, имеем приближение $u\big(\boldsymbol{r}^{(i)}\big) \approx u^h(i)$. Разностная задача (3.10) переписывается в виде [21]:

$$v^h(i) = q_i \sum_{j=1}^{M} p_{ij} v^h(j) + f(i), \qquad u^h(i) = s_i \sum_{j=1}^{M} p_{ij} u^h(j) + \tilde{f}(i), \tag{3.11}$$

где i, j — номера узлов сетки. Здесь $p_{ij} = 1/2d$, если i — внутренний узел, а j — соседний с ним; $p_{ii} = 1$ для граничных узлов; $p_{ij} = 0$ в остальных случаях;

$$q_i = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{c^h(i)h^2}{2d}\right)^{-1}, & \boldsymbol{r}^{(i)} \in D_h, \\ 0, & \boldsymbol{r}^{(i)} \in \Gamma_h; \end{cases} \qquad s_i = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{b^h(i)h^2}{2d}\right)^{-1}, & \boldsymbol{r}^{(i)} \in D_h, \\ 0, & \boldsymbol{r}^{(i)} \in \Gamma_h; \end{cases}$$

$$f(i) = \begin{cases} \dfrac{h^2}{2d} q_i g^h(i), & \boldsymbol{r}^{(i)} \in D_h, \\ \varphi^h(i), & \boldsymbol{r}^{(i)} \in \Gamma_h; \end{cases} \qquad \tilde{f}(i) = \begin{cases} -\dfrac{h^2}{2d} s_i v^h(i), & \boldsymbol{r}^{(i)} \in D_h, \\ \psi^h(i), & \boldsymbol{r}^{(i)} \in \Gamma_h. \end{cases}$$

Для решения системы (3.11) в некотором узле i применяется метод статистического моделирования. Пусть $k_0 = i, k_1, \ldots, k_L$ — номера узлов случайной траектории цепи Маркова с начальным распределением δ_i и вероятностями перехода p_{ij}, а L — случайный номер первого попадания на границу Γ_h. Тогда для решения разностной задачи (3.10) справедливо вероятностное представление [21]:

$$u^h(i) = \mathbf{E}\xi(i), \quad \xi(i) = -\frac{h^2}{2d} \sum_{l=0}^{L} f(k_l) \sum_{j=0}^{l} \left(\prod_{r=0}^{j} s_{k_r}\right) \left(\prod_{r=j}^{l-1} q_{k_r}\right) + \left(\prod_{r=0}^{L-1} s_{k_r}\right) \psi^h(k_L), \tag{3.12}$$

где $\prod_{r=l}^{l-1} = \begin{cases} 1, & l < L, \\ 0, & l = L. \end{cases}$

Известно [23], что среднее число посещений узлов будет постоянной величиной, не зависящей от номера узла, если начальное состояние выбирать равновероятно по границе сеточной области. Поэтому для оценки решения $u^h(i)$ в разных узлах i можно использовать одни и те же траектории, считая, что траектория началась в узле i, если она попадет в него на каком-то этапе блуждания [21]. Итак, начальное состояние цепи Маркова выбирается равновероятно по границе, затем с вероятностью единица траектория попадает в ближайший внутренний узел, после чего двигается, согласно вероятностям перехода p_{ij}, до первого попадания на границу, а оценка решения имеет вид

$$u^h(i) = \mathbf{E}_i \xi^{(i)}, \quad \xi^{(i)} = -\frac{h^2}{2d} \sum_{l=m_i}^{L} f(k_l) \sum_{j=m_i}^{l} \left(\prod_{r=m_i}^{j} s_{k_r}\right) \left(\prod_{r=j}^{l-1} q_{k_r}\right) + \left(\prod_{r=m_i}^{L-1} s_{k_r}\right) \psi(k_L), \tag{3.13}$$

где $\mathbf{E}_i$ обозначает среднее по траекториям, прошедшим через узел i; m_i — момент первого в него попадания.

В работе [9] для рассматриваемого алгоритма была построена верхняя граница погрешности вида (1.3) и решена задача оптимизации (1.4). При этом было показано, что ковариации случайных величин $\left\{\omega_N^{(i)}\right\}$ при $N \to +\infty$ убывают с увеличением расстояния между узлами. На основе этого факта с помощью теории экстремумов нормальных последовательностей доказано, что распределение максимума $\max_{i=1,\ldots,M} \left|\gamma^{(i)}\right|$ совпадает с распределением максимума независимых стандартных нормальных случайных величин. Доказана следующая теорема о верхней границе погрешности алгоритма в метрике пространства $\mathbf{C}$.

Теорема 2 [9]. *Пусть $d \geq 3$ и выполнены все условия регулярности функций c, b, g, φ, ψ и границы Γ, обеспечивающие существование и единственность решения задачи (3.9), и, кроме того, $u \in \mathbf{C}^{(4)}(\bar{D})$. Тогда существуют положительные константы H_1, H_2 и для любого $\theta > 0$ существует константа $H_3(\theta) \geq 0$ и $\hat{M}(\theta) \in \mathbf{N}$ такие, что для любого натурального $M > \hat{M}(\theta)$ найдется $\hat{N}(\theta, M) \in \mathbf{N}$ такое, что для любого натурального $N > \hat{N}(\theta, M)$ выполнено соотношение*

$$\mathbf{P}\left\{\delta = \sup_{\boldsymbol{r}\in\bar{D}} \left|u(\boldsymbol{r}) - L_{(M)}\tilde{u}(\boldsymbol{r})\right| \leq \frac{H_1}{M^{\frac{2}{d}}} + \frac{H_2\, M^{\frac{d-1}{2d}}}{\sqrt{N}} \sqrt{2\ln M - \ln\ln M + H_3(\theta)}\right\} > 1-\theta. \quad (3.14)$$

Функция трудоемкости алгоритма имеет вид

$$S(M,N) = t_1\, M + t_2\, N\, \mathbf{E}L, \quad (3.15)$$

где t_1 — время вычисления функций g, c, b, ψ, φ в одном узле, t_2 — время моделирования одного перехода в цепи “блуждания по решетке”, а L — случайное число переходов в цепи до попадания на границу сеточной области. В [21] показано, что $\mathbf{E}L = O(M^{1/d})$.

При решении задачи оптимизации вида (1.4) в работе [9] получены следующие условно-оптимальные значения параметров:

$$M_{\mathrm{opt}} = \left(\frac{H_1\,(d(1+2\nu)+4)}{d(1+2\nu)}\right)^{\frac{d}{2}} \alpha^{-\frac{d}{2}}, \quad (3.16)$$

$$N_{\mathrm{opt}} = \left(\frac{H_2\, d(1+2\nu)}{4H_1}\right)^2 M_{\mathrm{opt}}^{1+\frac{3}{d}} \left(2\,\ln M_{\mathrm{opt}} - \ln\ln M_{\mathrm{opt}} + H_3\right). \quad (3.17)$$

Здесь α — заданный уровень погрешности. При этом оптимальное в смысле построенной верхней границы погрешности значение трудоемкости $S_{\mathrm{opt}} = O\left(\alpha^{-2-d/2}|\ln\alpha|\right)$. Для малого параметра ν имеем $\nu \leq \nu_0$, где $\nu_0 = 1/(2\ln 3 + H_3)$, поэтому можно полагать, что $\nu = \nu_0$. Заметим, что в расчетах, приведенных далее, $\nu \approx 0.1$. Значения констант H_1 и H_2 определяются на основе предварительных вычислений. Константа H_1, как и в предыдущем алгоритме, оценивается через разностную аппроксимацию вторых производных. Для оценки константы H_2 можно использовать формулу

$$H_2 = M^{-\frac{d-1}{2d}} \sqrt{\frac{\max\limits_{i=1,\ldots,M} \mathbf{V}\xi^{(i)}}{\min\limits_{i=1,\ldots,M} \rho_i^1}},$$

где ρ_i^1 — среднее число первых посещений узла i. Константа H_3 вычисляется по формуле

$$H_3 = -\ln\left(-\frac{\ln(1-\theta)}{2}\right) - \frac{\ln 4\pi}{2}.$$

При использовании универсального подхода к построению верхней границы максимума $\max_{i=1,\ldots,M}|\gamma^{(i)}|$ вместо (3.14) получится следующая верхняя граница погрешности:

$$\mathbf{P}\left\{\delta \leq \frac{H_1}{M^{\frac{2}{d}}} + \frac{H_2\, M^{\frac{d-1}{2d}}}{\sqrt{N}} \tau_M(\theta)\right\} > 1-\theta, \quad (3.18)$$

где $\tau_M(\theta)$ определяется выражением (2.7). При этом условно-оптимальное значение числа узлов M_{opt} совпадает с предыдущим (3.16), а условно-оптимальное значение числа траекторий получается следующим:

$$N_{\mathrm{opt}} = \left(\frac{H_2\, d(1+2\nu)}{4H_1}\right)^2 \mu^2\, M_{\mathrm{opt}}^{1+2\nu+\frac{3}{d}}. \tag{3.19}$$

Здесь величины μ и ν вычисляются так же, как и в предыдущем подпункте.

Численные эксперименты по тестированию условно-оптимальных значений параметров проводились на примере следующей задачи с известным решением ($d = 3$):

$$\begin{cases} (\Delta - 1)(\Delta - 1)u = 4e^{r_1}e^{r_2}e^{r_3}, \\ u\big|_{\Gamma} = e^{r_1}e^{r_2}e^{r_3}, \\ \Delta u - u\big|_{\Gamma} = 2e^{r_1}e^{r_2}e^{r_3}. \end{cases}$$

В качестве области D рассматривался единичный куб $[0,1]^3$. Решением задачи является функция $u^* = e^{r_1}e^{r_2}e^{r_3}$.

Таблица 4. Блуждание по решетке. Тестирование условно-оптимальных параметров

$\alpha \cdot 10^2$	$\sqrt[3]{M_{\mathrm{opt}}}$	N_{opt}	N_0	$\rho_1 \cdot 10^3$	$\sigma \cdot 10^2$	$\delta_{\mathrm{st}} \cdot 10^2$	$\delta_{\mathrm{int}} \cdot 10^2$	$\delta \cdot 10^2$	t
10	12	15 193 300	79 486	5.23	1.18	3.67	3.97	7.64	68
5	17	133 368 198	339 491	2.54	0.58	1.65	2.11	3.76	851
2.5	25	1 263 781 612	1 454 148	1.15	0.28	0.90	1.03	1.93	11 585

Для задачи были оценены необходимые константы, вычислены условно-оптимальные значения параметров. В табл. 4 приведены результаты расчетов при оптимальных значениях параметров в (3.16), (3.17) для различных значений заданного уровня погрешности α, а в табл. 5 — с использованием условно-оптимальных параметров, полученных с помощью универсального подхода (3.16), (3.19). Здесь N_0 — среднее (по узлам) число траекторий, прошедших через один узел, $\rho_1 = N_0/N_{\mathrm{opt}}$ — оценка среднего числа первых посещений. Остальные обозначения совпадают с обозначениями в табл. 1. В табл. 4 и табл. 5 полученная полная погрешность не превышает заданного уровня α. Отметим, что оба подхода дают близкие условно-оптимальные параметры.

Таблица 5. Блуждание по решетке. Универсальный подход

$\alpha \cdot 10^2$	$\sqrt[3]{M_{\mathrm{opt}}}$	N_{opt}	N_0	$\rho_1 \cdot 10^3$	$\sigma \cdot 10^2$	$\delta_{\mathrm{st}} \cdot 10^2$	$\delta_{\mathrm{int}} \cdot 10^2$	$\delta \cdot 10^2$	t
10	12	15 342 725	80 269	5.23	1.18	3.55	3.95	7.50	66
5	17	134 821 209	343 182	2.54	0.58	1.67	2.14	3.81	796
2.5	25	1 260 337 382	1 450 184	1.15	0.28	0.90	1.02	1.92	12486

Таблица 6. Блуждание по решетке. Неоптимальные параметры

$\alpha \cdot 10^2$	$\sqrt[3]{M}$	N	N_0	$\rho_1 \cdot 10^3$	$\sigma \cdot 10^2$	$\delta_{\mathrm{st}} \cdot 10^2$	$\delta_{\mathrm{int}} \cdot 10^2$	$\delta \cdot 10^2$	t
6	$4\sqrt[3]{M_{\mathrm{opt}}}$	$N_{\mathrm{opt}}/4$	3 407	0.17	5.94	19.93	0.17	20.10	636
6	$2\sqrt[3]{M_{\mathrm{opt}}}$	$N_{\mathrm{opt}}/2$	28 006	0.69	2.01	6.39	0.63	7.02	582
6	$\sqrt[3]{M_{\mathrm{opt}}} = 16$	N_{opt}	233 216	2.88	0.70	1.92	2.38	4.30	465
6	$\sqrt[3]{M_{\mathrm{opt}}}/2$	$2N_{\mathrm{opt}}$	1 967 280	12.17	0.23	0.79	7.91	8.70	499
6	$\sqrt[3]{M_{\mathrm{opt}}}/4$	$4N_{\mathrm{opt}}$	16 832 278	52.07	0.07	0.27	22.72	22.99	599

В табл. 6 представлены результаты численных экспериментов с различными неоптимальными соотношениями между параметрами M и N. Учитывая, что основной вклад в трудоемкость дает слагаемое $t_2 N M^{1/d}$ (см. формулу (3.15)), параметры M и N варьировались при условии, что $NM^{1/d} = \text{const}$. В этом случае трудоемкость будет мало меняться. Результаты показывают, что представленная процедура оптимизации обеспечивает меньшую полную погрешность δ при сравнимых временных затратах t.

4. Заключение

В представленной работе проведено сравнение различных подходов к выбору условно-оптимальных параметров функциональных алгоритмов статистического моделирования с гарантированной по вероятности погрешностью в метрике пространства непрерывных функций. Проведенный теоретический и численный анализ рассматриваемых подходов позволил сделать следующие выводы.

1. Рассмотренные подходы к выбору условно-оптимальных параметров обеспечивают получение решения с погрешностью, не превышающей заданной величины.
2. Теория, учитывающая информацию о степени зависимости оценок (независимые, слабозависимые и зависимые), позволяет строить более точную верхнюю границу для статистической компоненты, и следовательно, получать параметры алгоритма, обеспечивающие меньшую трудоемкость для заданной точности.
3. Универсальный подход не позволяет оценивать трудоемкость алгоритма по порядку величины α априори, что затрудняет теоретический анализ.
4. Универсальный подход позволяет выбирать условно-оптимальные параметры при отсутствии информации о степени зависимости используемых оценок, но численные расчеты показывают, что наиболее эффективен такой выбор параметров при оценках с незначительной степенью зависимости.

Отметим, что чем больше имеется информации о корреляциях оценок в узлах сетки, тем более точную верхнюю границу для статистической компоненты погрешности можно построить.

Литература

1. **Mikhailov G.A.** Minimization of Computational Costs of Non-analogue Monte Carlo Methods / Series of Soviet & East European Mathematics. Vol. 5. — Singapore: World Scientific, 1991.
2. **Михайлов Г.А., Плотников М.Ю.** Оценка “по пробегу” для решения линейного и нелинейного уравнения переноса излучения в целом // Докл. АН СССР. — 1994. — Т. 337, № 2. — С. 162–164. (Mikhajlov G.A., Plotnikov M.YU. Otsenka “po probegu” dlya resheniya linejnogo i nelinejnogo uravneniya perenosa izlucheniya v tselom // Dokl. AN SSSR. — 1994. — T. 337, № 2. — S. 162–164.)
3. **Plotnikov M.Yu.** Using the weighted Monte Carlo method for solving nonlinear integral equations // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 1994. — Vol. 9, № 2. — P. 121–147.
4. **Войтишек А.В., Пригарин С.М.** О функциональной сходимости оценок и моделей в методе Монте–Карло // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1992. — Т. 32, № 10. — С. 1641–1651. (Vojtishek A.V., Prigarin S.M. O funktsional’noj skhodimosti otsenok i modelej v metode Monte–Karlo // ZHurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1992. — T. 32, № 10. — S. 1641–1651.)
5. **Voytishek A.V.** On the errors of discretely stochastic procedures in estimating globally the solution of an integral equation of the second kind // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 1996. — Vol. 11, № 1. — P. 71–92.

6. **Shkarupa E.V., Voytishek A.V.** Optimization of discretely stochastic procedures for globally estimating the solution of an integral equation of the second kind // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 1997. — Vol. 12, № 6. — P. 525–546.
7. **Шкарупа Е.В.** Оценка погрешности и оптимизация метода полигона частот для глобального решения интегрального уравнения второго рода // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1998. — Т. 38, № 4. — С. 612–627. (SHkarupa E.V. Otsenka pogreshnosti i optimizatsiya metoda poligona chastot dlya global'nogo resheniya integral'nogo uravneniya vtorogo roda // ZHurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1998. — T. 38, № 4. — S. 612–627.)
8. **Шкарупа Е.В.** Оценка погрешности и оптимизация функциональных алгоритмов блуждания по решетке решения задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца // Сиб. мат. журнал. — 2003. — Т. 44, № 5. — С. 1163–1182. (SHkarupa E.V. Otsenka pogreshnosti i optimizatsiya funktsional'nykh algoritmov bluzhdaniya po reshetke resheniya zadachi Dirikhle dlya uravneniya Gel'mgol'tsa // Sib. mat. zhurnal. — 2003. — T. 44, № 5. — S. 1163–1182.)
9. **Шкарупа Е.В.** Функциональный алгоритм блуждания по решетке для бигармонического уравнения. Оценка погрешности и оптимизация // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2005. — Т. 8, № 2. — С. 163–176. (SHkarupa E.V. Funktsional'nyj algoritm bluzhdaniya po reshetke dlya bigarmonicheskogo uravneniya. Otsenka pogreshnosti i optimizatsiya // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2005. — T. 8, № 2. — S. 163–176.)
10. **Sabelfeld K.K., Shkarupa E.V.** Functional random walk on spheres algorithm for biharmonic equation: optimization and error estimation // Monte Carlo Methods and Applications. — 2003. — Vol. 9, № 1. — P. 51–65.
11. **Войтишек А.В.** О допустимом классе восполнений для дискретно-стохастических процедур глобальной оценки функций // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 1998. — Т. 1, № 2. — С. 119–134. (Vojtishek A.V. O dopustimom klasse vospolnenij dlya diskretno-stokhasticheskikh protsedur global'noj otsenki funktsij // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 1998. — T. 1, № 2. — S. 119–134.)
12. **Милосердов В.В.** Дискретно-стохастические численные алгоритмы со сплайн-восполнениями. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.07. — Новосибирск, 2006. (Miloserdov V.V. Diskretno-stokhasticheskie chislennye algoritmy so splajn-vospolneniyami. Diss. ... kand. fiz.-mat. nauk: 01.01.07. — Novosibirsk, 2006.)
13. **Милосердов В.В.** Условная оптимизация дискретно-стохастических численных процедур в случае применения кубических сплайнов // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2006. — Т. 9, № 2. — С. 147–163. (Miloserdov V.V. Uslovnaya optimizatsiya diskretno-stokhasticheskikh chislennykh protsedur v sluchae primeneniya kubicheskikh splajnov // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2006. — T. 9, № 2. — S. 147–163.)
14. **Plotnikov M.Yu., Shkarupa E.V.** Estimation of the statistical error and the choice of parameters in the method of test particles // Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 2012. — Vol. 27, № 2. — P. 155–174.
15. **Plotnikov M.Yu., Shkarupa E.V.** Selection of sampling numerical parameters for the DSMC method // Computers & Fluids. — 2012. — Vol. 58. — P. 102–111.
16. **Фролов А.С., Ченцов Н.Н.** О вычислении методом Монте-Карло определенных интегралов, зависящих от параметра // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1962. — Т. 2, № 4. — С. 714–717. (Frolov A.S., CHentsov N.N. O vychislenii metodom Monte-Karlo opredelennykh integralov, zavisyashchikh ot parametra // ZHurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1962. — T. 2, № 4. — S. 714–717.)
17. **Пригарин С.М.** Некоторые приложения теоремы Джейна–Маркуса в статистическом моделировании // Теория и приложения статистического моделирования. — Новосибирск: ВЦ СО АН, 1990. — С. 22–28. (Prigarin S.M. Nekotorye prilozheniya teoremy Dzhejna–Markusa

v statisticheskom modelirovanii // Teoriya i prilozheniya statisticheskogo modelirovaniya. — Novosibirsk: VTS SO AN, 1990. — S. 22–28.)

18. **Пригарин С.М.** О сходимости и оптимизации функциональных оценок метода Монте-Карло в пространствах Соболева // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 1999. — Т. 2, № 1. — С. 57–67. (Prigarin S.M. O skhodimosti i optimizatsii funktsional'nykh otsenok metoda Monte-Karlo v prostranstvakh Soboleva // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 1999. — T. 2, № 1. — S. 57–67.)
19. **Литбеттер М., Ротсен Х., Линдгрен Г.** Экстремумы случайных последовательностей и процессов. — М.: Мир, 1989. (Litbetter M., Rotsen KH., Lindgren G. Ekstremumy sluchajnykh posledovatel'nostej i protsessov. — M.: Mir, 1989.)
20. **Сабельфельд К.К.** Методы Монте-Карло в краевых задачах. — М.: Наука, 1989. (Sabel'fel'd K.K. Metody Monte-Karlo v kraevykh zadachakh. — M.: Nauka, 1989.)
21. **Михайлов Г.А., Лукинов В.Л.** Решение многомерного разностного бигармонического уравнения методом Монте-Карло // Сиб. мат. журнал. — 2001. — Т. 42, № 5. — С. 1125–1135. (Mikhajlov G.A., Lukinov V.L. Reshenie mnogomernogo raznostnogo bigarmonicheskogo uravneniya metodom Monte-Karlo // Sib. mat. zhurnal. — 2001. — T. 42, № 5. — S. 1125–1135.)
22. **Timoshenko S.P., Voinovsky-Krieger S.** Theory of Plates and Shells. — New York: McGRAW-HILL Book Company, 1959.
23. **Михайлов Г.А., Чешкова А.Ф.** Решение разностной задачи Дирихле для многомерного уравнения Гельмгольца методом Монте-Карло // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1996. — Т. 38, № 1. — С. 99–106. (Mikhajlov G.A., CHeshkova A.F. Reshenie raznostnoj zadachi Dirikhle dlya mnogomernogo uravneniya Gel'mgol'tsa metodom Monte-Karlo // ZHurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1996. — T. 38, № 1. — S. 99–106.)

Поступила в редакцию 4 марта 2014 г.,
в окончательном варианте 25 июля 2014 г.