

Сравнивая (4) и (6), находим

$$\Delta_0^2 = \left( -\frac{dT}{dx} \right)_{\text{ст}} \frac{r_0}{T_s - T_0},$$

т. е. параметр, учитывающий условия теплоотвода, является функцией стационарного градиента и радиуса и, следовательно, возможность зажигания поджигаемой среды определяется ее теплофизическими свойствами и не зависит от термокинетических параметров.

При  $Bi \rightarrow 0$  из (4) получаем явное выражение для времени задержки зажигания

$$\tau = \frac{\lambda E (T_s - T_0)^2}{2\pi a R T_s^2 Q k_0} \exp\left(\frac{E}{RT_s}\right),$$

которое совпадает с приводимым в [3] для этого случая.

Таким образом, на основе нестационарного рассмотрения задачи о зажигании в условиях теплоотвода получены критические условия зажигания и зависимости для времен задержки зажигания. Результаты согласуются с данными, полученными в рамках стационарной тепловой теории.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Барзыкин В. В., Худяев С. И. Докл. АН СССР, 1966, 169, 6, 1366.
2. Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике.— М.: Изд-во АН СССР, 1947.
3. Вилюнов В. Н. Теория зажигания конденсированных веществ.— Новосибирск: Наука, 1984.
4. Аверсон А. Э. Тепломассообмен в процессах горения.— Черногловка, 1980, 16.
5. Зельдович Я. Б. Докл. АН СССР, 1963, 150, 2, 283.
6. Лыков А. В. Теория теплопроводности.— М.: ГИТТЛ, 1952.
7. Воробьев Н. Н. Теория рядов.— М.: Наука, 1979.

г. Москва

Поступила в редакцию 15/VI 1988

УДК 542.57

С. О. Гладков, А. М. Токарев

#### К ТЕОРИИ ИМПУЛЬСНОГО ТЕПЛОВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ТВЕРДОЕ ГОРЮЧЕЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Изучение влияния тепловой нагрузки и различного рода излучений на многослойные цилиндрические и другие типы поверхностей позволяет провести оценку времени установления теплового равновесия в веществах для определенных режимов нагрева (см., например, [1—8]). Основная задача, с которой при этом приходится сталкиваться, заключается в решении уравнения теплопроводности с заданными граничными и начальными условиями. Как известно [9], зависимость температуры от координат находится с помощью метода разделения переменных. Весьма громоздкое решение в этом случае записывается в виде ряда по всем суперпозициям тепловых волн в веществе.

Задача, которая решается в настоящей работе, не относится к вопросу о распределении тепла в образце за счет теплопроводности. С физической точки зрения интерес представляет нестационарный и неоднородный процесс горения топлива при тепловом одномерном облучении цилиндрической оболочки массивного тела (рис. 1). При этом возникает вполне резонный вопрос: каким способом можно описать распространение контура горения (на рис. 1,  $a$  — контур  $C_2$ ) как функцию времени

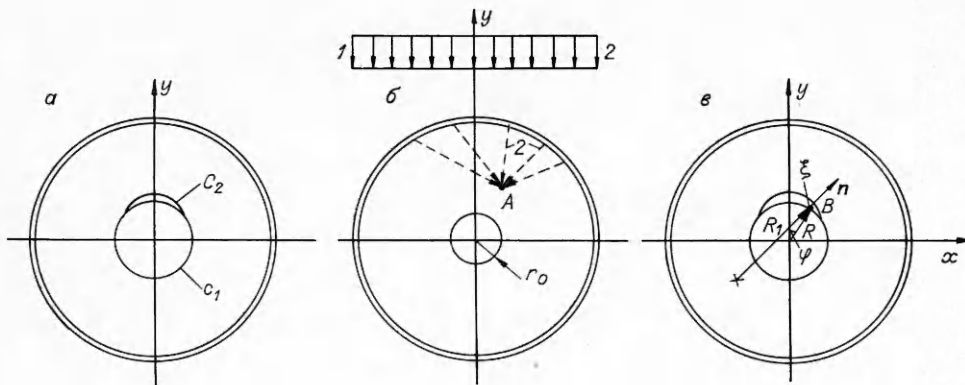


Рис. 1. К постановке задачи.

а)  $C_1$  — контур равномерного горения,  $C_2$  — опережение контура горения за счет перегрева; б) 1 — тепловая нагрузка, 2 — поток тепла в произвольно выделенную точку  $A$ ;  $r_0$  — начальный радиус горения; в)  $R_1$  — радиус кривизны в произвольной точке  $B$ ,  $R = u_0 t$ ,  $n$  — нормаль к распространению фронта горения,  $\xi = \xi(\varphi, t)$ ,  $r = R + \xi(\varphi, t)$ .

и координат? Для адекватного ответа на поставленную проблему необходимо ввести в рассмотрение некоторую функцию опережения контура  $C_2$  относительно равномерно горящего слоя  $C_1$ , которую обозначим через  $\xi(\varphi, t)$ . Ясно, что в силу симметрии задачи функция  $\xi$  будет зависеть только от координаты  $\varphi$ . Искажение фронта горения, обязанное внешнему тепловому облучению, определяем на основе следующих предположений.

1. Длина тепловой волны значительно меньше  $\xi$ . Это позволяет считать, что процесс теплопроводности происходит значительно медленнее, чем процесс горения.

2. Состав топлива произвольный, но плотно упакованный, что подразумевает не скачкообразное, а плавное изменение функции  $\xi$ . Если же имеются некоторые скачки при горении, то они должны быть малы по сравнению с  $\xi$ . Иными словами, по этим «шероховатостям» необходимо усреднить величину смещения.

3. Некорректность введения поверхностного натяжения топлива перед фронтом горения (см. ниже) — прием чисто математический, позволяющий корректно описать и вывести уравнение на зависимость  $\xi$  от координаты и времени. Физическое толкование, которое приведено далее, не идет вразрез с общепринятыми постулатами.

4. Импульсный режим воздействия на топливо подразумевает, что время этого воздействия  $\tau_{\text{обл}}$  мало по сравнению с процессом установления температуры по объему образца за счет теплопроводности. Иначе говоря, должно соблюдаться необходимое для этого условие:  $t_{\text{тепл}} \gg \tau_{\text{обл}}$ , где  $t_{\text{тепл}} \sim L^2/\chi_T$ ;  $\chi_T$  — температуропроводность топлива,  $L$  — его характерный размер.

В общем случае произвольного смещения фронта горения относительно некоторого среднего контура, уравнение для  $\xi(\varphi, t)$  (где  $t$  — время,  $\varphi$  — угловая переменная) имеет очень сложный, громоздкий и нелинейный вид. Это, естественно, делает невозможным его интегрирование в аналитической форме.

В условиях неравномерного прогрева горящего фронт пламени в более нагретом объеме идет с небольшим опережением среднего контура (см. рис. 1). Последнее позволяет считать, что  $\xi \ll u_0 t = R_0$  ( $u_0$  — постоянная скорость перемещения фронта горения). Именно это условие допускает линеаризацию по функции  $\xi$  и дает возможность получить линейное и, как следствие этого, более простое дифференциальное уравнение.

Физически очевидно, что наибольшая скорость горения достигается в областях с повышенной температурой среды перед фронтом. Действительно,

пусть тепловой поток  $\mathbf{q} = -\kappa \nabla T \approx -\kappa \frac{(T_2 - T_1)}{\delta} \mathbf{n}$ , где  $\kappa$  — тепло-

проводность вещества;  $T_1$  — его температура;  $T_2$  — температура в переходном слое;  $\delta$  — ширина этого слоя. Как видно из выражения для  $q$ , в область с возросшей  $T_1$  увеличивается тепловой поток по нормали к фронту горения. Это означает, что скорость распространения фронта в таких областях возрастает. Установленный эмпирическим путем закон возрастания скорости горения имеет вид [10]

$$u = u_0(1 + \beta T_0), \quad (1)$$

где численный коэффициент  $\beta = 10^{-3} \div 10^{-2}$  1/К.

Более подробно остановимся на исследуемой задаче. Пусть на оболочку с заключенным в ней горючим в течение некоторого короткого времени  $\tau_{изл}$  действует одномерный тепловой поток  $q = q_0$  (см. рис. 1, б). После прекращения действия излучения прогретый поверхностный слой оболочки становится источником теплового излучения наружу и теплопередачи за счет теплопроводности внутрь цилиндра. Согласно закону Фурье, тепловой поток, направленный внутрь, начнет постепенно нагревать горючее и распространяться вглубь. В условиях поставленной задачи попробуем ответить на вопрос, как этот внешний тепловой поток может повлиять на скорость выгорания горючего. Данную задачу решаем в два этапа. Первый заключается в определении с помощью функции Лагранжа уравнения на функцию  $\xi(\varphi, t)$  относительно среднего контура  $R = u_0 t$ , а второй сводится к нахождению времени выгорания вещества.

Итак, рассмотрим произвольный контур выгорания в фиксированный момент времени  $t$ . Скорость его движения в нормальном к нему направлении может быть определена, как производная по времени от радиуса кривизны  $R_1$  при заданном значении угла  $\varphi$  (рис. 1, в). С целью нахождения  $R_1$  необходимо предварительно ввести функцию  $\xi(\varphi, t)$  так, как это показано на рис. 1, в. Имеем

$$r = R + \xi(\varphi, t). \quad (2)$$

Согласно общим формулам дифференциальной геометрии (для примера см. [11]), в случае цилиндрической системы координат при фиксированном значении координаты  $z$  вдоль оси цилиндра находим

$$R_1 = R + \xi + \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2}. \quad (3)$$

Это означает, что искомая скорость опережения относительно равномерно горящего слоя

$$v = \frac{\partial}{\partial t} \left( \xi + \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} \right). \quad (4)$$

Следовательно, кинетическая энергия (которую нужно понимать, естественно, не в буквальном смысле) этого слоя толщиной  $\delta$  и плотностью  $\rho$

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{2} \delta L R \left( \xi + \frac{\partial^2 \xi}{\partial \varphi^2} \right)^2 d\varphi, \quad (5)$$

где  $L$  — длина цилиндра<sup>1</sup>.

Для определения потенциальной энергии слоя  $U$  сначала необходимо обосновать ее введение и физический смысл с помощью поверхностного натяжения. Само по себе понятие энергии поверхностного натяжения не вызывает возражений. Другое дело — имеет ли смысл введение этого понятия при рассмотрении поверхностного слоя  $k$ -фазы при горении. Для ответа на этот вопрос необходимо более подробно остановиться на физике явления.

<sup>1</sup> Введение функционала (5) является чисто искусственным приемом, который позволяет далее получить физически непротиворечивый результат. Это же касается и понятия поверхностного натяжения топлива, которое в области горения может быть сравнимо с жидкостью (см. ниже).

Физико-химические процессы при горении протекают при температуре порядка  $10^3$  К. При таких высоких температурах вероятность ионизации атомов поверхностного слоя очень высока и по порядку величины

соответствует  $e^{-\frac{\varepsilon_{\text{и}}}{T}}$ , где энергия ионизации  $\varepsilon_{\text{и}} = 10^3 \text{ К} = 0,1 \text{ эВ}$ . Последнее означает, что начинает срабатывать механизм эффективного разрыва межатомных связей в поверхностном горящем слое. Энергия обменной связи атомов друг с другом  $\varepsilon_0 \approx 10^3 \text{ К}$ . Сравнение этого значения с  $\varepsilon_{\text{и}}$  показывает, что они близки по величине. Следовательно, условная работа, совершаемая при своем продвижении фронтом горения, затрачивается на преодоление энергетического барьера, определяемого взаимодействием атомов в поверхностном слое, т. е. сил поверхностного натяжения. Последнее как раз и говорит о том, что если  $\alpha$  — поверхностная энергия слоя, то искомая потенциальная энергия

$$U = \int \alpha df = \int \alpha(\varphi) \left[ 1 + \frac{(\xi')^2 - \xi^2}{2R^2} \right] LR d\varphi. \quad (6)$$

Используя (5) и (6), находим функцию Лагранжа  $\mathcal{L} = T - U$  и далее определяем  $S = \int \mathcal{L} dt$ . Опуская слагаемое  $\alpha L$  в (6), имеем

$$S = \int \int \left[ \frac{\rho \delta LR}{2} (\dot{\xi} + \dot{\xi}'_\varphi)^2 - \alpha(\varphi) L \frac{(\xi')^2 - \xi^2}{2R} \right] d\varphi dt. \quad (7)$$

Варьирование действия  $S$  по переменной  $\xi$  позволяет получить следующее дифференциальное уравнение:

$$t \widehat{A}^2 (t \dot{\xi})' + \varepsilon_0 \left[ \xi + \frac{1}{\alpha} (\alpha \xi')' \right] = 0, \quad (8)$$

где оператор  $\widehat{A} = 1 + \partial^2 / \partial \varphi^2$ ;  $\xi' \equiv \frac{\partial \xi}{\partial \varphi}$ ;  $\dot{\xi} \equiv \frac{\partial \xi}{\partial t}$ ; а безразмерный параметр  $\varepsilon_0 = \alpha / \rho u_0^2 \delta$ .

Найдем решение (8) в случае  $\alpha(\varphi) = \text{const}$ . Полагая, что

$$\xi(\varphi, t) = \Phi(\varphi) V(t) = \sum_n \Phi_n(\varphi) V_n(t), \quad (9)$$

после разделения переменных получим

$$t^2 \ddot{V}_n + t \dot{V}_n + b_n \varepsilon_0 V_n = 0, \quad \Phi_n'' + (1 + b_n \widehat{A}^2) \Phi_n = 0 \quad (10)$$

( $b_n$  — параметр разделения переменных).

Решаем (10) при следующих граничных и начальных условиях:

$$\begin{aligned} \xi(\varphi, t) \Big|_{\varphi = \pm \frac{\pi}{2}} &= 0, \\ \xi(\varphi, t) \Big|_{t=t_0} &= 0, \\ \dot{\xi} \Big|_{t=t_0} &= \beta u_0 T(\varphi), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $t_0$  — начальный момент распространения фронта горения;  $t_0 = r_0 / u_0$ . С помощью первых двух условий, а также благодаря четности функции  $\xi(\varphi, t)$  по переменной  $\varphi$ , после несложных вычислений в результате решения уравнений (10) найдем

$$\begin{aligned} \xi(\varphi, t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{B_n}{t \sqrt{b_n \varepsilon_0}} + A_n t \sqrt{b_n \varepsilon_0} \right) \cos 2n\varphi \cos(1 + 2n)\varphi \approx \\ &\approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{8n(1+2n)}} \ln \frac{t}{t_0} \cos 2n\varphi \cos(1 + 2n)\varphi. \end{aligned} \quad (12)$$

Что касается неизвестной постоянной  $A_n$ , то в силу последнего условия на  $\xi$  (11) при заданном значении температуры  $T(\varphi)$  с внешней

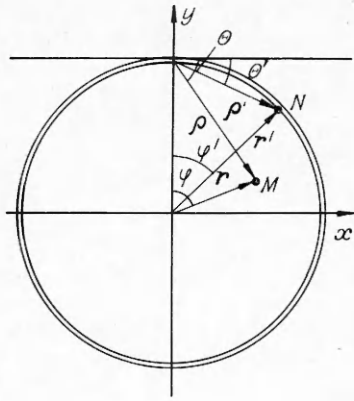


Рис. 2. Выбор системы координат для произвольно взятых точек заряда ( $N$  — на поверхности заряда,  $M$  — в объеме).

стороны контура горения можно определить и ее. В общем случае без знания зависимости  $T(\varphi)$  этого сделать, естественно, невозможно. Чтобы найти  $T(\varphi)$ , необходимо обратиться к началу работы и вычислить распределение температуры из решения конкретной задачи теплопроводности. Следует особо подчеркнуть, что в выражении (12) отсутствует слагаемое, соответствующее  $n = 0$  (на что указывает штрих у знака  $\Sigma$ ).

Выше упоминалось, что при получении решения уравнения теплопроводности в ограниченном объеме необходимо учитывать вклад всех тепловых волн, которые там существуют. Упростим подход и будем считать, что длина тепловой волны  $d$  значительно меньше диаметра исходного цилиндра, т. е.

$$d \ll 2R_0. \quad (13)$$

Тогда распределение температуры при одномерном импульсном облучении (см. рис. 1, б) может быть представлено в соответствии с формулой [12, 13]

$$T(\rho, \theta, t) = T_0 + T^* \left(\frac{t^*}{t}\right)^{3/2} \int_0^\pi d\theta' / \rho \sin \theta - 2R_0 \sin^2 \theta' \left| \frac{e^{-y^2/4\chi t}}{y} \right|, \quad (14)$$

где  $T^*$  — некоторая эффективная температура, соответствующая температуре нагрева внешней оболочки;  $\chi$  — температуропроводность;  $t^*$  — известная константа, полученная из решения уравнения теплопроводности и имеющая размерность времени (для дальнейшего ее конкретное выражение несущественно и поэтому не приводится);

$$y = \sqrt{\rho^2 + 4R_0^2 \sin^2 \theta' - 4\rho R_0 \sin \theta' \cos(\theta - \theta')}.$$

Фигурирующие в этом соотношении координаты показаны на рис. 2. Как следует из (14), наибольший вклад в интеграл дают малые угловые координаты. Причем максимум подынтегральной функции имеет место при

$$\sin \theta' \cong \theta' = \rho/2R_0 \cdot \cos \theta \quad (\rho/2R_0 < 1). \quad (15)$$

Данное приближение позволяет проинтегрировать соотношение (14) по  $\theta'$ , что в результате приводит к следующей компактной зависимости:

$$T(\rho, \theta, t) = T_0 + T^* \left(\frac{t^*}{t}\right)^{3/2} e^{-\frac{\rho^2(1+\cos^2 \theta)}{4\chi t}}. \quad (16)$$

Переход к исходным координатам  $r, \varphi$  не составляет труда, если учесть, что в старых координатах  $x = r \sin \varphi$ ,  $y = r \cos \varphi$ , а в новых  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = R_0 - \rho \sin \theta$ . Тогда имеем

$$T(r, \varphi, t) = T_0 + T^* \left(\frac{t^*}{t}\right)^{3/2} e^{-\frac{R_0^2 + r^2(1+\sin^2 \theta) - 2R_0 r \cos \varphi}{4\chi t}}. \quad (17)$$

В силу медленности распространения тепла по веществу по сравнению с процессом горения топлива ( $u_0 \gg u_{\text{тепл}}$ ) можно считать, что тепловой фронт перед контуром горения стационарен, и использовать решение (17) при значении  $t$ , совпадающем со временем выгорания, т. е. когда  $r = u_0 t$ .

Отметим (хотя это и не будет использовано в дальнейшем), что, согласно (17), наибольшей температуры перед контуром горения дости-

гает область топлива, где экспонента имеет максимальное значение. Эта область соответствует

$$r = R_0 \cos \varphi / (1 + \sin^2 \varphi).$$

Благодаря последнему условию (11), можно с помощью (17) определить коэффициенты  $A_n$ . Обозначив  $T_1 = T^* \left(\frac{t^*}{t}\right)^{3/2}$ , имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{8n(1+2n)}} \cos 2n \varphi \cos [(1+2n)\varphi] = \\ = r_0 \beta \left\{ T_0 + T_1 \exp \left[ -\frac{(R_0^2 + u_0^2 t_0^2 (1 + \sin^2 \varphi) - 2R_0 t_0 u_0 \cos \varphi)}{4\chi t_0} \right] \right\}. \quad (18)$$

В правой части (18) практически всегда член, пропорциональный экспоненциальному множителю, значительно меньше  $T_0$ , поэтому им можно пренебречь. Тогда, если воспользоваться ортогональностью тригонометрических функций, после умножения (18) на  $\cos(2m+1)\varphi$  и интегрирования обеих его частей по  $\varphi$  в пределах от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$ , получим

$$A_n = r_0 \frac{8T_0 \beta \sqrt{8n(1+2n)}}{\pi \sqrt{\varepsilon_0} (1+4n)}. \quad (19)$$

И окончательно, для смещения контура горения в результате перегрева, возникающего благодаря процессу теплопроводности, имеем

$$\xi(\varphi, t) = r_0 \frac{16\beta T_0}{\pi \sqrt{\varepsilon_0}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2n(2n-1)}}{4n-1} \frac{\sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{8n(2n-1)}} \ln \frac{t}{t_0} \cos 2n\varphi \cos [(2n-1)\varphi]. \quad (20)$$

Как следует из (20), представленный ряд сходится равномерно (правда не очень быстро) на отрезке  $-\pi/2 \div \pi/2$ . В случае  $\varepsilon_0 \ll 1$  из (20) получим

$$\xi(\varphi, t) = r_0 \frac{8\beta T_0}{\pi} \ln \frac{t}{t_0} \psi(\varphi), \quad (21)$$

где функция  $\psi(\varphi)$  дается рядом

$$\psi(\varphi) = \sum_n \frac{\cos 2n\varphi \cos [(2n-1)\varphi]}{4n-1} = \cos \varphi \left( \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} \right) - \\ - 2\varphi \sin \varphi + \left( \varphi^2 + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \cos \varphi, \quad (22) \\ \varphi \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right].$$

При больших  $\varepsilon_0$  дело обстоит несколько сложнее и сумма (20) должна быть представлена двумя слагаемыми. В первом  $t \sqrt{\varepsilon_0}$  в (20) уже нельзя разлагать в ряд, а необходимо учитывать все члены суммы вплоть до  $n = \sqrt{\varepsilon_0}$ . При  $n > \sqrt{\varepsilon_0}$   $t \sqrt{\varepsilon_0}$  может быть разложен по степеням  $\sqrt{\varepsilon_0}/8n(2n-1)$  и для второй части суммы (20) найдем выражение, аналогичное (21). К сожалению, сумму по  $n$  до значений  $n_{\max} = \sqrt{\varepsilon_0}$  не удастся вычислить аналитически, поэтому ограничимся лишь случаем малых  $\varepsilon_0$ . Согласно полученным результатам (см. формулы (21), (22)), можно оценить ту дополнительную площадь выгорания в произвольном поперечном сечении цилиндра, которая появляется в дополнение к равномерному горящему фронту благодаря перегреву:

$$S_B = \int_0^{\pi/2} (R + \xi)^2 d\varphi - \frac{\pi}{2} R^2 = 2R \int_0^{\pi/2} \xi(\varphi) d\varphi.$$

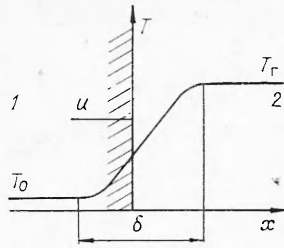


Рис. 3. Схематическое изображение плоского фронта горения.

1 — ж-фаза; 2 — газовая фаза;  $T_0$  — начальная температура газовой фазы;  $u_0$  — скорость горения;  $T_r$  — максимальная температура газовой фазы.

Подставляя сюда выражение (21) и вычисляя интеграл по  $\varphi$  с последующим суммированием по  $n$ , находим окончательно

$$S_B = \frac{\pi}{3} \beta T_0 r_0 u_0 (t - t_3) \ln \left( \frac{t - t_3}{t_0} + 1 \right).$$

Относительный же перерасход определяется выражением

$$\eta = \frac{S_B}{S_{\text{равн}}} = \frac{2}{3} \frac{\beta T_0 r_0}{u_0 t} \ln \frac{t}{t_0},$$

где  $\eta$  — параметрически заданная функция времени. Поскольку  $t_{\text{гор}}$  по порядку величины соответствует  $R_0/u_0$ , то в зависимости  $\eta(t)$  необходимо подставить вместо  $t$  это конкретное значение. В результате окончательно имеем

$$\eta = \frac{2}{3} \frac{\beta T_0 r_0}{R_{\text{max}}} \ln \frac{R_{\text{max}}}{r_0} \quad (R_{\text{max}} = R_0).$$

Обратим внимание еще на один важный вопрос. Речь идет о поверхностном слое горения или о так называемом переходном слое. Выберем для определенности (и простоты) плоский фронт горения и расположим оси координат, как показано на рис. 3. При ширине переходного слоя  $\delta$  можно записать соответствующее выражение для энергии этого слоя:

$$\varepsilon = \left( \frac{\beta_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \rho'^2 dx + \frac{1}{\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\rho) dx \right), \quad (23)$$

где  $\beta_0$  — некоторая константа;  $\rho(x)$  — плотность вещества в слое;  $\mu(\rho)$  — химический потенциал переходной области. Первое слагаемое в (23) характеризует энергию неоднородности.

При  $\delta \rightarrow 0$  условие термодинамического равновесия в условиях горения может быть записано так:  $\mu_1 = \mu_2$ , где  $\mu_{1,2}$  — соответственно химические потенциалы в области слева (отрицательные  $x$ ) и справа (положительные  $x$ ) от оси ординат. Учитывая конечность ширины переходного слоя, можно, следовательно, утверждать, что функция  $\mu(\rho)$  при  $-\delta/2 \leq x \leq \delta/2$  должна иметь экстремум (максимум). Это говорит о том, что в области малых  $\rho$   $\mu(\rho)$  может быть разложено в ряд по четным степеням плотности, т. е.

$$\mu(\rho) = \mu_{\text{max}} - A\rho^2 - B\rho^4, \quad (24)$$

где  $A, B > 0$ .

Что касается величины  $\rho(x)$ , то ее поведение должно удовлетворять граничным условиям

$$\rho(\infty) = \rho_0, \quad \rho(-\infty) = -\rho_0, \quad (25)$$

которые однозначно говорят о том, что в силу непрерывности  $\rho(x)$

$$\rho(0) = 0. \quad (26)$$

Учитывая (25), а также пользуясь положительностью  $\mu(\rho)$  при всех  $\rho$ , получаем единственное в условиях постановки данной задачи правильное выражение, удовлетворяющее всем требованиям, налагаемым на  $\rho(x)$  и  $\mu(\rho)$ :

$$\mu(\rho) = \mu_{\text{max}} \left[ 1 - \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \left( 1 + \sqrt{\frac{\mu_0}{\mu_{\text{max}}}} \right) \right]^2, \quad (27)$$

где  $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2$  — равновесное значение химического потенциала на бесконечности. Следовательно, исходный гамильтониан (23) может быть записан теперь в виде

$$\varepsilon = \frac{\beta_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\rho')^2 dx + \frac{\mu_{\max}}{2\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ 1 - \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \left( 1 + \sqrt{\frac{\mu_0}{\mu_{\max}}} \right) \right]^2 dx \quad (28)$$

и его варьирование по переменной  $\rho$  приводит к уравнению

$$\rho'' + \frac{\rho}{2\delta^2} \left( 1 - \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \left( 1 + \sqrt{\frac{\mu_0}{\mu_{\max}}} \right) \right) = 0, \quad (29)$$

где

$$\delta = \frac{\beta_0 \rho_0^2}{4\mu_{\max} \left( 1 + \sqrt{\frac{\mu_0}{\mu_{\max}}} \right)}. \quad (30)$$

Решение (29) элементарно и в результате с учетом условий (24), (25) получаем

$$\rho(x) = \rho_0 \operatorname{th} \frac{x}{\delta} \left( 1 + \sqrt{\frac{\mu_0}{\mu_{\max}}} \right).$$

Отсюда следует, что необходимо положить  $\mu_0 = 0$ , тогда окончательно

$$\rho(x) = \rho_0 \operatorname{th} \frac{x}{\delta}, \quad (31)$$

$$\delta = \frac{\beta_0 \rho_0^2}{4\mu_{\max}}. \quad (32)$$

Таким образом, распределение плотности дается соотношениями (31) и (32). Что же касается химического потенциала, то, согласно (27),

$$\mu(x) = \frac{\mu_{\max}}{\operatorname{ch} \frac{x}{\delta}}. \quad (33)$$

Зная эти зависимости, теперь вычислим и энергию поверхностного слоя. Согласно (23), получим

$$\varepsilon = \frac{\beta_0 \rho_0^2}{2\delta} + \mu_{\max} = 3\mu_{\max}. \quad (34)$$

В принципе обсуждение свойств переходного слоя можно было бы закончить и остановиться на полученных выше формулах (31), (33) и (34). Однако есть еще один вопрос, который заслуживает обсуждения и подробного анализа. Дело в том, что в выражении (32) фигурирует некоторая неизвестная постоянная  $\beta_0$ , которую необходимо определить, пользуясь какими-либо иными рассуждениями. Это возможно осуществить, рассмотрев распределение температуры в переходном слое. С этой целью вычислим производную по времени от энтропии. Согласно [13],

$$\dot{S} = \sigma \int_{-\infty}^{\infty} \kappa T'^2 \frac{dx}{T^2}. \quad (35)$$

Здесь  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности;  $\sigma$  — площадь в плоскости  $yz$ . Если предположить, что вне слоя ( $x \rightarrow -\infty$ ) температура равна  $T_r$ , а в твердом веществе (не сгоревшем) —  $T_0$  (причем ясно, что  $T_r \gg T_0$ ), то по аналогии с зависимостью (31) получим следующее распределение температуры:

$$T(x) = \frac{T_0 + T_r}{2} + \frac{T_0 - T_r}{2} \operatorname{th} \frac{x}{\delta}. \quad (36)$$



Подстановка этой зависимости в (35) и последующее интегрирование позволяют с учетом условия  $T_r \gg T_0$  найти

$$\dot{S} = \frac{2\chi\sigma}{\delta} \left( 3 + 2 \ln \frac{T_r}{2T_0} \right). \quad (37)$$

Но поскольку, с другой стороны,  $\dot{S} = \frac{\partial S}{\partial \xi} \dot{\xi} = c_V \frac{\dot{T}}{T} = \frac{c_V}{\xi_r} \frac{T_r - T_c}{\tau_{гор}} \approx \approx c_V \sigma \delta \left( 1 - \frac{T_c}{T_r} \right) / \tau_{гор}$  ( $c_V$  — теплоемкость единицы объема твердого вещества,  $\tau_{гор}$  — время перемещения слоя на величину  $\delta$ ), имеем

$$\delta = \frac{2\chi}{u_0} \left( 3 + \ln \frac{T_r}{2T_0} \right), \quad (38)$$

где  $\chi = \frac{\kappa}{c_V}$ , а  $u_0 = \delta / \tau_{гор}$  — скорость перемещения фронта горения. Таким образом, сравнивая (32) с (38), находим

$$\beta_0 = \frac{8\chi\mu_{max}}{u_0\rho_0^2} \left( 3 + \ln \frac{T_r}{2T_0} \right).$$

Оценим теперь величину  $\delta$  из (38). Полагая  $u_0 = 1$  см/с,  $\chi = 2 \cdot 10^{-3}$  см<sup>2</sup>/с,  $T_r = 3 \cdot 10^3$  К,  $T_0 = 293$  К, получаем  $\delta = 3 \cdot 10^{-2}$  см. Численная оценка хорошо согласуется с экспериментальными результатами измерения размера области горения [14—17].

Итак, численной оценкой ширины переходного слоя  $\delta$  программа по исследованию процесса распространения фронта горения может считаться завершенной. Подведем общий итог и отметим основные результаты.

Из общих аналитических зависимостей получено линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка смешанного типа на функцию смещения  $\xi(\varphi, t)$  и найдено его решение, имеющее реальный физический смысл. Согласно полученному результату, оказывается возможным аналитически вычислить перерасход горючего в условиях импульсной тепловой нагрузки. Проведено последовательное рассмотрение параметров переходного слоя горящего вещества и получено распределение плотности и температуры внутри этого слоя. И наконец, из условия возрастания энтропии при диссипативных процессах (в данном случае речь идет о процессе теплопроводности) аналитически выражена ширина переходного слоя через температуры обеих фаз.

Относительно последнего необходимо сделать оговорку. Во многих работах по горению (см., например, [14—17]) приводится выражение для  $\delta$  через некоторые основные параметры систем. В данном же случае продемонстрирована еще одна возможность представления  $\delta$  через температуры двух фаз и тепловые характеристики среды.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Подстригач Я. С. ИФЖ, 1963, 6, 10, 128.
2. Месрович И. Г., Мучник Г. Ф. ТВТ, 1963, 1, 2, 291.
3. Тамуров Н. Г. ИФЖ, 1963, 6, 10, 72.
4. Видин Ю. В., Иванов В. В. Изв. вузов. Сер. Энергетика, 1965, 2, 104.
5. Lockwood J. D., Mulholland G. P. J. Heat Transfer, 1974, 96, 4, 61.
6. Бобрик А. И., Михайлов В. Н. Прикл. механика, 1976, 12, 4, 69.
7. Кравченко В. Ф., Токаренко А. В., Пахомова Е. С. ИФЖ, 1977, 32, 4, 729.
8. Цаплин А. И., Бочкарев С. В. Механика композитных материалов, 1980, 2, 304.
9. Котляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. Н. Уравнения в частных производных математической физики. — М.: Высш. шк., 1970.
10. Чельшев В. П., Шехтер Б. И., Шушко Л. А. Физика горения и взрыва. — М., 1970.
11. Смирнов В. П. Курс высшей математики. — М.: Наука, 1967. — Т. 2.
12. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. — М.: Наука, 1988.
13. Карелов Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. — М.: Наука, 1964.
14. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. — М.: Наука, 1976. — Т. 5.
15. Струнин В. А., Манелис Г. Б. ФГВ, 1979, 15, 15, 24.
16. Кишоре К. РТК, 1979, 17, 11, 78.
17. Коэн Н. С. РТК, 1980, 18, 4, 186.

г. Москва

Поступила в редакцию 14/IV 1988