

УДК 532.51

Моделирование волновых режимов на пленке вязкой жидкости, стекающей по вертикальной плоскости*

О.Ю. Цвелодуб

*Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск
Новосибирский государственный университет*

E-mail: tsvel@itp.nsc.ru

Рассматривается эволюция возмущений на поверхности пленки жидкости, свободно стекающей по вертикальной плоскости. В случае малых чисел Рейнольдса задача сводится к исследованию одного уравнения, описывающего эволюцию возмущений толщины пленки. С использованием информации о структуре семейств стационарно-бегущих решений этого уравнения выявлены характерные сценарии эволюции периодических возмущений.

Ключевые слова: стекающая пленка, модельное уравнение, эволюция, семейства решений.

Введение

Течения тонких пленок жидкости в поле тяжести привлекают активное внимание исследователей уже более полувека. В частности, этот интерес вызван широким использованием таких течений в различных технологических процессах. Благодаря большой поверхности и малому гидродинамическому сопротивлению стекающие пленки используются в качестве рабочего тела в тепло- и массообменных аппаратах в химической, пищевой промышленности, в теплообменниках и конденсаторах энергетических установок и т. п.

С другой стороны, интерес к пленочным течениям обусловлен тем, что для них характерным является наличие различного рода линейных (в том числе и длинноволновых) неустойчивостей. В результате эволюции линейных возмущений формируются разнообразные нелинейные волновые структуры. Использование различных теоретических подходов, в том числе и наличие малых параметров, позволяет получать интересные упрощенные модели, которые в то же время обладают достаточной универсальностью, так как появляются и в других разделах

* Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства РФ для гос. поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских вузах (грант № 11.G34.31.0035 (ГОУ ВПО «Новосибирский государственный университет») и гранта РФФИ (код проекта 10-08-91333-ННИО-а).

физики. В силу этого вязкие пленки жидкости можно классифицировать как уникальные объекты для изучения фундаментальных закономерностей развития нелинейных волновых структур.

Например, как показано в работе [1], в случае малых чисел Рейнольдса задачу удается свести к исследованию одного уравнения, описывающего эволюцию возмущений толщины пленки. После некоторых преобразований оно приводится к виду [2]:

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} + 4H \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 H}{\partial x^4} = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) записано в системе отсчета, движущейся относительно стенки со скоростью бесконечно малых нейтральных возмущений (см. [2]). Оно является типичным примером модельных уравнений, возникающих при исследовании эволюции возмущений в активно-диссипативных средах. В настоящее время уравнение (1) широко известно как уравнение Курамото–Сивашинского (К–С). Строго говоря, хотя линейные части уравнения К–С, возникающего при исследовании термодиффузионной неустойчивости фронта пламени, и уравнения (1) совпадают, их нелинейные члены отличаются. В итоге их решения существенным образом различаются, хотя могут быть получены друг из друга сравнительно простым пересчетом. Тем не менее, в силу сложившейся традиции ниже различие между уравнениями К–С и (1) подчеркиваться не будет.

На сегодняшний день уравнение К–С достаточно подробно исследовано. Из линейного анализа устойчивости тривиального решения $H \equiv 0$ уравнения (1) к возмущениям вида

$$H \sim \exp(i\alpha(x - c\tau)) + \text{к.с.}$$

(к.с. — комплексно-сопряженное выражение) следует, что оно неустойчиво, если волновые числа α удовлетворяют условию $\alpha < \alpha_n = 1$. Здесь α_n — нейтральное волновое число. В работе [1] отмечено, что в этой точке от тривиального решения $H \equiv 0$ внутрь области неустойчивости ответвляется семейство волновых стационарно-бегущих решений. В работах [3, 4] показано, как в результате последовательных бифуркаций друг от друга появляется счетное число семейств стационарно-бегущих решений. Целью настоящей работы являлось выявление некоторых типичных сценариев развития возмущений с использованием информации о стационарно-бегущих решениях.

Метод численного нахождения стационарно-бегущих решений ($H(x, \tau) = H(\xi)$, $\xi = x - c\tau$, c — фазовая скорость волны) уравнения (1) подробно описан в [3, 4]. Заметим, что фазовая скорость c является собственным значением задачи и для заданных волновых чисел может принимать только дискретный набор значений. Как показано, например в [3, 4], если у уравнения (1) существует при каком-нибудь значении α стационарно-бегущее решение $H(x, \tau) = H_1(\xi)$, $c > 0$, то есть и решение $H(x, \tau) = H_2(\xi) = -H_1(-\xi)$, $c < 0$.

Метод исследования устойчивости стационарно-бегущих решений $H(\xi)$ и использования полученных результатов для анализа бифуркаций, т. е. ветвления новых решений, вполне аналогичен изложенному в работах [3, 4]. Поэтому поясним его здесь кратко.

Пусть $H_0(\xi)$ — периодическое решение уравнения (1) с волновым числом α . Для исследования его устойчивости подставим в (1) $H = H_0(\xi) + h(\xi, \tau)$ и линеаризуем его по возмущению $h(\xi, \tau)$:

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} - c \frac{\partial h}{\partial \xi} + 4 \frac{\partial H_0 h}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^4 h}{\partial \xi^4} = 0. \quad (2)$$

Учитывая, что переменная τ не входит в уравнение (2) явно, его решение ищем в виде:

$$h(\xi, \tau) = \exp(-\gamma t) h_1(\xi) + \text{к.с.} \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2), для $h_1(\xi)$ приходим к обыкновенному линейному уравнению с периодическими коэффициентами:

$$-\gamma h_1 - c \frac{\partial h_1}{\partial \xi} + 4 \frac{\partial H_0 h_1}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 h_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^4 h_1}{\partial \xi^4} = 0. \quad (4)$$

Из теоремы Флоке следует, что решения $h_1(\xi)$ уравнения (4), ограниченные на бесконечности, имеют вид:

$$h_1(\xi) = \exp(iQ\alpha\xi)\phi(\xi),$$

где $\phi(\xi)$ — периодическая функция того же периода, что и $H_0(\xi)$; Q — вещественный параметр.

Таким образом, исследование устойчивости стационарно-бегущих решений уравнения (1) сводится к изучению при различных значениях Q спектра собственных значений γ , при которых функция $\phi(\xi)$, являющаяся составной частью решения $h_1(\xi)$ для уравнения (4), имеет тот же период, что и $H_0(\xi)$. Как видно из (3), волна устойчива, если для любых значений Q у всех γ вещественные части $\gamma_r > 0$. Новые стационарно-бегущие режимы отходят от решения $H_0(\xi)$, если в некоторой точке (α, Q) какое-нибудь из собственных значений γ обращается в ноль: $\gamma(\alpha, Q) = 0$. При этом, если Q иррациональное число, то рождается двоякопериодический режим. Если $Q = p/r$ — рациональное число, то возникает периодический по ξ режим с новым волновым числом $\alpha_{\text{new}} = \alpha/r$, если $Q = 0$, то может возникнуть новый режим с тем же периодом.

Если вещественная часть $\gamma_r(\alpha, Q) = 0$, а его мнимая часть не равна нулю — $\gamma_i(\alpha, Q) \neq 0$, то возможно рождение нестационарных режимов. Такие режимы исследовались в работе [5].

Для нахождения нестационарных решений уравнения (1) функция H представляется в виде пространственного ряда Фурье:

$$H(x, \tau) = \sum_n H_n(\tau) \exp(i\alpha n x). \quad (5)$$

Так как H — вещественная функция, то $\bar{H}_{-n} = H_n$. Черта означает операцию комплексного сопряжения.

После подстановки (5) в уравнение (1) получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений на Фурье-гармоники $H_n(\tau)$. Полагая, что все $H_n(\tau)$ с индексами $|n| \geq N$ равны нулю, приходим к ее конечномерному аналогу:

$$\dot{H}_n = -2i\alpha n \sum_{n_1=n-N}^N H_{n-n_1} H_{n_1} + \alpha^2 n^2 (1 - \alpha^2 n^2) H_{nn}, \quad n = 0, \dots, N. \quad (6)$$

При обрывании ряда (5) число гармоник выбиралось так, чтобы выполнялось неравенство

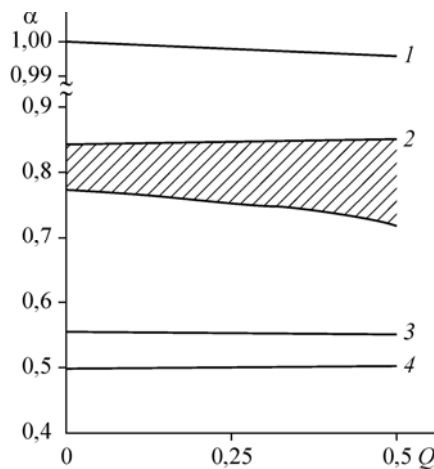
$$\frac{|H_N|}{\max_n |H_n|} < 10^{-5}.$$

Для этого в приводимых ниже расчетах в зависимости от значения α достаточно было число N брать в пределах $5 \div 20$.

Из (6) видно, что $\dot{H}_0 = 0$, т. е. в процессе эволюции возмущения гармоника $H_0 = \text{const}$. При нахождении периодических стационарно-бегущих решений уравнения (1) в [3, 4] в качестве условия нормировки полагалось, что среднее отклонение толщины от невозмущенного уровня равно нулю (т. е.: $H_0 = 0$). При исследовании эволюции возмущений также будем использовать эту нормировку. Как следует из (6), в процессе эволюции она будет сохраняться.

Результаты

В работе [1] показано, что ответвляющееся от тривиального решения в точке $\alpha_n = 1$ семейство волновых стационарно-бегущих решений может быть продолжено внутрь области неустойчивости до значения $\alpha_* = 0,4979$. В этой точке каждая нечетная гармоника становится равной нулю и получается решение с волновым числом $\alpha = 2\alpha_* = 0,9958$. Причем оказывается, что это то же самое решение, которое было найдено для этого α ранее. Таким образом, данное семейство замыкается само на себя. В настоящее время оно традиционно называется первым семейством (семейство I). Для всех значений волновых чисел фазовая скорость у волн семейства I $c = 0$, а само это семейство является антисимметричным, для него $H(-\xi) = -H(\xi)$. Напомним, что уравнение (1) записано в системе отсчета, движущейся относительно стенки со скоростью бесконечно малых нейтральных возмущений, поэтому волны семейства I в лабораторной системе отсчета являются стационарно-бегущими. На рис. 1 представлены данные по исследованию его устойчивости, взятые из работ [3, 4]. Основываясь на них, там было показано, как в результате последовательных бифуркаций друг от друга появляется счетное число семейств стационарно-бегущих решений. Здесь на линиях $I-4$ одно из собственных значений γ обращается в ноль. Штриховкой выделена область устойчивости для семейства I .



Наиболее проста и понятна эволюция возмущений в той области волновых чисел, где существует только одно стационарно-бегущее семейство решений. Эти числа лежат в интервале $0,554 < \alpha < 1$. В точке $\alpha_{**} = 0,554$ от первого семейства ответвляются два новых семейства с той же длиной волны и $c \neq 0$. Внутри этого

Рис. 1. Результаты исследования устойчивости для первого семейства.

На линиях $I-4$ одно из собственных значений $\gamma = 0$. Штриховка — область устойчивости к соответствующим возмущениям.

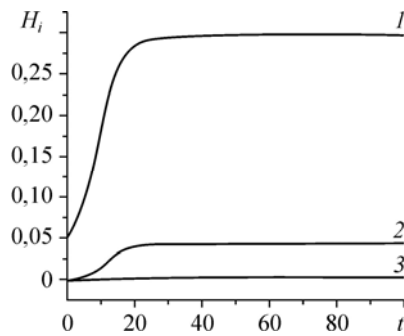


Рис. 2. Зависимости модулей первых трех Фурье-гармоник от времени. $\alpha = 0,9$.

Начальное значение: $|H_1(0)| = 0,05$.

$H_1(1), H_2(2), H_3(3)$.

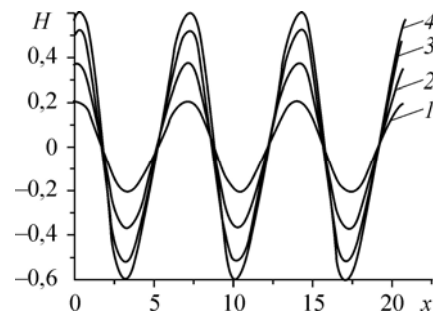


Рис. 3. Профили поверхности для четырех различных моментов времени. $\alpha = 0,9$.

$t = 5(1), 10(2), 15(3), 30(4)$.

интервала все начальные возмущения эволюционируют к соответствующему решению семейства I . Пример такого развития возмущений показан на рис. 2, 3. Здесь волновое число $\alpha = 0,9$. На рис. 2 представлена зависимость модулей первых трех гармоник от времени, на рис. 3 для четырех различных моментов времени показаны профили волн. Здесь и на подобных рисунках, приводимых ниже, по оси абсцисс отложены три периода волны — 3λ ($\lambda = 2\pi/\alpha$).

Такое поведение возмущений является типичным для всего упомянутого выше интервала волновых чисел, несмотря на то, что среди волн первого семейства в этом интервале существуют неустойчивые режимы к возмущениям с другими — большими, чем период рассматриваемой волны, периодами (см. работы [3, 4]). Но, используя данный алгоритм — представление решения в виде ряда (5), — мы не даем возможности проявиться этим возмущениям.

По мере продвижения вглубь области неустойчивости картина стационарных решений начинает усложняться. Как уже упоминалось выше, впервые такое усложнение происходит при прохождении точки $\alpha_{**} = 0,554$. Поэтому после нее появляется разброс в эволюционном поведении нестационарных решений.

Пример такого разброса в развитии возмущений показан на рис. 4, 5. Для них значения волнового числа $\alpha = 0,55$. На рис. 4, a и $5, a$ представлены зависимости модулей первых трех гармоник от времени. На первый взгляд, их поведение, за естественным исключением на начальном переходном участке, обусловленное

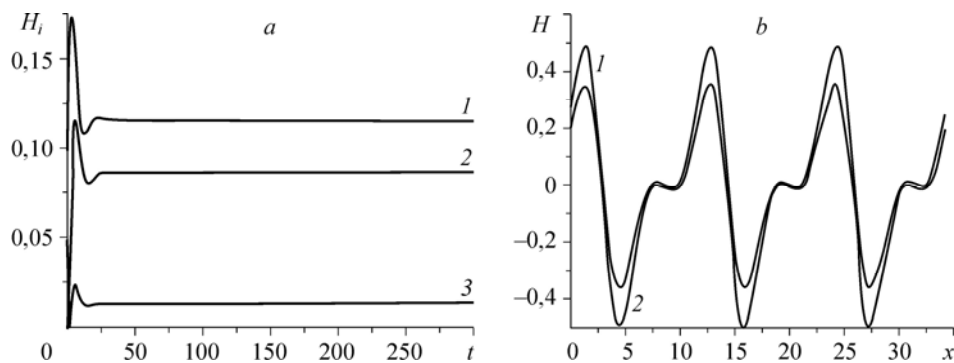


Рис. 4. $\alpha = 0,55$. a — зависимости модулей первых трех Фурье-гармоник от времени.

Начальное значение $|H_1(0)| = 0,1$; $H_1(1), H_2(2), H_3(3)$. b — профили поверхности

для двух различных моментов времени: $t = 5(1), 100(2)$; фазовая скорость $c = 0$.

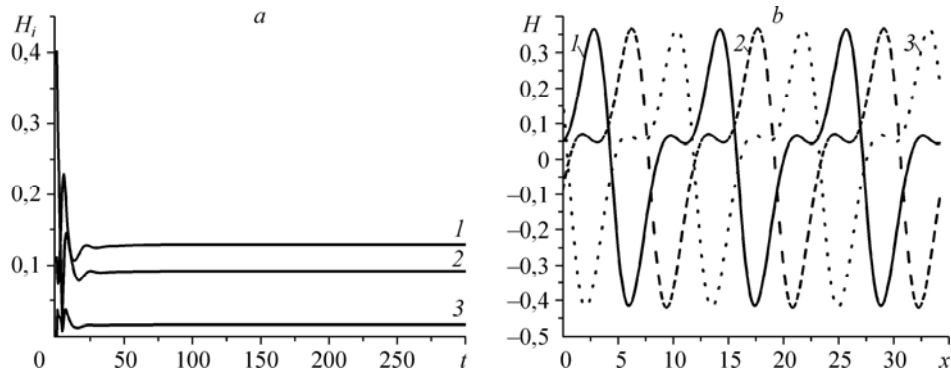


Рис. 5. $\alpha = 0,55$. *a* — зависимости модулей первых трех Фурье-гармоник от времени; начальные значения: $|H_1(0)| = 0,05$, $|H_2(0)| = 0,5$; решение эволюционирует к стационарно-бегущей волне с фазовой скоростью $c < 0$; $H_1(1)$, $H_2(2)$, $H_3(3)$. *b* — профили поверхности для трех различных моментов времени: $t = 50$ (1), 150 (2), 250 (3).

различием в начальных данных, практически одинаково. В обоих случаях решение проэволюционировало к некоторому стационарному решению. Но, как видно из рис. 4, *b* и 5, *b*, это два разных стационарных решения. Одно из них принадлежит к семейству *I*, а другое — к новому семейству, ответвившемуся от первого в точке $\alpha_{**} = 0,554$. Как видно из этих рисунков, форма обоих профилей волн для данного значения волнового числа заметно отличается от синусоидальной. Это естественно, так как, в отличие от ситуации, представленной на рис. 2, в данном случае амплитуды первой и второй гармоник становятся соизмеримыми между собой. Кроме того, и третьи гармоники уже заметно отличаются от нуля. Если волна первого семейства в данной системе отсчета является стационарной, то скорость стационарно-бегущей волны нового семейства меньше нуля. У этого семейства антисимметрия по координате ξ пропадает.

Пример, когда начальное возмущение эволюционирует к стационарно-бегущей волне с фазовой скоростью больше нуля, представлен на рис. 6. Здесь $\alpha = 0,5$.

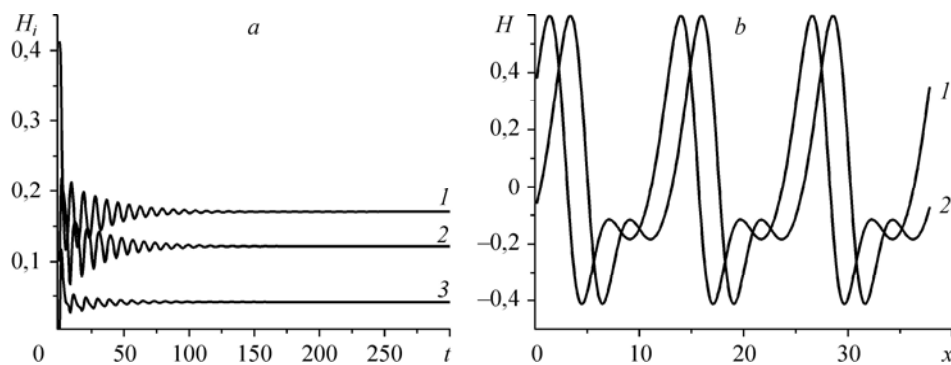


Рис. 6. $\alpha = 0,5$. *a* — зависимости модулей первых трех Фурье-гармоник от времени; начальное значение: $|H_1(0)| = 0,5$; $H_1(1)$, $H_2(2)$, $H_3(3)$; решение эволюционирует к стационарно-бегущей волне с фазовой скоростью $c > 0$. *b* — профили поверхности для двух различных моментов времени: $\tau = 150$ (1), 300 (2).

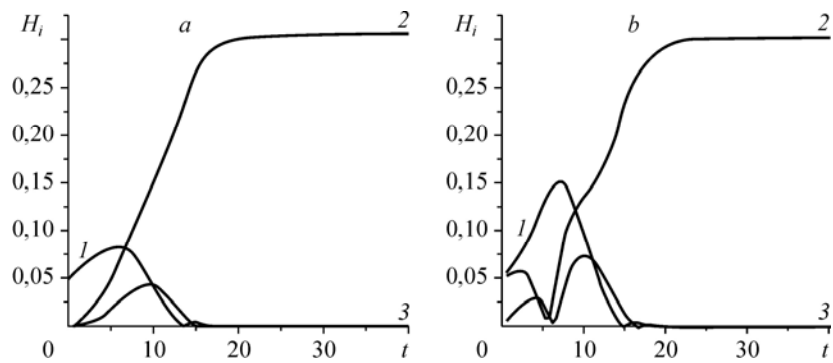


Рис. 7. Зависимости модулей первых трех Фурье-гармоник от времени. $\alpha = 0,4$. Эволюция к стационарному решению с волновым числом $2\alpha = 0,8$.
 а — начальное значение: $|H_1(0)| = 0,05$, b — начальные значения: $|H_1(0)| = 0,05$, $|H_2(0)| = 0,05$.
 1 — H_1 , 2 — H_2 , 3 — H_3 .

В случае, когда волновые числа $\alpha \leq 0,5$, одним из типичных является сценарий, при котором в процессе эволюции вторая гармоника со временем становится преобладающей по сравнению с первой. Причем достаточно часто все нечетные гармоники с ростом τ стремятся к нулю, и решение притягивается к стационарному с удвоенным волновым числом — 2α . Соответствующий пример показан на рис. 7. Здесь для значения волнового числа $\alpha = 0,4$ для двух различных начальных данных представлены зависимости модулей первых трех гармоник от времени. Видно, что оба эти решения выходят на один и тот же стационарный режим. Профили волн для решения, представленного на рис. 7, b , для нескольких моментов времени показаны на рис. 8. Если на переходном этапе в промежутке времени $0 < \tau < 15$ профиль волны существенно несинусоиден, то после установления $\tau > 15$ волна вырождается практически в чисто синусоидальную с длиной волны, равной половине первоначальной (поэтому при $\tau = 20$ вместо трех периодов на данном интервале укладывается шесть длин волн).

По мере продвижения в область меньших волновых чисел поведение решений в принципе приобретает все более сложный характер. Однако нельзя сказать, что это усложнение нарастает однозначно монотонно, т. е. что чем меньше волновое число, тем сложнее поведение решения. Так, при несколько меньших значениях волновых чисел структура решения может оказаться проще, чем при больших α . Сказанное иллюстрирует сравнение решений, представленных на рис. 7 и на приводимом ниже рис. 9. Здесь значение $\alpha = 0,45$, и поведение решения значительно отличается от приведенного на рис. 7. Для значения $\alpha = 0,4$ решение вышло на стационар с $2\alpha = 0,8$ и дальнейшие изменения его прекратились (рис. 7). При $\alpha = 0,45$ после притяжения к стационарному решению с $2\alpha = 0,9$ и достаточно длительного пребывания в очень близкой его окрестности происходит отход от этого

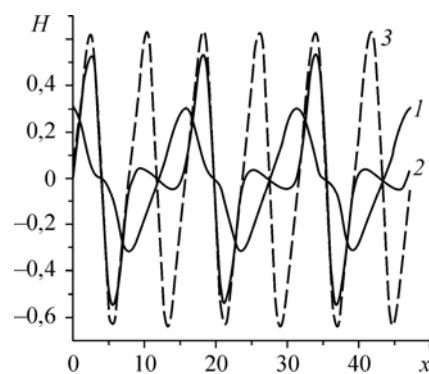


Рис. 8. Профили поверхности у решения, гармоники которого представлены на рис. 7, b , для трех различных моментов времени.

$\tau = 5$ (1), 10 (2), 20 (3).

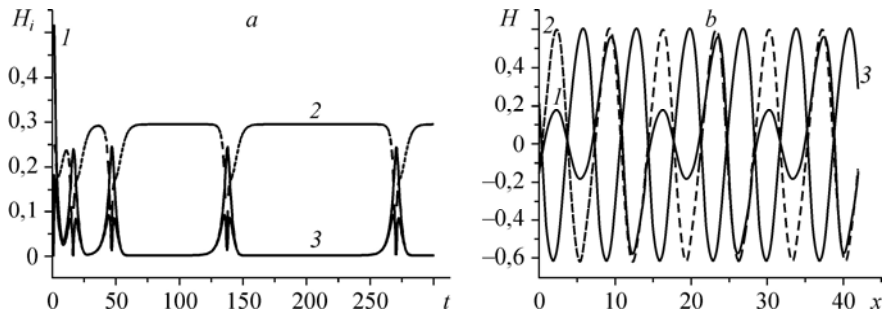


Рис. 9. $\alpha = 0,45$. *a* — зависимости модулей первых трех Фурье-гармоник от времени; режим «волновой перемежаемости»; H_1 (1), H_2 (2), H_3 (3). *b* — профили поверхности для трех различных моментов времени: $\tau = 5$ (1), 10 (2), 20 (3).

стационара, во время которого первая гармоника снова становится преобладающей. Эта перестройка происходит в течение короткого промежутка времени, после чего решение снова притягивается к стационарному решению с $2\alpha = 0,9$, но, в отличие от предыдущего выхода на этот стационар, теперь наблюдается сдвиг на полпериода (сравните кривые 2 и 3 на рис. 9, *b*). После длительного пребывания в этом состоянии рано или поздно снова происходит срыв и т. д. Этот процесс продолжается регулярно, хотя и нестрого периодически (сравните на рис. 9, *a* интервалы времени, в течение которых амплитуды гармоник остаются неизменными). Можно сказать, что у представленного на рис. 9 решения имеет место «волновая перемежаемость». Такая разница в поведении двух волновых режимов, у которых волновые числа достаточно близки друг к другу, объясняется тем, что стационарное решение с $\alpha = 0,8$ является устойчивым к бесконечно малым возмущениям всех типов (см. рис. 1). Наоборот, решение с $\alpha = 0,9$ неустойчиво, в частности, к возмущениям с $Q = 0,5$, т. е. к возмущениям удвоенного периода ($\alpha = 0,45$). Естественно, данные возмущения присутствуют, так как решение строится в виде ряда (5) с $\alpha = 0,45$, и рано или поздно эта неустойчивость срабатывает. Но так как стационарного антисимметричного решения с таким α нет (см. [3, 4]), то оно снова притягивается к стационару с 2α . В последующем этот процесс повторяется.

При дальнейшем продвижении вглубь области неустойчивости проблема исследования эволюции пространственных периодических возмущений становится существенно более сложной и сколько-либо систематический анализ характерных типов эволюции становится практически невозможен. Это обусловлено в том числе и тем, что с уменьшением волнового числа резко увеличивается количество стационарно-бегущих семейств решений (см. [3, 4]). В результате решение становится чувствительным к изменению начальных данных. Так, например, если для $\alpha = 0,3$ в начальный момент времени задать амплитуду только первой гармоники —

$\text{Re}(H_1(0)) = 0,05$ (рис. 10), то решение эволюционирует вполне аналогично случаю с $\alpha = 0,4$ — со временем оно притягивается

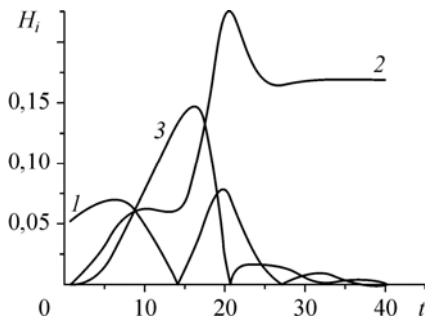
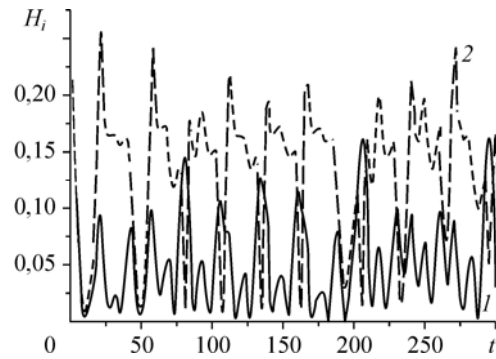


Рис. 10. Зависимости модулей первых трех Фурье-гармоник от времени. Начальное значение: $|H_1(0)| = 0,05$. $\alpha = 0,3$. Эволюция к стационарному решению с волновым числом $2\alpha = 0,6$.

H_1 (1), H_2 (2), H_3 (3).

Рис. 11. Зависимости модулей первых двух Фурье-гармоник от времени. $\alpha = 0,3$. Начальные значения: $|H_1(0)| = 0,1$, $|H_2(0)| = 0,2$. Режим «псевдохаоса».

$$H_1(t), H_2(t).$$



к стационарному решению с волновым числом $2\alpha = 0,6$ (сравните рис. 7 и 10). Но если наряду с первой гармоникой ($\text{Re}(H_1(0)) = 0,1$) задать, например, и вторую — $\text{Re}(H_2(0)) = 0,2$, то эволюция этого возмущения радикально отличается от первого случая (см. рис. 11). Как видно из рис. 11, теперь решение не выходит на стационар, а изменение во времени представленных здесь двух гармоник выглядит достаточно хаотичным. Если, аналогично предыдущим примерам, представить профили поверхности для 3–4 моментов времени на одном рисунке, то визуально это будет выглядеть как полный хаос. На самом деле в любой момент времени решение является достаточно регулярным (рис. 12).

Заключение

Численные расчеты для уравнения (1) показали, что характер эволюции периодических возмущений существенным образом определяется структурой семейств стационарно-бегущих решений. Зная ее, удастся выделить характерные сценарии эволюции периодических возмущений. В первом — возмущения с волновыми числами, близкими к нейтральному волновому числу, обычно притягиваются к стационарно-бегущему волновому режиму. В случае возмущений с достаточно малыми волновыми числами картина становится существенно более сложной. На их эволюцию достаточно сильно влияет конкретная начальная форма возмущения.

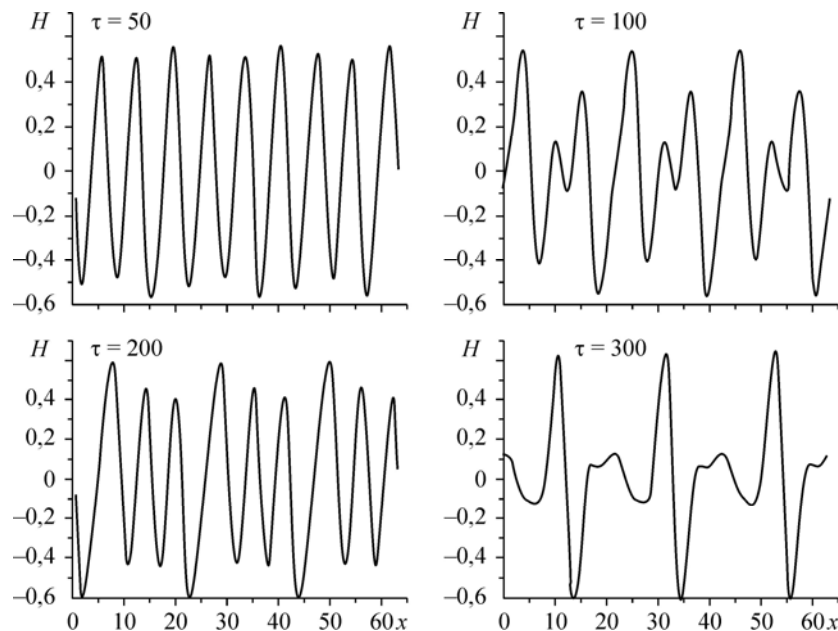


Рис. 12. Профили поверхности для четырех различных моментов времени. $\alpha = 0,3$.

В некоторых случаях не происходит выхода на стационарный волновой режим, а в других возмущения эволюционируют к стационарно-бегущему решению с удвоенным волновым числом.

Список литературы

1. **Непомнящий А.А.** Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1974. № 3. С. 28–34.
2. **Цвелодуб О.Ю.** Стационарно-бегущие волны на пленке, стекающей по наклонной плоскости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1980. № 4. С. 142–143.
3. **Трифонов Ю.Я., Цвелодуб О.Ю.** О стационарно-бегущих решениях эволюционного уравнения для возмущений в активно-диссипативной среде. Новосибирск, ИТФ СО РАН, 1988. Препринт № 188-88. 26 с.
4. **Tselodub O.Yu., Trifonov Yu.Ya.** On steady-state traveling solutions of an evolution equation describing the behaviour of disturbances in active dissipative media // Physica D. 1989. Vol. 39. P. 336–351.
5. **Trifonov Yu.Ya.** Two-periodical and quasi-periodical wave solutions of the Kuramoto–Sivashinsky equation and their stability and bifurcation // Physica D. 1992. Vol. 54. P. 311–330.

Статья поступила в редакцию 29 марта 2011 г.