

3. Б. М. Будаков, Ф. П. Васильев, А. Б. Успенский. В сб. «Численные методы в газовой динамике». Вып. IV. М., Изд-во МГУ, 1965.
4. О. А. Олейник. Докл. АН СССР, 1960, 135, 5.
5. В. Т. Гонтковская. Тепло- и массоперенос. Т. VI. Минск, изд-во «Наука и техника», 1966.
6. А. Г. Мержанов, Н. И. Дураков и др. ЖФХ, 1966, X, 4, 811.

УДК 536.46

О РАЗНОСТНОМ СЧЕТЕ ЗАДАЧ ЗАЖИГАНИЯ И ГОРЕНИЯ С УЧЕТОМ ГИДРОДИНАМИКИ

К. Г. Шкадинский

(Москва)

Для описания процессов зажигания и горения газов с учетом гидродинамики необходимо находить решение следующей системы дифференциальных уравнений для конкретных начальных и краевых условий:

закон сохранения массы

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial m} = 0,$$

уравнение движения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \pi \frac{\partial p}{\partial m} = \text{Pr} \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{1}{V} \frac{\partial u}{\partial m} \right),$$

закон сохранения тепловой энергии

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + kp \frac{\partial u}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m} \left[\frac{(1 + \beta \theta)^s}{V} \frac{\partial \theta}{\partial m} \right] + F, \quad (1)$$

закон сохранения массы одной компоненты смеси

$$\frac{\partial a}{\partial t} = L \frac{\partial}{\partial m} \left[\frac{(1 + \beta \theta)^s}{V} \frac{\partial a}{\partial m} \right] - \gamma F,$$

уравнение состояния

$$pV = (1 + \beta \theta)[a + (1 - a)/\sigma],$$

связь между лагранжевыми и эйлеровыми координатами

$$dx(m) = V dm,$$

где $F = a \exp[\theta/(1 + \beta \theta)]$, $V = 1/\rho$.

Здесь записана простейшая модель. Сплошная среда представляет собой смесь двух идеальных газов (горючая смесь и продукты реакции). Подогретая горючая смесь сгорает, превращаясь в продукты реакции и выделяя тепло. Процесс описывают законы сохранения в безразмерных переменных и уравнение состояния смеси двух идеальных газов. Запишем систему (1) в векторной форме:

$$\overline{W}'_t + A(W) \overline{W}'_m = [B(W) \overline{W}'_m]'_m + \overline{F}. \quad (2)$$

Эта система обладает следующими особенностями. Матрица B диагональная и вырожденная, так как в уравнении сохранения массы нет диссипативных членов, а для модели невязких газов ($Pr=0$) нет диссипативных членов и в уравнении движения. Если отбросить диссипативные члены, то оставшаяся система $\overline{W}'_t + A(W) \overline{W}'_m = 0$ будет гиперболической, причем некоторые собственные значения матрицы A оказываются много больше элементов матрицы B . Эти особенности затрудняют построение устойчивых разностных схем.

Рассмотрим две системы:

$$\overline{W}'_t + A(W) \overline{W}'_m = 0, \quad (3)$$

$$\overline{W}'_t = [B(W) \overline{W}'_m]'_m + \overline{F}. \quad (4)$$

Первая система гиперболическая, и для нее разработана методика построения устойчивых разностных схем даже для негладких решений (см., например, [1]). Вторая система в силу диагональности матрицы B распадается на отдельные уравнения типа теплопроводности, для которых также разработаны разностные методы [2]. Вместо того чтобы решать систему (2), будем решать системы (3) и (4). По начальным данным и устойчивой разностной схеме (для (3) просчитаем функции на следующем слое, полученный результат возьмем в качестве начальных данных для (4) и по устойчивой разностной схеме для системы (4) получим окончательный результат для системы (2). Разностная схема, представляющая последовательное действие двух устойчивых разностных схем, устойчива и аппроксимирует (2). Ознакомиться с такой методикой построения разностных схем можно по статье [3].

Разностные схемы для системы (3) устойчивы при выполнении условия Куранта ($\tau \leq h/c$, где c максимальное собственное значение матрицы A). Это требование по существу, оно связано со скоростью распространения звуковых возмущений системы. Поэтому если собственные значения матрицы A большие, по сравнению с элементами матрицы B , то счет требует большого машинного времени. В этом случае имеет смысл несколько слоев сосчитать по разностной схеме для системы (3), а затем, взяв результат в качестве начальных данных, с суммарным временным шагом сосчитать по разностной схеме для (4). Это экономит время счета, так как реже считаются разностные уравнения для системы (4).

ЗАЖИГАНИЕ ГОРЮЧЕЙ СМЕСИ НАГРЕТОЙ СТЕНКОЙ

В этом случае для системы (1) ставятся следующие краевые и начальные условия:

при

$$m=0 \text{ и } t>0$$

$$u(t, 0) = \theta(t, 0) = a'_m(t, 0) = 0,$$

при

$$t=0 \text{ и } m \geq 0$$

$$u(0, m) = 0, \theta(0, m) = -\theta_n, a(0, m) = 1, V(0, m) = 1.$$

Параметр λ задавался $\sim 10^{14}$. В качестве разностной схемы для системы (3) выбиралась схема Лакса [1], а для системы (4) неявная

четырёхточечная схема. В источнике концентрация бралась с верхнего слоя. Из-за рассогласованности для температуры начальных и краевых условий возникала волна, которая покидала зону прогрева и реакции. Интенсивность волны была малой, и она оставляла после прохождения исходную температуру и плотность (в пределах точности счета), а газ начинал двигаться от стенки. Счет велся в области $[0, R(t)]$, $R(t)$ выбиралось так, чтобы все возмущения оставались левее $R(t)$. Сама зона $[0, R(t)]$ разбивалась на две $[0, r]$ и $[r, R(t)]$. В зоне $[0, r]$ происходил прогрев газа, начиналась экзотермическая реакция. Счет прекращался, когда температура, превысив температуру стенки, начинала резко расти. Зона $[r, R(t)]$ характеризовалась тем, что там можно было полагать $a=1$, а $\theta = -\theta_n$ и решать более простую задачу с более крупным шагом. Шаг по мере роста $R(t)$ удваивался. Счет на $[r, R(t)]$ давал значение скорости в точке r для полной системы.

Рассмотрим второе уравнение системы (1). Если производные от скорости небольшие, то $\frac{1}{\pi} \left[-\frac{\partial u}{\partial t} + \text{Pr} \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{1}{V} \frac{\partial u}{\partial m} \right) \right]$ можно считать очень малым. Тогда второе уравнение системы (1) можно заменить условием $p(t, m) = p_0(t)$. Если нам известно $p_0(t)$, то из уравнения состояния находим $V(a, \theta)$, а из третьего и четвертого уравнения системы (1) определяем безразмерную температуру θ и концентрацию горючей смеси a . Первое уравнение служит для определения скорости. В нашей задаче область неограниченная, если начальную температуру задать сглаженной, а удельный объем задать, исходя из постоянства давления, то давление можно считать постоянным во времени и равным исходному. Такое упрощение резко сокращает машинное время счета, здесь ограничения на шаг по времени накладываются только требованиями точности счета. В зоне $[0, r]$ проводилось сравнение результатов упрощенного счета и счета полной системы для времен, когда волна уже покинула зону $[0, r]$. Наибольшее рассогласование получалось для скорости (около 6%), остальные переменные совпадали с точностью до 1%.

ЗАДАЧА О ВЫХОДЕ НА РЕЖИМ ГОРЕНИЯ

Краевые и начальные условия ставятся те же, что и для предыдущей задачи. Но если раньше мы прекращали счет, когда резко растет температура, то здесь нас интересуют процесс роста температуры и формирование фронта горения. Если производные от скорости большие, то полагать $\frac{1}{\pi} \left[-\frac{\partial u}{\partial t} + \text{Pr} \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{1}{V} \frac{\partial u}{\partial m} \right) \right]$ малым нельзя. В задачах зажигания и перехода к горению наибольшее изменение скорости наблюдается, когда происходит непосредственное зажигание, «вспышка», в узкой зоне за короткое время происходит прогрев до температур горения. Газ при этом расширяется и скорость растет. Затем эта зона увеличивается и формируется фронт пламени. Ограничимся случаем, когда эти изменения допускают предположение $P(t, m) = p_0(t)$, предположим, что газ невязкий ($\text{Pr}=0$) и механические источники энергии значительно меньше химических ($k=0$). Даже для такой упрощенной задачи счет вести трудно. Для вычислений предлагается использовать шаг, неравномерный по пространству. В зоне, где резко меняются температура и концентрация, необходимо иметь более густую сетку расчетных точек. После того, как реакция прошла, там устанавливается

температура порядка температуры горения ($\theta \approx -\theta_n + 1/\gamma$) и концентрация горючей смеси $a \approx 0$. сетка расчетных точек должна становиться реже. Это реализовано следующим алгоритмом: если разница значений температур в двух соседних точках выше допустимой ($\frac{1}{20\gamma} + \frac{1}{10\gamma}$), то сетка расчетных точек дополняется промежуточной точкой, а значения переменных вычисляются линейной интерполяцией, если разность значений меньше допустимой ($\frac{1}{50\gamma}$) и расстояние между окаймляющими точками меньше исходного шага, то такая точка выбрасывается из сетки расчетных точек. Это позволило автоматически иметь на фронте горения и в зоне «вспышки» нужное для точности счета количество расчетных точек.

Для счета использовалась следующая неявная четырехточечная схема:

$$\begin{aligned}\theta_i^{n+1} &= \theta_i^n + \frac{2\tau}{m_i + m_{i+1}} [b_{i+0,5} (\theta_{i+1}^{n+1} - \theta_i^{n+1}) - \\ &\quad - b_{i-0,5} (\theta_i^{n+1} - \theta_{i-1}^{n+1})] + a_i^{n+1} \varphi_i, \\ a_i^{n+1} &= a_i^n + \frac{2\tau L}{m_i + m_{i+1}} [b_{i+0,5} (a_{i+1}^{n+1} - a_i^{n+1}) - \\ &\quad - b_{i-0,5} (a_i^{n+1} - a_{i-1}^{n+1})] - \gamma a_i^{n+1} \varphi_i,\end{aligned}$$

где b и φ соответствующие функции θ и a . Такая схема устойчива и дает аппроксимацию первого порядка. Шаг по времени τ выбирался из двух соображений: он не должен превышать τ_0 (которое выверяется для уравнения теплопроводности без источников) и максимум изменения концентрации за один временной шаг не должен превышать допустимой величины ($\approx 0,03$). Указанная схема дивергентная, она удовлетворяет разностным законам сохранения

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{N-1} \frac{\theta_i^{n+1} + \theta_{i+1}^{n+1}}{2} m_{i+1} &= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\theta_i^n + \theta_{i+1}^n}{2} m_{i+1} + \\ + \tau \sum_{i=0}^{N-1} \frac{a_i^{n+1} \varphi_i + a_{i+1}^{n+1} \varphi_{i+1}}{2} m_{i+1} &- \tau \left[\frac{m_1}{m_0 + m_1} b_{-0,5} \times \right. \\ \times (\theta_0^{n+1} - \theta_{-1}^{n+1}) + \frac{m_0}{m_0 + m_1} b_{0,5} &(\theta_1^{n+1} - \theta_0^{n+1}) \left. \right] + \\ + \tau \left[\frac{m_{N+1}}{m_{N+1} + m_N} b_{N-0,5} (\theta_{N+1}^{n+1} - \theta_N^{n+1}) + \right. \\ \left. + \frac{m_N}{m_{N+1} + m_N} b_{N+0,5} (\theta_{N+1}^{n+1} - \theta_N^{n+1}) \right].\end{aligned}$$

Второй член правой части выражает изменение тепловой энергии на временном слое, вызванное химическими источниками, третий и четвертый члены описывают тепловые потоки через границу и указывают как правильно аппроксимировать краевые условия.

Алгоритм изменения сетки расчетных точек при пополнении новыми точками сохраняет $\sum_{i=0}^{N-1} \frac{\theta_i^n + \theta_{i+1}^n}{2} m_{i+1}$, а при выбрасывании не со-

храняет, но так как процедура выбрасывания происходит для слабо меняющихся профилей, то больших погрешностей не получается. Коэффициенты b и φ берутся снизу (для θ_i^n и a_i^n). Но когда фронт начинает формироваться и можно приближенно посчитать скорость его движения ω , то b и φ брались на фронте ($0 < a < 1$) со сдвигом по пространству на $-\omega\tau$, что равносильно выбору их с верхнего слоя.

ЗАДАЧА О ФРОНТЕ ГОРЕНИЯ

Нужно получить распределение переменных вдоль фронта горения, изучить влияние переменной плотности и температурной зависимости коэффициентов теплопроводности и диффузии на скорость горения и структуру фронта. Подобная задача изучалась в [4]. Задача рассматривалась в предположении, что газ невязкий ($Pr=0$), химические источники тепла значительно больше механических ($k=0$) и число Льюиса $L=1$ (в этом случае существует подобие полей концентраций и температур $a=1-\gamma(\theta+\theta_n)$). Находилась решение системы (1), зависящее от параметра $z=m-\omega t$, где ω — скорость распространения фронта. При $z=+\infty$ $\theta=-\theta_n$, $u=0$, $V=V_0$, $a=1$, при $z=-\infty$ $\theta=-\theta_n+1/\gamma$, $a=0$. Система (1) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} -\omega \theta'_z &= [(1+\beta\theta)^s / V \theta'_z]'_z + a \exp[\theta/(1+\beta\theta)], \\ -\omega u'_z + \pi p'_z &= 0, \\ +\omega V'_z + u'_z &= 0, \quad dx = V dz, \\ a &= 1 - \gamma(\theta + \theta_n), \quad p' = (1 + \beta\theta) [a + (1 - a)/\varepsilon]. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Заменяя $y = \frac{(1+\beta\theta)^s}{V} \frac{d\theta}{dz}$ в первом уравнении системы (5), а остальные интегрируя, мы сведем задачу к системе уравнений первого порядка и алгебраических соотношений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{d\theta} &= -\omega - \frac{a(1+\beta\theta)^s \exp[\theta/(1+\beta\theta)]}{yV}, \\ \frac{dx}{d\theta} &= \frac{(1+\beta\theta)^s}{y}, \\ a &= 1 - \gamma(\theta + \theta_n), \quad u = -\omega(V - V_0), \\ \omega^2(V - V_0) + \pi(p - p_0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Для первого уравнения системы (6) $y(-\theta_n) = y(-\theta_n + 1/\gamma) = 0$, для второго нет краевых условий, так как x находится с точностью до постоянного слагаемого. При $\theta = -\theta_n \exp[\theta/(1+\beta\theta)]$ принимает близкие к нулю значения; при замене ее нулем в окрестности $[-\theta_n, -\theta_n + h]$ существует такое значение ω , при котором удовлетворяются оба краевые условия. В точке $-\theta_n + 1/\gamma$ первое уравнение системы (6) имеет особую точку типа седла, в окрестности $[-\theta_n, -\theta_n + h]$ решение имеет вид $y = -\omega(\theta + \theta_n)$. Параметр ω на-

ходилса подбором; выходили по сепаратрисе из седла, численно интегрировали кривую $y(\theta)$ и стремились при $\theta = -\theta_n + h$ получить $y = -\omega h$. После определения ω находили $\theta(x)$, $a(x)$, $u(x)$ и $V(x)$.

*Поступила в редакцию
20/VI 1968*

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Вазов и Дж. Форсайт. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., 1963.
 2. В. К. Саульев. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. М., 1960.
 3. К. А. Багриновский, С. К. Годунов. Докл. АН СССР, 1957, 115, 3.
 4. Я. Б. Зельдович. ЖФХ, 1948, 12, 1.
-