УДК 532.526.3

УСТОЙЧИВОСТЬ И ПЕРЕХОД К ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЯХ С ГРАДИЕНТОМ ДАВЛЕНИЯ НАД МОНОЛИТНЫМ ПОДАТЛИВЫМ ПОКРЫТИЕМ

Д. А. Ашуров

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, 119991 Москва, Россия
E-mail: denis.ashurov@icloud.com

В линейной постановке исследуется задача об устойчивости пограничных слоев с градиентом давления, образующихся при обтекании поверхностей с однослойным вязкоупругим покрытием. В расчетах учитывается изменение скорости внешнего потока в продольном направлении, используются экспериментальные зависимости характеристик покрытия от частоты. С использованием e^N-метода оценивается влияние податливого покрытия на положение области ламинарно-турбулентного перехода. Показано, что даже в случае достаточно жесткого покрытия ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое с благоприятным градиентом давления может затягиваться по продольной координате приблизительно на 41 %.

Ключевые слова: податливые покрытия, пограничный слой, гидродинамическая устойчивость, ламинарно-турбулентный переход.

DOI: 10.15372/PMTF20220314

Введение. Исследования взаимодействия пограничного слоя с деформируемыми покрытиями начаты в работе [1]. За это время накоплен определенный теоретический и экспериментальный материал о взаимодействии турбулентного пограничного слоя с податливым покрытием [2, 3], а также о затягивании ламинарно-турбулентного перехода в пограничных слоях над податливым покрытием [4]. При теоретическом изучении ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое над податливыми покрытиями используются две модели: в первой покрытие представляется в виде пластины на пружинно-демпферном основании, во второй — в виде монолитного слоя вязкоупругого материала [5, 6]. Под монолитным податливым покрытием понимается однородный сплошной слой вязкоупругого материала. Преимуществами первой модели являются простота описания и незначительное увеличение сложности расчета по сравнению с расчетом для твердой стенки, однако эта модель не позволяет учесть продольные перемещения в покрытии и исследовать поведение возмущений в нем. За счет развития вычислительных технологий можно применять более подробную модель, с помощью которой в [7, 8] исследовалась устойчивость пограничного слоя Блазиуса над однослойными и многослойными податливыми покрытиями конечной толщины. При этом в качестве модели вязкоупругого покрытия использовались модель Кельвина — Фойгта и ее модификация на основе эмпирических зависимостей характеристик покрытия от частоты. В [9] экспериментально и теоретически исследовалась

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 20-11-20141).

задача об уменьшении трения в пограничном слое за счет использования податливых покрытий на реальной конструкции сегмента корпуса судна морской спасательной службы ФРГ. Путем сопоставления распределения давления, полученного в результате численного решения осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье — Стокса, с распределением давления во внешнем потоке для автомодельных пограничных слоев Фолкнера — Скэна был подобран параметр β, при котором соответствующий профиль скорости достаточно точно аппроксимировал распределение скоростей, полученное в результате численного моделирования. Такой подход позволил использовать профиль скорости Фолкнера — Скэна для изучения устойчивости процесса обтекания сегмента реального судна. Закономерным развитием исследований, выполненных в указанных работах, можно считать задачу об исследовании устойчивости и прогнозировании перехода в пограничных слоях с градиентом давления над монолитными вязкоупругими покрытиями.

В настоящей работе рассматривается соответствующая задача для нескольких значений параметра Хартри β, определяющего величину и знак градиента давления в автомодельных пограничных слоях Фолкнера — Скэна.

1. Постановка задачи. Рассматриваемые ниже течения в случае благоприятного градиента давления можно интерпретировать как пограничные слои на бесконечных клиньях с углом раствора $\pi\beta$. Схема изучаемого течения представлена на рис. 1. Ось x декартовой системы координат направлена вдоль поверхности клина, ось y — перпендикулярно ей. Начало системы координат совмещено с критической точкой потока (вершиной клина). После линеаризации, в предположении квазипараллельности потока двумерные уравнения Навье — Стокса принимают вид [10]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{dU}{dy} = -\frac{1}{\rho_f}\,\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\Delta u, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} + U\,\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_f}\,\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\Delta v,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

где $U(y)$ — распределение скорости невозмущенного потока; u, v, p — возмущения продольной, поперечной скоростей и давления соответственно; ν, ρ_f — кинематическая вязкость и плотность жидкости.

Возмущения в податливом покрытии удовлетворяют уравнениям Ламе [11]

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = C_T^2\Big(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\Big) + (C_L^2 - C_T^2)\Big(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial y}\Big),$$
$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = C_T^2\Big(\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}\Big) + (C_L^2 - C_T^2)\Big(\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial x\,\partial y}\Big), \tag{2}$$

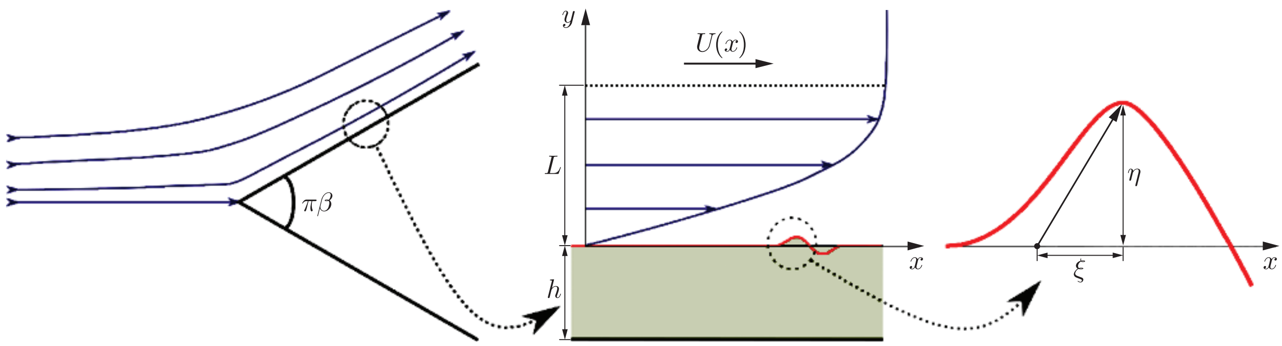

Рис. 1. Схема задачи

где C_T, C_L — скорости распространения поперечных и продольных волн соответственно; ξ, η — компоненты вектора смещения возмущения в покрытии. Используя метод нормальных мод, будем искать решение в виде

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ p \\ \xi \\ \eta \end{bmatrix} (x, y, t) = \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{p} \\ \hat{\xi} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix} (y)\, \mathrm{e}^{i(\alpha x - \omega t)}\,.$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{gathered} i(\alpha U - \omega)\hat{u} + \frac{dU}{dy}\,\hat{v} + \frac{i\alpha}{\rho_f}\,\hat{p} - \nu(\hat{u}'' - \alpha^2\hat{u}) = 0, \\ i(\alpha U - \omega)\hat{v} + \frac{1}{\rho_f}\,\hat{p}' - \nu(\hat{v}'' - \alpha^2\hat{v}) = 0, \\ i\alpha\hat{u} + \hat{v}' = 0, \\ \omega^2\hat{\xi} + C_T^2(-\alpha^2\hat{\xi} + \hat{\xi}'') + (C_L^2 - C_T^2)(-\alpha^2\hat{\xi} + i\alpha\hat{\eta}') = 0, \\ \omega^2\hat{\eta} + C_T^2(-\alpha^2\hat{\eta} + \hat{\eta}'') + (C_L^2 - C_T^2)(i\alpha\hat{\xi}' + \hat{\eta}'') = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Обезразмерим систему (3). В качестве характерного размера выберем локальную толщину вытеснения пограничного слоя $L = \delta^*(x)$, где

$$\delta^*(x) = \int\limits_0^\infty \frac{U_e(x) - U(y, x)}{U_e(x)}\,dy.$$

В качестве характерной скорости примем локальную скорость внешнего потока $V = U_e(x)$, в качестве характерной плотности — плотность жидкости ρ_f. Число Рейнольдса определим как $\mathrm{Re}_{\delta^*}(x) = U_e(x)\delta^*(x)/\nu$. Тогда $\tilde{\alpha} = \alpha\delta^*$, $\tilde{\omega} = \omega\delta^*/U_e$. Опуская знак “$\sim$” над безразмерными величинами, запишем уравнения (3) в виде

$$\begin{gathered} i(\alpha U - \omega)\hat{u} + \frac{dU}{dy}\,\hat{v} + i\alpha\hat{p} - \frac{1}{\mathrm{Re}_{\delta^*}}\,(\hat{u}'' - \alpha^2\hat{u}) = 0, \\ i(\alpha U - \omega)\hat{v} + \hat{p}' - \frac{1}{\mathrm{Re}_{\delta^*}}\,(\hat{v}'' - \alpha^2\hat{v}) = 0, \\ i\alpha\hat{u} + \hat{v}' = 0, \\ \omega^2\hat{\xi} + C_T^2(-\alpha^2\hat{\xi} + \hat{\xi}'') + (C_L^2 - C_T^2)(-\alpha^2\hat{\xi} + i\alpha\hat{\eta}') = 0, \\ \omega^2\hat{\eta} + C_T^2(-\alpha^2\hat{\eta} + \hat{\eta}'') + (C_L^2 - C_T^2)(i\alpha\hat{\xi}' + \hat{\eta}'') = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Далее будем использовать скорость внешнего потока и толщину покрытия как функции числа Рейнольдса. При исследовании устойчивости пограничных слоев число Рейнольдса можно рассматривать в качестве координаты вдоль потока; таким образом, параметрическая зависимость от продольной координаты x становится параметрической зависимостью от числа Рейнольдса Re_{δ^*}. Для семейства пограничных слоев Фолкнера — Скэна имеем

$$U_e(x) = Qx^m, \quad \mathrm{Re}_{\delta^*}(x) = \frac{U_e(x)\delta^*(x)}{\nu}, \quad \delta^*(x) = A(m)\sqrt{\frac{2\nu}{(m+1)Q}}\; x^{(1-m)/2},$$

где $A(m)$ — безразмерная (в переменных Блазиуса) толщина вытеснения пограничного слоя; Q — отношение скорости внешнего потока к расстоянию до критической точки в степени m. Тогда зависимость числа Рейнольдса от координаты x принимает вид

$$\mathrm{Re}_{\delta^*}(x) = A(m)\sqrt{\frac{2Q}{(m+1)\nu}}\, x^{(1+m)/2}.$$

Отсюда получаем

$$U_e(\mathrm{Re}_{\delta^*}) = \nu^{m/(m+1)} Q^{1/(m+1)} \Big(\frac{(m+1)\,\mathrm{Re}^2_{\delta^*}}{2A(m)^2}\Big)^{m/(1+m)}.$$

Выражение $\nu^{m/(m+1)} Q^{1/(m+1)}((m+1)/(2A(m)^2))^{m/(1+m)}$, имеющее размерность скорости, обозначим через U_e^*. Вместо m будем использовать параметр Хартри $\beta = 2m/(m+1)$, тогда для скорости получаем следующую формулу:

$$U_e(\mathrm{Re}_{\delta^*}) = U_e^*\,\mathrm{Re}^{\beta}_{\delta^*}\,.$$

Для того чтобы охарактеризовать толщину покрытия, введем безразмерный параметр $\mathrm{Re}_c = U_e^* h/\nu$ (h — толщина покрытия), тогда для безразмерной толщины покрытия $\tilde{h}$ имеем

$$\tilde{h}(\mathrm{Re}_{\delta^*}) = \frac{h}{\delta^*} = \frac{\mathrm{Re}_c}{\mathrm{Re}^{1-\beta}_{\delta^*}}.$$

В теории устойчивости пограничного слоя введем частотный параметр F [10], так что $F\,\mathrm{Re}_{\delta^*} = \omega$. Получаем

$$F(\mathrm{Re}_{\delta^*}) = \frac{2\pi f\nu}{U_e^2} = \frac{2\pi f\nu}{U_e^{*2}}\,\mathrm{Re}^{-2\beta}_{\delta^*} = F^*\,\mathrm{Re}^{-2\beta}_{\delta^*},$$

где f — физическая частота, Гц; F^* — угловая частота возмущения, обезразмеренная без использования величин, зависящих от x.

Граничные условия для системы (4) имеют вид

$$\begin{gathered}
y \to \infty: \qquad \hat{u} = \hat{v} = 0,\\
y = 0: \qquad -i\omega\hat{\xi} = \hat{u} + \hat{\eta}\,\frac{dU}{dy}, \qquad -i\omega\hat{\eta} = \hat{v},\\
y = 0: \qquad 2\rho C_T^2\Big(\hat{\eta}' + \Big(\frac{C_L^2}{2C_T^2} - 1\Big)(i\alpha\hat{\xi} + \hat{\eta}')\Big) = \frac{2}{\mathrm{Re}_{\delta^*}}\,\hat{v}' - \hat{p},\\
y = 0: \qquad \rho C_T^2(\hat{\xi}' + i\alpha\hat{\eta}) = \frac{1}{\mathrm{Re}_{\delta^*}}\Big(\hat{u}' + i\alpha\hat{v}' + \frac{d^2U}{dy^2}\,\hat{\eta}\Big),
\end{gathered} \tag{5}$$

где $\rho = \rho_c/\rho_f$ — безразмерная плотность покрытия; C_T, C_L — безразмерные скорости распространения волн в покрытии.

Возмущения в потоке затухают на бесконечности, податливое покрытие жестко соединено с твердой поверхностью, на границе покрытие — жидкость ставятся условия прилипания и непрерывности вектора напряжений. Последнее условие используется в линеаризованной форме. Подробный вывод граничных условий представлен в [7]. Таким образом, для решения задачи об устойчивости пограничного слоя Фолкнера — Скэна над податливым покрытием необходимо задать следующие параметры: U_e^* — скорость внешнего потока при $\mathrm{Re}_{\delta^*} = 1$; C_T, C_L — скорости распространения волн в податливом покрытии;

ρ — безразмерная плотность покрытия. Варьируя в определенных пределах F^* и Re_{δ^*}, можно построить нейтральную кривую и изолинии инкремента нарастания волн.

2. Численный метод. Система уравнений (4) с граничными условиями (5) является дифференциальной задачей на собственные значения, для решения которой используем метод коллокаций [12]. Физическую область потока ограничим координатой $y_{\max}$ и с использованием преобразования $y = L(1+\zeta)/(b-\zeta)$ $(b = 1+2L/y_{\max})$ отобразим на расчетную область $[-1, 1]$. Физическую область покрытия отобразим на $[-1, 1]$, используя линейное преобразование $y = h(\zeta - 1)/2$. Затем в соответствии с методом коллокаций заменим оператор дифференцирования "$'$" на матрицу дифференцирования D_N [12]:

$$(D_N)_{jl} = \begin{cases} \dfrac{\bar{c}_j}{\bar{c}_l}\dfrac{(-1)^{j+l}}{x_j - x_l}, & j \neq l, \\ -\dfrac{x_l}{2(1-x_l^2)}, & 1 \leqslant j = l \leqslant N-2, \\ \dfrac{2(N-1)^2+1}{6}, & j = l = 0, \\ -\dfrac{2(N-1)^2+1}{6}, & j = l = N-1, \end{cases}$$

где $x_j = \cos(\pi j/(N-1))$; $\bar{c}_j = 2$ при $j = 0,\ N-1$, $\bar{c}_j = 1$ при $1 \leqslant j \leqslant N-2$. Функции-параметры U, dU/dy и неизвестные функции $\hat{u}$, $\hat{v}$, $\hat{p}$, $\hat{\xi}$, $\hat{\eta}$ заменим на векторы их значений на сетке. Обозначим матрицу дифференцирования для области потока через D_f, для области покрытия — через D_c, эти матрицы получаются по правилу дифференцирования сложной функции из D_N.

В результате дискретизации получаем задачу на собственные значения

$$\begin{pmatrix} L_f & O \\ O & L_c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{q}_f \\ \hat{q}_c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} G_f & O \\ O & G_c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{q}_f \\ \hat{q}_c \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где L_f, G_f — матрицы, соответствующие дискретным линеаризованным уравнениям Навье — Стокса; L_c, G_c — матрицы, соответствующие дискретным уравнениям для покрытия. Порядок уравнений (1), (2) был понижен по α путем введения дополнительных переменных $\hat{f} = \alpha\hat{v}$, $\hat{g} = \alpha\hat{\xi}$, $\hat{h} = \alpha\hat{\eta}$. Выражения для L_f, L_c, G_f, G_c имеют вид

$$L_f = \begin{pmatrix} -i\omega I - D_f^2/\mathrm{Re} & \mathrm{diag}\,(U') & O & O \\ O & -i\omega I - D_f^2/\mathrm{Re} & D_f & O \\ O & D_f & O & O \\ O & O & O & I \end{pmatrix},$$

$$L_c = \begin{pmatrix} \omega^2 I + C_T^2 D_c^2 & O & O & O \\ O & \omega^2 I + C_L^2 D_c^2 & O & O \\ O & O & I & O \\ O & O & O & I \end{pmatrix},$$

$$G_f = \begin{pmatrix} -i\,\mathrm{diag}\,(U) & -iD_f/\mathrm{Re} & -iI & O \\ O & -i\,\mathrm{diag}\,(U) & O & -iI/\mathrm{Re} \\ -iI & O & O & O \\ O & I & O & O \end{pmatrix},$$

$$G_c = \begin{pmatrix} O & iC_d^2 D_c & C_L^2 I & O \\ iC_d^2 D_c & O & O & C_T^2 I \\ I & O & O & O \\ O & I & O & O \end{pmatrix},$$

$$\hat{q}_f = \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{p} \\ \hat{f} \end{pmatrix}, \qquad \hat{q}_c = \begin{pmatrix} \hat{\xi} \\ \hat{\eta} \\ \hat{g} \\ \hat{h} \end{pmatrix}.$$

Здесь каждый блок представляет собой матрицу размером $N \times N$; O, I — нулевая и единичная матрицы; $\operatorname{diag}(U)$, $\operatorname{diag}(U')$ — диагональные матрицы, порожденные векторами U и U' скорости основного потока и ее производной на сетке. Для удобства введено обозначение $C_d^2 = C_T^2 - C_L^2$.

Для удовлетворения однородных граничных условий (5) удалим из матриц соответствующие строки и столбцы с номерами:

$$\underset{u_0}{0}, \quad \underset{v_0}{N}, \quad \underset{\xi_{N-1}}{5N-1}, \quad \underset{\eta_{N-1}}{6N-1}.$$

Условия на границе раздела сред запишем в дискретном виде

$$-i\omega\hat{\xi}_0 = \hat{u}_{N-1} + \hat{\eta}_0 U'_{N-1}, \qquad -i\omega\hat{\eta}_0 = \hat{v}_{N-1},$$
$$2\rho C_T^2\Big(\hat{\eta}'_0 + \Big(\frac{C_L^2}{2C_T^2} - 1\Big)(i\alpha\hat{\xi}_0 + \hat{\eta}'_0)\Big) = \frac{2}{\mathrm{Re}_{\delta^*}}\,\hat{v}'_{N-1} - \hat{p}_{N-1}, \tag{7}$$
$$\rho C_T^2(\hat{\xi}'_0 + i\alpha\hat{\eta}_0) = \frac{1}{\mathrm{Re}_{\delta^*}}\,(\hat{u}'_{N-1} + i\alpha\hat{v}'_{N-1} + U''_{N-1}\hat{\eta}_0).$$

Для того чтобы использовать граничные условия (7), заменим соответствующие строки в итоговых матрицах системы (6). Для вычисления функций-параметров U, dU/dy, входящих в задачу (6), решаем уравнение Фолкнера — Скэна, сводящееся к системе

$$\frac{d}{d\eta}\begin{bmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \beta(\Psi_1^2 - 1) - \Psi_0\Psi_2 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Здесь η — автомодельная переменная Блазиуса, связанная с безразмерной переменной y/δ^* следующим образом:

$$A(\beta)\eta = \frac{y}{\delta^*}, \qquad A(\beta) = \int\limits_0^\infty (1 - \Psi_1)\,d\eta.$$

Для решения (8) используется стандартная функция `scipy.integrate.solve_bvp` библиотеки SciPy. Для решения полученной алгебраической задачи на собственные значения используется стандартный алгоритм `scipy.linalg.eigvals` библиотеки SciPy. Далее индекс δ^* у числа Рейнольдса опускается.

3. Предсказание с помощью e^N-метода перехода к турбулентности. Рассмотрим линейное развитие растущих волн Толлмина — Шлихтинга в потоке. В силу линейности волны, имеющие различные частоты, развиваются независимо. Зафиксируем частоту возмущения f, тогда для данной координаты вдоль поверхности тела x_1 логарифм отношения амплитуды возмущения в точке x_1 к начальной амплитуде равен

$$\ln\frac{A_1}{A_0}\,(f) = -\int\limits_{x_F}^{x_1} \alpha_i^d(x)\,dx,$$

где x_F — координата нижней ветви нейтральной кривой для данной частоты возмущения; α_i^d — мнимая часть размерного волнового числа, соответствующего волне Толлмина — Шлихтинга.

Для того чтобы охарактеризовать поведение возмущений в целом, строится огибающая кривых нарастания для волн различных частот, так называемый N-фактор:

$$N(x_1) = \sup_f \ln \frac{A_1}{A_0}(f).$$

Используя e^N-метод и эмпирические зависимости [13]

$$N_{t1} = 2{,}13 - 6{,}18 \log_{10} \mathrm{Tu}, \qquad N_{t2} = 5 - 6{,}18 \log_{10} \mathrm{Tu}$$

(Tu — уровень внешней турбулентности, %; N_{t1} — N-фактор начала перехода; N_{t2} — N-фактор конца перехода), можно предсказать координаты начала и конца ламинарно-турбулентного перехода.

Используя переменные, в которых решается задача на собственные значения (6), отношения амплитуд возмущения представим в виде логарифма

$$N(\mathrm{Re}, \mathrm{Re}_F) = -\int_{x_F}^{x} \alpha_i^d \, dx = -\int_{x_F}^{x} \frac{\alpha_i}{\delta^*(x)} \, dx =$$

$$= -\int_{\mathrm{Re}_F}^{\mathrm{Re}} \frac{\alpha_i}{(\nu/U_e^*) \, \mathrm{Re}^{1-\beta}} \, \frac{\nu}{U_e^*} \, \frac{(2-\beta) \, \mathrm{Re}^{1-\beta}}{A(\beta)^2 (2-\beta)} \, d\,\mathrm{Re} = -\frac{1}{A(\beta)^2} \int_{\mathrm{Re}_F}^{\mathrm{Re}} \alpha_i \, d\,\mathrm{Re}\,. \qquad (9)$$

Таким образом, решая задачи на собственные значения для области параметров на плоскости (Re, F^*), можно вычислить значение интеграла в (9) и построить кривые нарастания для различных частот. Графически определяя огибающую для этого семейства кривых, получаем значения Re_{t1} и Re_{t2} чисел Рейнольдса для начала и конца ламинарно-турбулентного перехода соответственно. В дальнейших вычислениях значение параметра Tu принято равным 0,15 %, поскольку при этом значении турбулентности внешнего потока результаты, предсказанные с помощью e^N-метода, хорошо согласуются с экспериментальными данными [13].

4. Свойства покрытия. При гармонической зависимости напряжений или деформаций от времени перемещения в вязкоупругом материале описываются уравнениями Ламе с комплексными коэффициентами [14]. Для более детального представления свойств покрытия используются экспериментальные зависимости модуля Юнга E и коэффициента потерь μ от частоты и вычисляется комплексный модуль Юнга $E^* = E(1-i\mu)$. Коэффициент Пуассона принят равным 0,47, поскольку монолитные податливые покрытия являются слабосжимаемыми. Используя указанные величины, можно вычислить входящие в уравнения значения скоростей распространения волн в покрытии. В качестве материала покрытия выбрана кремний-органическая резина PENTA-710 со следующими физическими характеристиками [3, 15]: $E^* = (0{,}1004 \log_{10} f + 0{,}9394)(1 - i(0{,}0016 \log_{10} f + 0{,}0511))$ МПа, $\sigma = 0{,}47$, $\rho_c = 1120$ кг/м^3.

5. Валидация метода. Для валидации указанных выше методов проведено несколько расчетов для задач с известными решениями.

На рис. 2,*а* приведены нейтральные кривые для пограничного слоя Блазиуса над податливым покрытием, исследованным в работе [7] и имеющим следующие характеристики: $E^* = (0{,}287 \log_{10} f - 0{,}036)(1 - 0{,}1i)$ МПа, $\sigma = 0{,}48$, $\rho_c = 1100$ кг/м^3.

На рис. 2,*б* приведены огибающие кривых нарастания для пограничного слоя Блазиуса на твердой пластине. Таким образом, реализованный численный алгоритм позволяет строить нейтральные кривые и огибающие кривых нарастания с достаточной точностью.

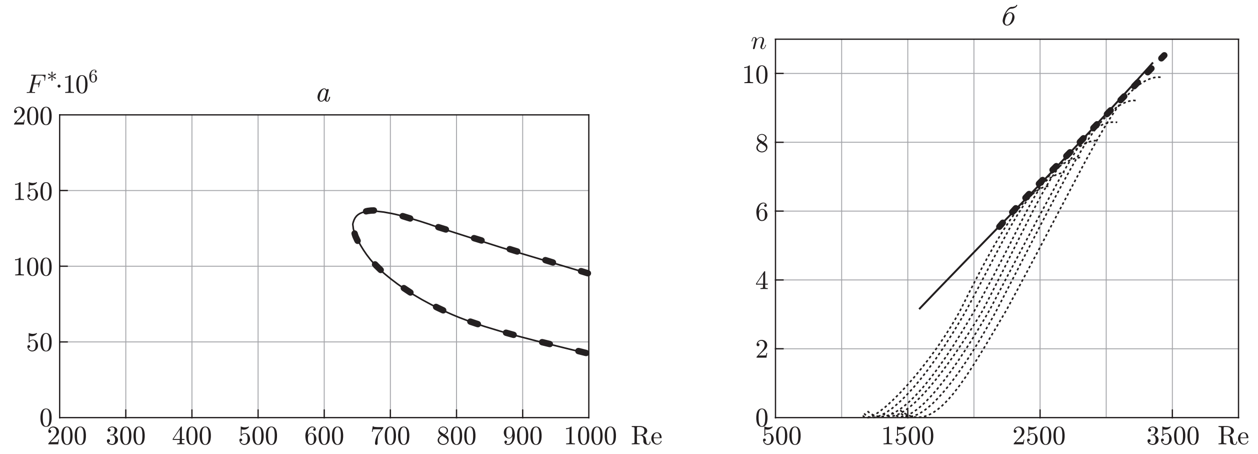

Рис. 2. Нейтральные кривые для пограничного слоя Блазиуса над податливым покрытием (*а*) и огибающие кривых нарастания для пограничного слоя Блазиуса на твердой пластине (*б*):

сплошная линия — данные работы [7], штриховая — данные настоящей работы, пунктирные линии — кривые, для которых построены огибающие

6. Результаты расчетов. Построены нейтральные кривые и линии уровня инкремента нарастания для различных значений параметра β, толщины покрытия и скорости набегающего потока. Число Рейнольдса покрытия Re_c выбиралось таким образом, чтобы для данных значений ν и U_e^* две размерные толщины покрытия составляли 3 и 9 мм соответственно. Значения U_e^* выбирались таким образом, чтобы скорость внешнего потока при значении числа Рейнольдса, равном критическому значению для твердой стенки, составляла 10 и 15 м/с соответственно. Значение кинематической вязкости ν принято равным $1{,}3 \cdot 10^{-6}$ м^2/с.

Анализ построенных в результате расчетов нейтральных кривых и линий уровня инкремента нарастания волн позволяет сделать вывод, что в случае пограничных слоев с благоприятным градиентом давления (рис. 3) при увеличении толщины покрытия и скорости набегающего потока интенсивность нарастания возмущений в пограничном слое уменьшается, затягивая ламинарно-турбулентный переход.

Для каждого из рассчитанных течений существовала некоторая толщина, начиная с которой дальнейшее увеличение толщины покрытия не изменяло нейтральные кривые. Это происходит потому, что в покрытии небольшой толщины растущая волна отражается от нижней абсолютно твердой стенки и возвращается в поток. Для покрытия достаточно большой толщины растущая волна полностью затухает, не достигая нижней стенки.

Влияние скорости набегающего потока можно объяснить следующим образом. Рассмотрим граничные условия (5). Пренебрегая слагаемыми при $1/\,\mathrm{Re}$ и выполнив несложные преобразования, получаем

$$\hat{\xi}_0'' + \frac{\sigma}{1-2\sigma}\,\alpha^2\hat{\xi}_0 = \frac{i\alpha}{\rho C_L^2}\,\hat{p}_{N-1}. \qquad (10)$$

Соотношение (10) допускает следующую интерпретацию: слагаемое $1/(\rho C_L^2)$, или в размерном виде $\rho_f U_e(x)^2/(\rho_c \tilde{C}_L^2)$ ($\tilde{C}_L$ — размерная скорость распространения продольных волн), определяет амплитуду возмущений, передаваемых в покрытие из потока. Увеличивая это слагаемое за счет увеличения скорости набегающего потока, получаем большие амплитуды возмущений в покрытии. Таким образом, интенсивность взаимодействия покрытия с потоком увеличивается.

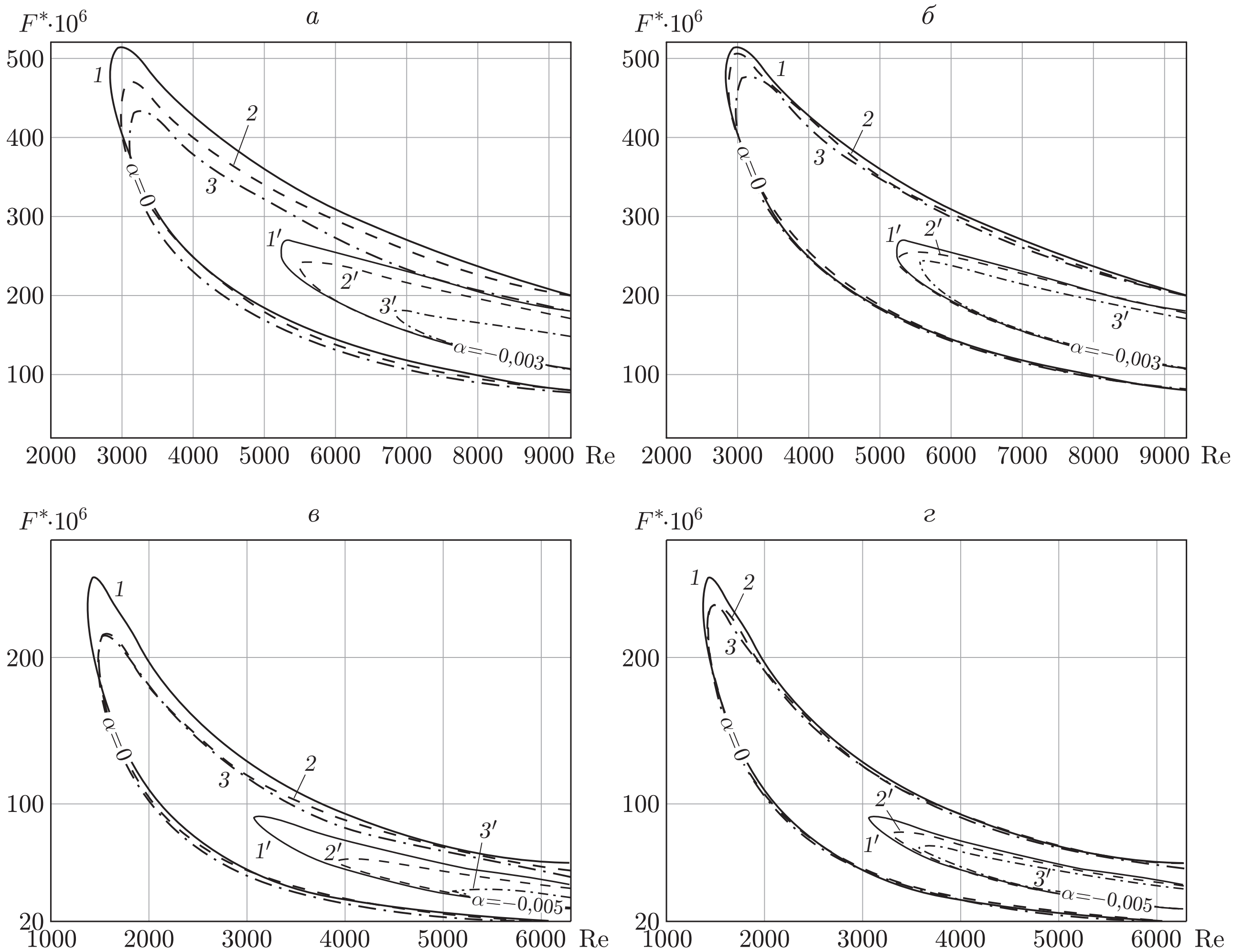

Рис. 3. Нейтральные кривые в случае благоприятного градиента давления при $h = 3$; 9 мм и различных значениях параметров:
а — $\beta = 0{,}2$, $U_e^* = 3{,}06$ м/с, $\mathrm{Re}_c = 7060$; 21 180, $U_e(\mathrm{Re}_{cr}) = 15$ м/с, *б* — $\beta = 0{,}2$, $U_e^* = 2{,}04$ м/с, $\mathrm{Re}_c = 4700$; 14 100, $U_e(\mathrm{Re}_{cr}) = 10$ м/с, *в* — $\beta = 0{,}1$, $U_e^* = 7{,}28$ м/с, $\mathrm{Re}_c = 16\,800$; 50 400, $U_e(\mathrm{Re}_{cr}) = 15$ м/с, *г* — $\beta = 0{,}1$, $U_e^* = 4{,}85$ м/с, $\mathrm{Re}_c = 11\,200$; 33 600, $U_e(\mathrm{Re}_{cr}) = 10$ м/с; сплошные линии — твердая стенка, штриховые — податливое покрытие, штрихпунктирные — податливое покрытие увеличенной толщины; *а, б* — *1–3* — $\alpha = 0$, *1′–3′* — $\alpha = -0{,}003$, *в, г* — *1–3* — $\alpha = 0$, *1′–3′* — $\alpha = -0{,}005$

В случае течений с неблагоприятным градиентом давления при заданных параметрах (рис. 4) в пределах расчетной области неустойчивая мода затухает в покрытии толщиной 3 мм. Это объясняется тем, что в таких течениях рост возмущений происходит при значениях числа Рейнольдса, меньших, чем для пограничных слоев с благоприятным градиентом давления, и приводит к росту безразмерной толщины покрытия. Поэтому на рис. 3, 4 показаны нейтральные кривые и линии уровня инкремента нарастания только для этого покрытия.

Несмотря на то что во всех представленных течениях изменения нейтральной кривой и критического числа Рейнольдса незначительны, линии уровня мнимой части волнового числа неустойчивой моды смещаются в область больших значений числа Рейнольдса, что обеспечивает затягивание ламинарно-турбулентного перехода.

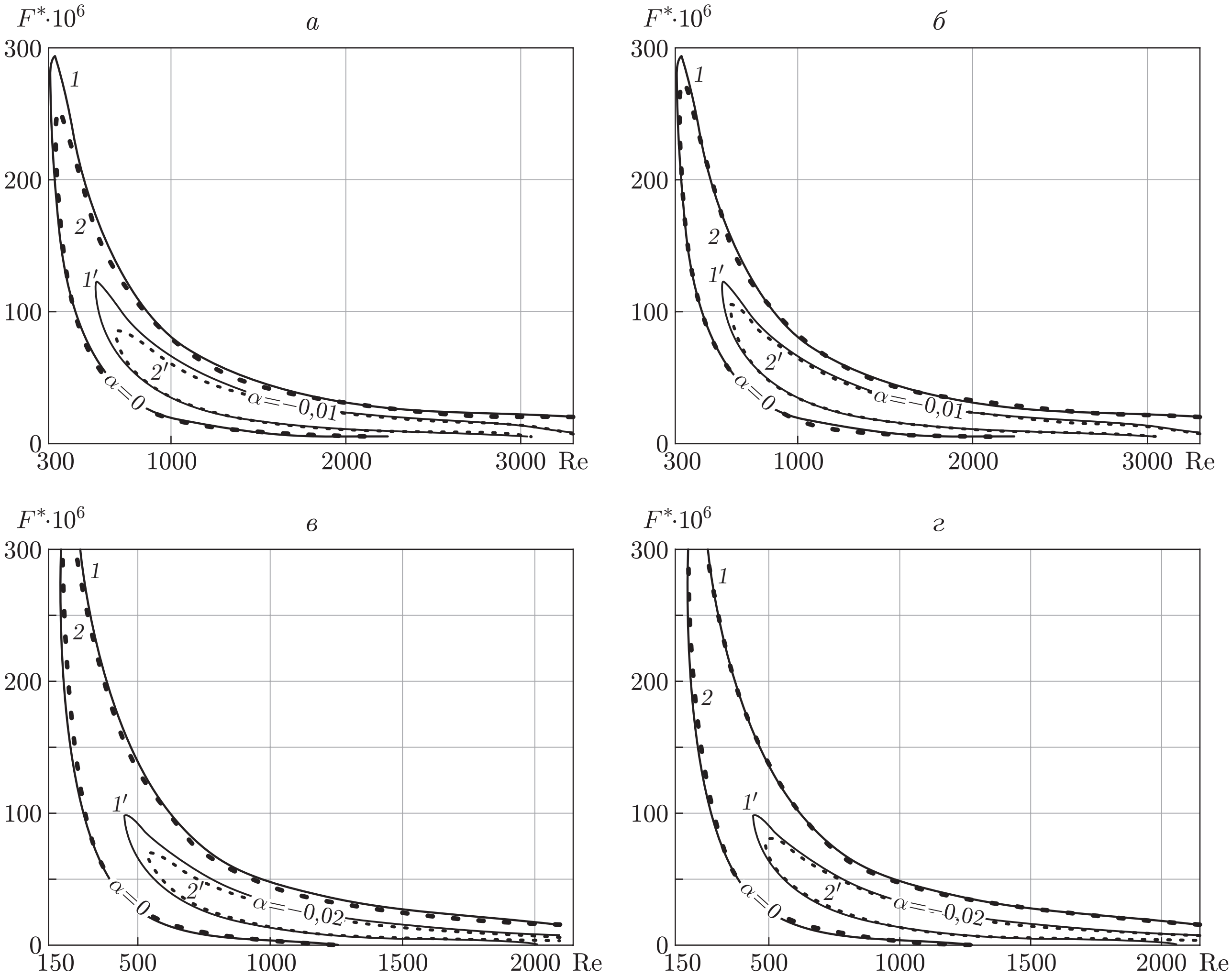

Рис. 4. Нейтральные кривые в случае неблагоприятного градиента давления при $h = 3$; 9 мм и различных значениях параметров:
а — $\beta = -0{,}05$, $U_e^* = 20{,}0$ м/с, $\mathrm{Re}_c = 46\,170$; $138\,510$, $U_e(\mathrm{Re}_{cr}) = 15$ м/с, *б* — $\beta = -0{,}05$, $U_e^* = 13{,}34$ м/с, $\mathrm{Re}_c = 30\,780$; $92\,340$, $U_e(\mathrm{Re}_{cr}) = 10$ м/с, *в* — $\beta = -0{,}10$, $U_e^* = 25{,}47$ м/с, $\mathrm{Re}_c = 58\,770$; $176\,310$, $U_e(\mathrm{Re}_{cr}) = 15$ м/с, *г* — $\beta = -0{,}10$, $U_e^* = 16{,}98$ м/с, $\mathrm{Re}_c = 39\,180$; $117\,540$, $U_e(\mathrm{Re}_{cr}) = 10$ м/с; сплошные линии — твердая стенка, штриховые — податливое покрытие; *а, б* — *1*–*3* — $\alpha = 0$, *1′*–*3′* — $\alpha = -0{,}01$, *в, г* — *1*–*3* — $\alpha = 0$, *1′*–*3′* — $\alpha = -0{,}02$

Поскольку для исследования было выбрано достаточно твердое покрытие, критическое число Рейнольдса для всех исследованных течений изменяется незначительно — на 5–7 % (рис. 5,*а*). Тем не менее изменение числа Рейнольдса перехода значительно для большой скорости набегающего потока ($U_e(\mathrm{Re}_{cr}) = 15$ м/с) и больших значений β. В случае $\beta = 0{,}1$ число Рейнольдса конца перехода увеличивается на 18 % (рис. 5,*б*). С учетом нелинейной зависимости продольной координаты от числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_{\delta^*} \sim x^{1/(2-\beta)}$ такое изменение приводит к увеличению координаты перехода приблизительно на 37 %. В случае $\beta = 0{,}2$ продольная координата конца перехода увеличивается на 41 % соответственно (рис. 6). Для сравнения в пограничном слое Блазиуса ($\beta = 0$) продольная координата увеличивается на 15 и 32 % соответственно. С уменьшением β влияние податливого покрытия на затягивание ламинарно-турбулентного перехода уменьшается.

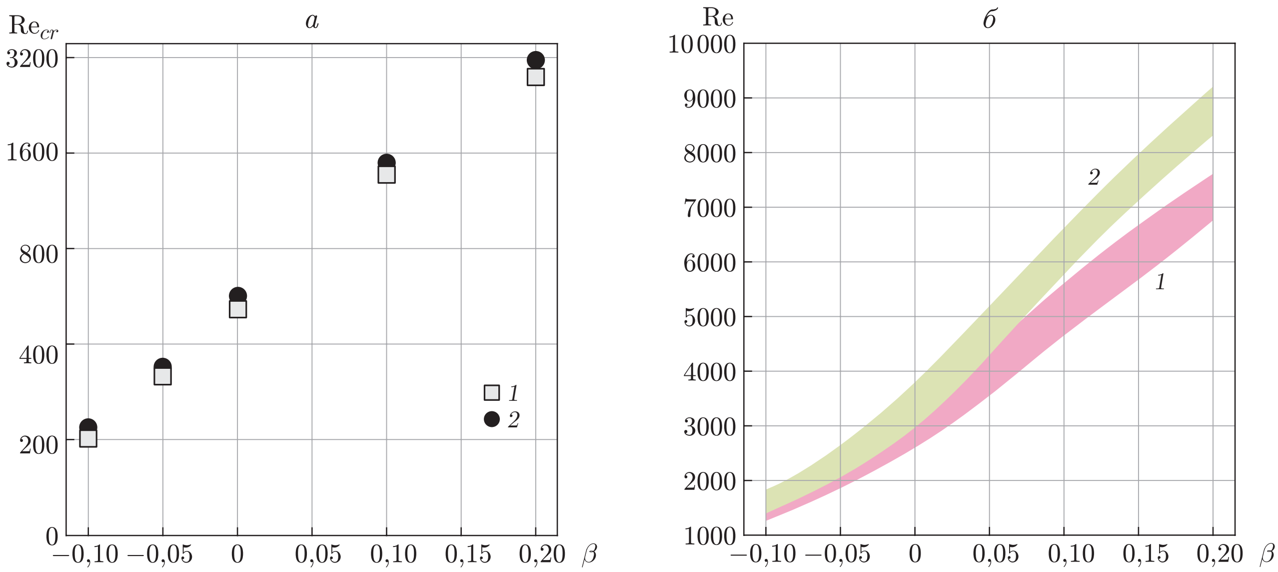

Рис. 5. Зависимости критического числа Рейнольдса (a) и числа Рейнольдса переходной зоны ($б$) от параметра β при $U_e(\mathrm{Re}_{cr}) = 15$ м/с, $h = 3$ мм:
1 — твердая стенка, *2* — податливое покрытие

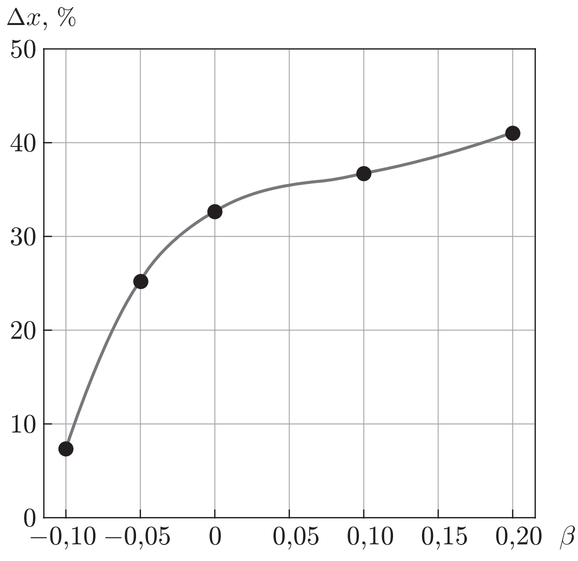

Рис. 6. Зависимость продольной координаты конца ламинарно-турбулентного перехода от параметра β при использовании податливых покрытий:
точки — результаты расчетов, линия — интерполяция промежуточных значений

Заметим, что податливые покрытия целесообразно использовать в случае течений с благоприятным градиентом давления, как, например, в носовой части судна, где трение максимально.

Заключение. В работе исследована задача об устойчивости параметрического семейства автомодельных пограничных слоев Фолкнера — Скэна над монолитным податливым покрытием. Показано, что для течений с благоприятным градиентом давления способность покрытия затягивать ламинарно-турбулентный переход увеличивается по сравнению с пограничными слоями в отсутствие градиента давления и с неблагоприятным градиентом. Приведены результаты, свидетельствующие о смещении области ламинарно-турбулентного перехода вниз по потоку. В силу жесткости используемого для расчетов покрытия изменение критического числа Рейнольдса менее значительно, чем в работах [7, 8], однако анализ результатов расчетов показывает более существенное влияние покрытия на ламинарно-турбулентный переход, чем на изменение критического числа Рейнольдса. Так, для течений с благоприятным градиентом давления при $\beta = 0{,}1$; $0{,}2$ в случае использования рассматриваемого покрытия координата конца ламинарно-турбулентного перехода увеличивается на 37 и 41 % соответственно по сравнению с увеличением на 32 % для пограничного слоя Блазиуса ($\beta = 0$).

Автор выражает благодарность В. В. Веденееву за внимание к работе и многочисленные обсуждения и А. В. Бойко за обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Kramer M. O.** Boundary layer stabilization by distributed damping // J. Amer. Soc. Naval. Engrs. 1960. V. 72, N 1. P. 25–34.
2. **Ivanov O. O., Vedeneev V. V., Kulik V. M., Boiko A. V.** The influence of compliant coatings on skin friction in the turbulent boundary layer // J. Phys. Conf. Ser. 2017. V. 894, N 1. 012036.
3. **Кулик В. М., Бойко А. В., Ли И.** Двухслойные податливые покрытия для управления турбулентным пограничным слоем // Теплофизика и аэромеханика. 2019. Т. 26, № 1. С. 51–62.
4. **Yeo K. S.** The stability of boundary-layer flow over single- and multiple-layer viscoelastic walls // J. Fluid Mech. 1988. V. 196. P. 359–408.
5. **Kulik V. M., Lee I., Chun H. H.** Wave properties of coating for skin friction reduction // Phys. Fluids. 2008. V. 20. P. 75–109.
6. **Веденеев В. В.** Распространение волн в слое вязкоупругого материала, подстилающего слой движущейся жидкости // Прикл. математика и механика. 2016. Т. 80, № 3. С. 317–343.
7. **Бойко А. В., Кулик В. М., Филимонов В. А.** Устойчивость пограничного слоя плоской пластины над податливыми покрытиями повышенной прочности // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Сер. Физика. 2011. Т. 6, № 4. С. 104–115.
8. **Даржаин А. Э., Бойко А. В., Кулик В. М., Чупахин А. П.** Параметрическое исследование гидродинамической устойчивости пограничного слоя плоской пластины над двухслойными податливыми покрытиями // Теплофизика и аэромеханика. 2019. Т. 27, № 2. С. 189–200.
9. **Schrader L. U.** Passive drag reduction via bionic hull coatings // J. Ship Res. 2019. V. 63. P. 206–218.
10. **Boiko A. V.** Physics of transitional shear flows / A. V. Boiko, G. R. Grek, A. V. Dovgal, V. V. Kozlov. Berlin: Springer Verlag, 2011.
11. **Ландау Л. Д.** Теория упругости / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1987.

12. **Canuto C.** Spectral methods. Evolution to complex geometries and applications to fluid dynamics / C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, T. A. Zang. Berlin: Springer Verlag, 2007.
13. **van Ingen J.** The e^N method for transition prediction. Historical review of work at TU delft // Proc. of the 38th Fluid dynamics conf. and exhibit., Seattle (USA), June 23–26, 2008. Seattle: Amer. Inst. Aeronaut. Astronaut. Inc., 2008. P. 1–49.
14. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.
15. **Кулик В. М., Бойко А. В., Ли И.** Снижение трения податливого покрытия из гомогенных материалов // Теплофизика и аэромеханика. 2018. Т. 25, № 4. С. 537–546.

Поступила в редакцию 18/V 2021 г.,
после доработки — 17/VI 2021 г.
Принята к публикации 28/VI 2021 г.