

УДК 512.647

ИНВОЛЮЦИИ И КОН-ИНВОЛЮЦИИ

Х.Д. Икрамов

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Ленинские горы, 1, Москва, 119992

E-mail: ikramov@cs.msu.su

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 4, Vol. 16, 2023.

Икрамов Х.Д. Инволюции и кон-инволюции // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2023. — Т. 26, № 4. — С. 379–388.

Дан обзор свойств сравнительно малоизвестного класса матриц, называемых кон-инволюциями, путем сопоставления их свойств со свойствами хорошо изученных инволютивных матриц или, короче, инволюций.

DOI: 10.15372/SJNM20230403

EDN: CFSLSR

Ключевые слова: *подобия, конгруэнции, инволюции, кон-инволюции, унитарно квазидиагонализуемые матрицы, конгруэнтно-нормальные матрицы.*

Ikramov Kh.D. Involutions and coninvolutions // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2023. — Vol. 26, № 4. — P. 379–388.

A review of the relatively little-known matrix class, called coninvolutions, is given. The properties of these matrices are compared with those of the well studied involutory matrices or, briefly, involutions.

Keywords: *similarities, congruences, involutions, coninvolutions, unitarily quasi-diagonalizable matrices, congruence-normal matrices.*

1. Введение

Редкая публикация по теоретической или вычислительной линейной алгебре обходится без ссылок на книгу R.A. Horn, C.R. Johnson “Matrix Analysis”. Эта книга известна нашему читателю по ее русскому переводу [8]. Популярность книги побудила авторов (а точнее, первого автора Роджера Хорна) выпустить в 2013 г. второе, дополненное ее издание (см. [11]).

Гораздо менее известна еще одна книга тех же авторов: R.A. Horn, C.R. Johnson “Topics in Matrix Analysis” Cambridge University Press, 1991. Это объясняется тем, что она адресуется более искушенному в алгебре читателю по сравнению с “Матричным анализом”, сочетающим в себе черты энциклопедии и учебника.

В последней, шестой главе этой объемистой (около 600 страниц) книги читаем следующее: полярное разложение квадратной комплексной матрицы A есть “естественное обобщение показательной формы $z = re^{i\theta}$ комплексного числа. Однако имеется иное, еще более естественное обобщение показательной формы”, а именно представление A в виде $A = RC$, где R — вещественная матрица, а C — комплексная матрица, удовлетворяющая соотношению $C\bar{C} = I$. Далее авторы доказывают существование этого альтернативного полярного разложения для всякой невырожденной матрицы и устанавливают некоторое сходство его свойств со свойствами привычного разложения. Например, если матрицы R и C коммутируют, то A перестановочна с матрицей $\bar{A}$: $A\bar{A} = \bar{A}A$. Это аналог известного

факта: если эрмитова положительно определенная матрица H коммутирует с унитарной матрицей U , то их произведение $A = HU$ есть нормальная матрица, т.е. $AA^* = A^*A$.

Матрицы C , для которых $C\overline{C} = I$, называются кон-инволюциями. В определенном смысле они являются аналогами инволютивных матриц (иначе инволюций) A , подчиняющихся соотношению $A^2 = I$. Но в то время как об инволюциях известно почти все (хотя кое-что новое для себя читатель, возможно, узнает из пункта 2), кон-инволюции остаются до сих пор малоизвестным классом матриц. Цель настоящей статьи — популяризация этого класса путем сопоставления его свойств со свойствами класса инволюций.

2. Инволюции

Инволютивной называется $n \times n$ -матрица A такая, что

$$A^2 = I_n. \quad (1)$$

Очень часто A называют просто инволюцией.

Из определения (1) очевидно, что A — невырожденная матрица. Более того,

$$A^{-1} = A.$$

Перечислим менее очевидные свойства инволюций.

a1 Всякая инволюция диагонализуема подобием, и ее собственными значениями могут быть только числа 1 и -1 . Пусть их кратности равны соответственно r и s ($r + s = n$). Линейно независимые собственные векторы $u_1, \dots, u_r$, относящиеся к числу 1, могут быть найдены как фундаментальные решения однородной системы линейных уравнений

$$(A - I_n)x = 0.$$

Соответственно, линейно независимые собственные векторы $v_1, \dots, v_s$ для собственного значения -1 находятся из системы

$$(A + I_n)x = 0.$$

Определим матрицы

$$\Lambda = \text{diag} \left(\underbrace{1, \dots, 1}_{r \text{ раз}}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{s \text{ раз}} \right),$$

$$P = (u_1 \dots u_r v_1 \dots v_s).$$

Они дают спектральное разложение матрицы A :

$$A = P\Lambda P^{-1}. \quad (2)$$

Из предыдущего обсуждения ясно, что разложение (2) может быть найдено посредством *рационального* вычисления, т.е. вычисления, состоящего из конечного числа шагов и использующего только арифметические операции.

Предположим, что инволюция A является вдобавок эрмитовой матрицей. Тогда два ее собственных подпространства для 1 и -1 ортогональны, т.е. каждый из векторов u_i ($1 \leq i \leq r$) ортогонален к любому вектору v_j ($1 \leq j \leq s$). Если базисы обоих подпространств подвергнуть процессу ортонормализации, то полученные системы векторов $\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_r$ и $\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_s$ вместе составляют ортонормированный базис пространства $\mathbf{C}^n$, а матрица

$$\hat{P} = (\hat{u}_1 \dots \hat{u}_r \hat{v}_1 \dots \hat{v}_s)$$

унитарна. В этом случае (2) заменяется разложением

$$A = \hat{P} \Lambda \hat{P}^*. \quad (3)$$

Вычисление этого разложения остается конечным процессом, но уже не является рациональным из-за необходимости использовать квадратичные радикалы.

- б1** Возвращаясь к случаю произвольной, не обязательно эрмитовой инволюции, обсудим, к какому виду можно привести A , ограничиваясь унитарными подобиями. Как и для всякой квадратной матрицы, можно получить треугольную форму, используя теорему Шура. Этой треугольной форме в случае инволюции A можно придать вид прямой суммы

$$I_k \oplus (-I_l) \oplus \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \oplus \dots \oplus \begin{pmatrix} 1 & \alpha_m \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где $k + l + 2m = n$. Возможность приведения инволюции к виду (4) есть частный случай более общего факта, который мы сформулируем после двух предварительных определений.

Квадратную матрицу B называют *квазидиагонализуемой*, если посредством подобия она может быть преобразована в прямую сумму блоков порядка 1 и 2. (Если в этой сумме все блоки первого порядка, то B — обычная диагонализуемая матрица.) Матрица B *унитарно квазидиагонализуема*, если к указанной прямой сумме можно прийти посредством унитарного подобия.

Теорема 1 [3]. *Всякая матрица B с квадратичным минимальным многочленом унитарно квазидиагонализуема.*

Помимо инволюций, имеющих минимальный многочлен $\lambda^2 - 1$, эта теорема охватывает проекторы $(\lambda^2 - \lambda)$ и нильпотенты индекса два (λ^2) .

Процесс приведения неэрмитовой инволюции к виду (4) не является рациональным, а при $m > 4$ — и конечным, так как требует вычисления собственных значений некоторой $m \times m$ -матрицы (см. по этому поводу [2]).

- в1** Возможность приведения инволюции к прямой сумме (4) имеет любопытное приложение к следующей задаче: можно ли посредством рационального вычисления установить, будут ли заданные комплексные $n \times n$ -матрицы A и B унитарно подобны?

Если к числу разрешенных операций присоединить взятие комплексного сопряжения, то положительный ответ на этот вопрос дает критерий Шпехта–Пирси (см. [8, §2.2]): A и B унитарно подобны, если и только если

$$\text{tr} W(A, A^*) = \text{tr} W(B, B^*) \quad (5)$$

для любого слова (иначе, одночлена) $W(s, t)$ от некоммутирующих переменных s и t . Рациональным этот критерий сделал Пирси, показавший, что проверку равенств (5) достаточно проводить для слов W степени не более $2n^2$. В настоящее время известны более сильные ограничения на степень проверяемых слов, однако для матриц A и B общего вида вычислительная работа, требуемая для установления унитарного подобия, остается огромной.

Иначе обстоит дело для инволюций A и B и, более общо, для любых матриц A и B с квадратичными минимальными многочленами. Так, для инволюций из возможности приведения A и B к прямым суммам (4) можно сделать следующий вывод.

Теорема 2 [9]. *Инволюции A и B одинакового порядка n унитарно подобны тогда и только тогда, когда они имеют одни и те же собственные значения и сингулярные числа.*

Тождество спектров устанавливается проверкой равенств

$$\operatorname{tr}(A^i) = \operatorname{tr}(B^i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6)$$

а совпадение сингулярных чисел — проверкой равенств

$$\operatorname{tr}(AA^*)^i = \operatorname{tr}(BB^*)^i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Тем самым для установления унитарного подобия инволюций A и B достаточно проверки $2n$ равенств (6) и (7).

г1 Как указано в п. б1, процесс приведения инволюции к виду (4) в общем случае не является конечным. Однако существует компактная форма, пусть не столь простая, как (4), к которой всякую инволюцию можно привести конечным вычислением. Это ленточная форма с шириной ленты, не превосходящей 7.

Приведение инволюции к ленточной форме осуществляется обобщенным процессом Ланцоша [4]. Дадим краткое описание этого процесса.

Пусть задана $n \times n$ -матрица A и фиксирован ненулевой начальный вектор v . Обобщенной последовательностью Крылова назовем последовательность векторов

$$v, Av, A^2v, A^3v, \dots \quad (8)$$

Удобно рассматривать последовательность (8) как состоящую из сегментов длины соответственно $1, 2, 4, 8, 16, \dots$. Сегмент с номером k (мы называем его k -м *слоем*) можно описать как совокупность векторов вида $u = W_k(A, A^*)v$, где $W_k(s, t)$ пробегает множество слов степени k от некоммутирующих переменных s и t . Порядок слов внутри слоя может быть произвольным. Символ $W_0(s, t)$ обозначает единицу.

Суть обобщенного процесса Ланцоша состоит в ортогонализации последовательности (8). Пусть $v_1, v_2, v_3, \dots$ — получаемые при этом *ненулевые* ортогональные векторы. Положим

$$\mathcal{K}_m = \operatorname{span}(v_1, \dots, v_m).$$

Обозначим через $\operatorname{orth}_{\mathcal{K}} w$ ортогональную составляющую в разложении вектора w относительно линейного подпространства $\mathcal{K}$.

Обобщенный процесс Ланцоша может быть описан таким образом.

1. Выбрать ненулевой вектор v и положить $v_1 = v$.
2. Пусть уже построены ненулевые векторы $v_1, \dots, v_m$, составляющие ортогональный базис линейной оболочки первых k_m векторов $u_1, \dots, u_{k_m}$ последовательности (8). Если перпендикуляр $\operatorname{orth}_{\mathcal{K}_m} u_{k_m+1}$ не равен нулю, то принять его в качестве v_{m+1} и положить $k_{m+1} = k_m + 1$. В противном случае построить вектор $\operatorname{orth}_{\mathcal{K}_m} u_{k_m+2}$, если он ненулевой, принять его в качестве v_{m+1} и положить $k_{m+1} = k_m + 2$, и т. д.

Обобщенным подпространством Крылова (с номером m) назовем подпространство

$$L_m(A, v) = \text{span} \{W(A, A^*)v : \deg W \leq m\}.$$

Его размерность обозначим через l_m . Число $w_m = l_m - l_{m-1}$ ($m \geq 1$) называется *шириной* m -го слоя; при $m = 0$ полагаем $w_0 = 1$.

Укажем теперь связь между процессом Ланцоша и задачей об унитарном приведении к ленточной форме. Предположим, что линейная оболочка последовательности (8) совпадает с пространством $\mathbf{C}^n$. Тогда процесс Ланцоша генерирует ортогональный базис $v_1, \dots, v_n$; нормируя векторы v_i , можем считать базис даже ортонормированным. Интерпретируя исходную матрицу A как оператор на унитарном пространстве $\mathbf{C}^n$, построим матрицу B этого оператора в базисе $v_1, \dots, v_n$. Структурные особенности матрицы B можно описать следующим образом. Пусть s — номер слоя последовательности (8), породившего вектор v_i . В таком случае в i -м столбце матрицы B отличными от нуля могут быть лишь элементы, соответствующие векторам v_j , порожденным $(s-1)$ -м, s -м и $(s+1)$ -м слоями. Аналогичное описание применимо к строкам матрицы B . Обозначая через N_i (M_i) число ненулевых элементов в i -м столбце (i -й строке) этой матрицы, получаем неравенства

$$N_i \leq w_{s-1} + w_s + w_{s+1}, \quad M_i \leq w_{s-1} + w_s + w_{s+1}.$$

Если для всех s имеет место равномерная оценка

$$w_s \leq b, \tag{9}$$

то B можно рассматривать как ленточную матрицу с шириной ленты, не превосходящей $4b - 1$. Так как проведение обобщенного процесса Ланцоша требует лишь арифметических операций и квадратных корней, матрица A в ситуации (9) оказывается унитарно приводимой к ленточному виду.

Пусть матрица A в (8) является инволюцией. Удалим из этой последовательности векторы, совпадающие с ранее встречавшимися в ней векторами. Так, вектор A^2v второго слоя есть повторение начального вектора v ; это же относится к вектору $A^{*2}v$. “Прореженная” последовательность (8) выглядит так:

$$v, Av, A^*v, A^*Av, AA^*v, AA^*Av, A^*AA^*v, \dots \tag{10}$$

Очевидно, что для этой последовательности неравенство (9) выполнено при $b = 2$, откуда следует, что A может быть приведена унитарным подобием к ленточной форме с шириной ленты, не превосходящей 7.

3. Кон-инволюции

Кон-инволюцией называется $n \times n$ -матрица C такая, что

$$C\bar{C} = I_n. \tag{11}$$

Очевидно, что C — невырожденная матрица и

$$C^{-1} = \bar{C}.$$

Ниже мы сопоставляем свойства кон-инволюций с изложенными в п. 2 свойствами инволютивных матриц.

а2 Начнем со следующего результата [8, лемма 4.6.9].

Матрица C тогда и только тогда является кон-инволюцией, когда она может быть представлена в виде произведения $C = R\bar{R}^{-1}$ или произведения

$$C = \bar{S}^{-1}S, \quad (12)$$

где R и S — невырожденные матрицы.

Прокомментируем формулу (12). Полезно рассматривать кон-инволюции как аналог инволютивных матриц в ситуации, когда вместо подобий к матрицам применяются преобразования, называемые псевдоподобиями (consimilarities). Говорят, что $n \times n$ -матрицы A и B псевдоподобны, если существует невырожденная матрица S такая, что

$$B = \bar{S}^{-1}AS. \quad (13)$$

С точки зрения этого определения формула (12) описывает кон-инволюции как матрицы, псевдоподобные единичной матрице I_n .

Скалярными инвариантами псевдоподобий, совершаемых с матрицей A , оказываются собственные значения не самой этой матрицы, а матрицы $A\bar{A}$ или матрицы $\bar{A}A$. В случае кон-инволюции единственным таким инвариантом является единица кратности n .

Если все же говорить об обычных спектральных свойствах кон-инволюции C , то в них также немало примечательного. Так, вместе с каждым собственным значением λ матрица C имеет собственное значение $\bar{\lambda}^{-1}$, причем жордановы структуры C , относящиеся к λ и $\bar{\lambda}^{-1}$, одинаковы.

Если $|\lambda| = 1$, то λ и $\bar{\lambda}^{-1}$ — это одно и то же число. Простому унимодулярному собственному числу λ соответствует (с точностью до комплексного скалярного множителя) вещественный собственный вектор. Если же λ — кратное собственное значение, то отвечающее ему собственное подпространство вместе с каждым вектором z содержит сопряженный вектор $\bar{z}$.

Возвращаясь к представлению кон-инволюции в виде (12), отметим, что конструктивный способ вычисления такого представления дает доказательство леммы 4.6.9 в [8]. Этот способ нетрудно превратить в рациональный алгоритм.

Предположим, что кон-инволюция C является вдобавок симметричной матрицей. В этом случае определение (11) можно эквивалентным образом переписать как $CC^* = I_n$, т. е. такая матрица C еще и унитарна.

Здесь уместно процитировать следующий классический результат.

Теорема 3 (Такаги, [8, следствие 4.4.4]). *Если $A = A^\top$, то найдутся унитарная матрица U и неотрицательная диагональная матрица $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ такие, что*

$$A = U\Sigma U^\top. \quad (14)$$

Разложение (14) можно интерпретировать двояким образом. С одной стороны, оно является для комплексных симметричных матриц аналогом спектрального разложения эрмитовых матриц. С другой стороны, равенство (14) есть сингулярное разложение матрицы A , учитывающее ее симметрию. При этом $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ суть сингулярные числа матрицы A .

При $n \geq 5$ разложение Такаги произвольной симметричной матрицы $A \in M_n(\mathbf{C})$ нельзя получить, выполняя конечное число арифметических операций и извлекая (тоже в конечном количестве) корни натуральных степеней. В противном случае проблема собственных значений комплексных симметричных матриц была бы разрешима в радикалах. Поскольку всякая матрица $A \in M_n(\mathbf{C})$ подобна некоторой симметричной матрице, то проблема собственных значений была бы разрешима в радикалах для всех комплексных матриц, что, как известно, неверно.

Однако для матриц, не только симметричных, но и унитарных, вычисление разложения Такаги можно сделать конечным процессом, использующим помимо арифметических операций еще и квадратичные радикалы. Это показано в [7]. Унитарные симметричные матрицы составляют подмножество класса кон-инволюций.

- 62** Если в определении псевдоподобия (13) матрица S унитарна, то определение принимает вид

$$B = S^{\top} A S.$$

Преобразования этого типа принято называть конгруэнциями. Тем самым конгруэнции, задаваемые унитарными матрицами S , можно рассматривать как частный случай псевдоподобий.

К какому виду можно привести произвольную кон-инволюцию C , ограничиваясь унитарными конгруэнциями? Ответ на этот вопрос можно найти в [11]. Он сформулирован как задача 4.6.P27, предлагающая обосновать следующее утверждение.

Для всякой кон-инволюции C порядка n существует унитарная матрица U такая, что

$$C = U \left(I_{n-2m} \oplus \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1^{-1} \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \dots \oplus \begin{pmatrix} 0 & \sigma_m^{-1} \\ \sigma_m & 0 \end{pmatrix} \right) U^{\top}. \quad (15)$$

Здесь $\sigma_1, \sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_m, \sigma_m^{-1}$ — сингулярные числа матрицы C , отличные от 1.

Обратим внимание на сходство прямой суммы в (15) с формулой (4). Там же, в [11], указан первоисточник данного результата. Это статья [10].

Более общий факт установлен в [6]. Матрица C порядка n называется *конгруэнтно-нормальной*, если матрица $C\bar{C}$ нормальна в обычном смысле. Конгруэнтно-нормальными являются, в частности, все кон-инволюции.

Теорема 4 [6]. *Всякая конгруэнтно-нормальная матрица A посредством подходящей унитарной конгруэнции может быть приведена к блочно-диагональной форме с диагональными блоками размеров 1×1 и 2×2 .*

- в2** В случае кон-инволюций A и B правильно говорить об унитарной конгруэнтности, а не об унитарном подобии, поскольку подобия, в отличие от псевдоподобий, не сохраняют свойство быть кон-инволюцией. Критерий унитарной конгруэнтности формулируется в следующем предложении.

Теорема 5 [5]. Матрицы A и B порядка n , решающие уравнение

$$X\bar{X} = \delta I_n$$

при одном и том же $\delta \in \mathbf{R}$, унитарно конгруэнтны тогда и только тогда, когда они имеют одни и те же сингулярные числа (с учетом кратностей).

Кроме кон-инволюций ($\delta = 1$), этот критерий охватывает косые кон-инволютивные матрицы ($\delta = -1$) и кон-нильпотенты индекса два ($\delta = 0$). Что же касается его проверки, то ее дают n соотношений (7). Таким образом, установить или опровергнуть унитарную конгруэнтность кон-инволюций A и B можно посредством рационального вычисления.

г2 Кон-инволюцию C можно привести к ленточной форме с шириной ленты ≤ 7 посредством конечного процесса, использующего помимо арифметических операций квадратичные радикалы. Обсудим один из способов, которыми это можно сделать (см. [1]).

Кон-инволюции C порядка n сопоставим матрицу удвоенного порядка

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{C} \\ C & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что $\hat{C}$ является инволюцией.

Фиксируем нормированный вектор $q_1 \in \mathbf{C}^n$ и определим вектор $v \in \mathbf{C}^{2n}$ формулой

$$v = \begin{pmatrix} q_1 \\ \bar{q}_1 \end{pmatrix}.$$

С помощью матрицы $\hat{C}$ и вектора v построим “прореженную” последовательность (10):

$$\begin{aligned} v, \hat{C}v &= \begin{pmatrix} \bar{C}\bar{q}_1 \\ Cq_1 \end{pmatrix}, \hat{C}^*v = \begin{pmatrix} C^*\bar{q}_1 \\ C^\top q_1 \end{pmatrix}, \hat{C}^*\hat{C}v = \begin{pmatrix} C^*Cq_1 \\ C^\top \bar{C}\bar{q}_1 \end{pmatrix}, \hat{C}\hat{C}^*v = \begin{pmatrix} \bar{C}C^\top q_1 \\ CC^*\bar{q}_1 \end{pmatrix}, \\ \hat{C}\hat{C}^*\hat{C}v &= \begin{pmatrix} \bar{C}C^\top \bar{C}\bar{q}_1 \\ CC^*Cq_1 \end{pmatrix}, \hat{C}^*\hat{C}\hat{C}^*v = \begin{pmatrix} C^*CC^*\bar{q}_1 \\ C^\top \bar{C}C^\top q_1 \end{pmatrix}, \dots \end{aligned} \quad (16)$$

Верхние половины этих векторов образуют последовательность

$$q_1, \bar{C}\bar{q}_1, C^*\bar{q}_1, C^*Cq_1, \bar{C}C^\top q_1, \bar{C}C^\top \bar{C}\bar{q}_1, C^*CC^*\bar{q}_1, \dots \quad (17)$$

Определим слои этой последовательности как проекции на $\mathbf{C}^n$ соответствующих слоев последовательности (16). Так, векторы $\bar{C}\bar{q}_1$ и $C^*\bar{q}_1$ образуют первый слой, векторы C^*Cq_1 и $\bar{C}C^\top q_1$ составляют второй слой, и т. д. Ширину $\tilde{w}_m$ m -го слоя определим по аналогии с разделом г1 как приращение размерности линейной оболочки, натянутой на первые i слоев, при переходе от $i = m - 1$ к $i = m$. Очевидно, что

$$\tilde{w}_m \leq w_m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (18)$$

При $m = 0$ полагаем $\tilde{w}_0 = 1$.

Предположим, что линейная оболочка последовательности (17) совпадает со всем пространством $\mathbf{C}^n$. Применим к этой последовательности процесс типа Грама–Шмидта, в котором, однако, ортогонализация очередного вектора проводится не к ранее вычисленным векторам q_j , а к их комплексным сопряжениям $\bar{q}_j$. Отличие от классической ортогонализации объясняется на матричном языке тем, что мы преобразуем матрицу C посредством унитарной конгруэнции, а не унитарного подобия, как в обобщенном процессе Ланцоша.

Пусть $q_1, q_2, \dots, q_n$ — ортонормированный базис пространства $\mathbf{C}^n$, полученный в результате ортонормализации. Из коэффициентов h_{ij} , вычисленных в этом процессе, составим матрицу H . Матрицы C , $Q = (q_1 q_2 \dots q_n)$ и H связаны соотношением

$$CQ = \bar{Q}H, \quad \text{или} \quad Q^T C Q = H.$$

Эта матрица H и есть ленточная форма кон-инволюции C . В силу неравенства (18) ширина ленты не превосходит 7.

Литература

1. **Гасеми Камалванд М., Икрамов Х.Д.** Об одном методе конгруэнтного типа для линейных систем с сопряженно-нормальными матрицами коэффициентов // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2009. — Т. 49, № 2. — С. 211–224. Перевод: Ghasemi Kamalvand M., Ikramov Kh.D. Low-rank perturbations of symmetric matrices and their condensed forms under unitary congruences // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2009. — Vol. 49. — P. 573–578.
2. **Икрамов Х.Д.** О канонической форме проекторов относительно унитарного подобия // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1996. — Т. 36, № 3. — С. 3–5. Перевод: Ikramov Kh.D. A canonical form for projectors under unitary similarity // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1996. — Vol. 36, № 3. — P. 279–281.
3. **Икрамов Х.Д.** Каноническая форма Шура унитарно квазидиагонализуемой матрицы // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1997. — Т. 37, № 12. — С. 1411–1415. Перевод: Ikramov Kh.D. The canonical Schur form of a unitarily quasidiagonalizable matrix // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1997. — Vol. 37, № 12. — P. 1367–1371.
4. **Икрамов Х.Д., Эльзнер Л.** О матрицах, допускающих унитарное приведение к ленточному виду // Матем. заметки. — 1998. — Т. 64, № 6. — С. 871–880. Перевод: Ikramov Kh.D., Elsner L. On matrices that admit unitary reduction to band form // Math. Notes. — 1998. — Vol. 64, № 6. — P. 753–760.
5. **Икрамов Х.Д.** О проверке унитарной конгруэнтности псевдоинволюций, косых псевдоинволюций и псевдонильпотенций индекса два // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2009. — Т. 367. — С. 27–32. Перевод: Ikramov Kh.D. Verifying unitary congruence of coninvolutions, skew-coninvolutions, and connilpotent matrices of index two // J. Math. Sci. — 2010. — Vol. 165. — P. 511–514.
6. **Икрамов Х.Д., Фассбендер Х.** Квадратично-нормальные и конгруэнтно-нормальные матрицы // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2009. — Т. 367. — С. 45–66. Перевод: Ikramov Kh.D., Fassbender H. Quadratically normal and congruence-normal matrices // J. Math. Sci. — 2010. — Vol. 165. — P. 521–532.
7. **Икрамов Х.Д.** Разложение Такаги симметричной унитарной матрицы как конечный алгоритм // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2012. — Т. 52, № 1. — С. 4–7. Перевод: Ikramov Kh. D. Takagi's decomposition of a symmetric unitary matrix as a finite algorithm // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2012. — Vol. 52, № 1. — P. 1–3.
8. **Хорн Р., Джонсон Ч.** Матричный анализ. — М.: Мир, 1989.

9. **George A., Ikramov Kh.D.** Unitary similarity of matrices with quadratic minimal polynomials // *Linear Algebra Appl.* — 2002. — Vol. 349. — P. 11–16.
10. **Horn R.A., Sergeichuk V.V.** Canonical forms for unitary congruence and *-congruence // *Linear Multilinear Algebra.* — 2009. — Vol. 57. — P. 777–815.
11. **Horn R.A., Johnson C.R.** *Matrix Analysis*. Second ed. — Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

Поступила в редакцию 27 мая 2023 г.

После рецензирования без замечаний 29 мая 2023 г.

Принята к печати 05 сентября 2023 г.

Литература в транслитерации

1. **Gasemi Kamalvand M., Ikramov Kh.D.** Ob odnom metode kongruentnogo tipa dlya lineinykh sistem s sopryazhenno-normal'nymi matritsami koeffitsientov // *Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki.* — 2009. — Т. 49, № 2. — С. 211–224. *Perevod: Ghasemi Kamalvand M., Ikramov Kh.D.* Low-rank perturbations of symmetric matrices and their condensed forms under unitary congruences // *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* — 2009. — Vol. 49. — P. 573–578.
2. **Ikramov Kh.D.** O kanonicheskoi forme proektorov otnositel'no unitarnogo podobiya // *Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki.* — 1996. — Т. 36, № 3. — С. 3–5. *Perevod: Ikramov Kh.D.* A canonical form for projectors under unitary similarity // *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* — 1996. — Vol. 36, № 3. — P. 279–281.
3. **Ikramov Kh.D.** Kanonicheskaya forma Shura unitarno kvazidiagonalizuemoi matritsy // *Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki.* — 1997. — Т. 37, № 12. — С. 1411–1415. *Perevod: Ikramov Kh.D.* The canonical Schur form of a unitarily quasidiagonalizable matrix // *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* — 1997. — Vol. 37, № 12. — P. 1367–1371.
4. **Ikramov Kh.D., El'zner L.** O matritsakh, dopuskayuschikh unitarnoe privedenie k lentochnomu vidu // *Matem. zametki.* — 1998. — Т. 64, № 6. — С. 871–880. *Perevod: Ikramov Kh.D., Elsner L.* On matrices that admit unitary reduction to band form // *Math. Notes.* — 1998. — Vol. 64, № 6. — P. 753–760.
5. **Ikramov Kh.D.** O proverke unitarnoi kongruentnosti psevdoinvol'yutsii, kosykh psevdoinvol'yutsii i psevdonil'potentsii indeksa dva // *Zap. nauchn. sem. POMI.* — 2009. — Т. 367. — С. 27–32. *Perevod: Ikramov Kh.D.* Verifying unitary congruence of coninvolutions, skew-coninvolutions, and nilpotent matrices of index two // *J. Math. Sci.* — 2010. — Vol. 165. — P. 511–514.
6. **Ikramov Kh.D., Fassbender H.** Kvadratischno-normal'nye i kongruentno-normal'nye matritsy // *Zap. nauchn. sem. POMI.* — 2009. — Т. 367. — С. 45–66. *Perevod: Ikramov Kh.D., Fassbender H.* Quadratically normal and congruence-normal matrices // *J. Math. Sci.* — 2010. — Vol. 165. — P. 521–532.
7. **Ikramov Kh.D.** Razlozhenie Takagi simmetrichnoi unitarnoi matritsy kak konechnyi algoritm // *Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki.* — 2012. — Т. 52, № 1. — С. 4–7. *Perevod: Ikramov Kh. D.* Takagi's decomposition of a symmetric unitary matrix as a finite algorithm // *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* — 2012. — Vol. 52, № 1. — P. 1–3.
8. **Khorn R., Dzhohnson C.R.** *Matrichnyi analiz.* — M.: Mir, 1989.
9. **George A., Ikramov Kh.D.** Unitary similarity of matrices with quadratic minimal polynomials // *Linear Algebra Appl.* — 2002. — Vol. 349. — P. 11–16.
10. **Horn R.A., Sergeichuk V.V.** Canonical forms for unitary congruence and *-congruence // *Linear Multilinear Algebra.* — 2009. — Vol. 57. — P. 777–815.
11. **Horn R.A., Johnson C.R.** *Matrix Analysis*. Second ed. — Cambridge: Cambridge University Press, 2013.