

УДК 539.375

## ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ КОМПОЗИТА, АРМИРОВАННОГО ОДНОНАПРАВЛЕННЫМИ ВОЛОКНАМИ

В. М. Мирсалимов

Азербайджанский технический университет, AZ1073 Баку, Азербайджан  
Институт математики и механики НАН Азербайджана, AZ1141 Баку, Азербайджан  
E-mail: mir-vagif@mail.ru

На основе минимаксного критерия и минимизации коэффициентов интенсивности напряжений определен оптимальный натяг при посадке упругих волокон в двоякопериодическую систему отверстий в изотропном упругом связующем. Предложен критерий выбора натяга, предотвращающего разрушение композита, армированного однонаправленными волокнами, и обеспечивающего оптимальное распределение напряжений.

Ключевые слова: связующее, волокна, трещины, натяг, коэффициенты интенсивности напряжений, минимаксный критерий.

DOI: 10.15372/PMTF20200317

**Введение.** Большинство новых композиционных материалов создаются путем армирования связующего высокопрочным и жестким составляющим (волокном). Для повышения несущей способности связующего с отверстиями при разработке композитов контуры круговых отверстий целесообразно подкреплять с натягом упругими волокнами из другого материала. Подкрепляющие элементы (волокна), вес которых незначителен, оказывают существенное влияние на прочность составного тела. Ресурс работы составного тела определяется распределением напряжений в зонах взаимодействия его элементов. Поэтому большое значение имеет оптимальное проектирование составных тел из композитов. Задача теории оптимального проектирования заключается в определении характеристик составного тела, обеспечивающих необходимую прочность. Как известно, методы механики разрушения позволяют выбирать материалы и проектировать конструкции таким образом, чтобы не происходило развития имеющихся в них трещин.

Влияние натяга на прочность составного тела исследовалось во многих работах [1–22]. В [1] на основе минимаксного критерия проведено исследование оптимального натяга при посадке упругих включений в отверстия изотропной упругой пластины, ослабленной двоякопериодической системой прямолинейных трещин. Построена замкнутая система алгебраических уравнений, обеспечивающих минимизацию параметров разрушения (коэффициентов интенсивности напряжений) в зависимости от геометрических и механических характеристик пластины и включений. В работе [2] изучено напряженное состояние втулки при фрикционном натяге в случаях кручения и осевого нагружения. Рассчитывается оптимальное соотношение внутреннего и внешнего диаметров втулки, при котором нагрузка, передаваемая соединением, максимальна. Задача определения оптимального натяга при

посадке упругих включений в отверстия изотропной упругой пластины, ослабленной двоякопериодической системой круглых отверстий, решена в [3] на основе принципа равнопрочности. Влияние посадки с натягом болта на усталостную долговечность соединения внахлест при двойном сдвиге исследовано в [4] при проведении испытаний на усталость, а также путем моделирования методом конечных элементов.

Плоская задача механики разрушения для кругового диска, посаженного с натягом на вращающийся вал, рассмотрена в [5]. Полагалось, что вблизи внутренней поверхности диска имеются произвольно размещенные прямолинейные трещины. На основе минимаксного критерия исследован натяг соединения диска с валом, обеспечивающий минимизацию параметров разрушения (коэффициентов интенсивности напряжений) диска. В работе [6] экспериментально и численно исследуется влияние натяга соединения на усталостную прочность пластин с отверстиями. В [7] с помощью модели шероховатой поверхности трения и принципа равнопрочности определяется функция натяга для запрессовки подкрепляющей обоймы твердосплавной волоки, обеспечивающая уменьшение концентрации напряжения на внутреннем контуре волоки. Работа [8] посвящена проектированию и оптимизации соединений с натягом и клеевых соединений (втулки и сплошного или полого вала, соединенных за счет силы трения и адгезионной прочности поверхностей) в легких конструкциях. Рассматриваются оптимальные соотношения внутреннего и внешнего диаметров втулки, при которых увеличивается осевая (или крутящая) нагрузка, передаваемая соединением, а также уменьшается вес конструкции. В [9] путем сравнения имеющихся экспериментальных данных и результатов моделирования методом конечных элементов для образцов с двойным сдвиговым швом из алюминиевого сплава 2024-T3 исследованы два способа повышения усталостной долговечности соединений: посадка с натягом и зажим. В работе [10] изучается распределение контактного давления, возникающего при посадке с натягом вала на втулку. Приводятся явные приближенные выражения для сопрягаемых профилей.

В [11] рассмотрена плоская задача механики разрушения для концентрически сопрягаемых цилиндров, в случае когда вблизи поверхности внутреннего цилиндра имеются произвольно расположенные прямолинейные трещины. С использованием минимаксного критерия определен натяг, обеспечивающий минимизацию параметров разрушения. Методика определения оптимальной посадки с натягом при действии усталостных нагрузок представлена в работе [12]. Целью работы [13] являлось изучение влияния зазора и посадки с натягом на усталостную долговечность композитных соединений внахлест при двойном сдвиге. Для получения распределения напряжений (или деформаций) вблизи отверстия, возникающих вследствие натяга, выполнено трехмерное моделирование методом конечных элементов. Результаты показывают, что посадка с натягом в образцах повышает усталостную долговечность по сравнению с образцами с зазором; усталостная долговечность титанового и композитного соединений внахлест с натягом выше.

В [14] изучены образцы пластин, соединенных внахлест, с различным натягом и проведены экспериментальные исследования этих образцов. С использованием программного обеспечения ABAQUS создана двумерная осесимметричная модель конечных элементов, описывающая процесс вставки болта в отверстие. При малом натяге растягивающее окружное напряжение возникало, главным образом, на стенке отверстия, а при большом натяге оно превращалось в сжимающее окружное напряжение. Точка, в которой окружное напряжение на прилегающих поверхностях максимальное, удаляется от стенки отверстия при увеличении натяга.

В работе [15] исследуется оптимальное проектирование системы вал — втулка, обеспечивающее более равномерное распределение контактного давления. В [16] проведены эксперименты по установке болтов с натягом и растягивающему нагружению болтовых

соединений. С использованием метода конечных элементов создана трехмерная модель. Результаты моделирования сравнивались с экспериментальными данными. Максимальное значение растягивающего окружного напряжения является наименьшим при величине натяга 1,5 %. В [17] выполнено экспериментальное исследование влияния натяга на усталостную долговечность болтовых композитных соединений. Болты имели натяг, равный 0; 0,50; 0,75; 1,00 %. Результаты испытаний показывают, что усталостная долговечность образцов с натягом больше, чем у образцов без натяга. В работе [18] численно и экспериментально изучалось влияние посадки с натягом на несущую способность подшипника и прочность стеклопластика. Показано, что в случае посадки с натягом деформации в стеклопластике в окрестности отверстия меньше, чем в случае переходной посадки. В [19] анализируется влияние величины натяга на распределение напряжений и повреждаемость углепластика вблизи отверстия.

В трехмерной модели конечных элементов используется теория накопления повреждений, а также смешанные критерии разрушения, включающие критерий Хашина и критерий максимального напряжения. В [20] с помощью пакета программ ABAQUS (USDFLD) разработана модель накопления повреждений для прогнозирования состояния слоистых композитов в процессе посадки штифта с натягом и нагружения. В модели учитывается контакт на границе между отверстием и штифтом и используются нелинейные соотношения между напряжениями и деформациями. В работе [21] определен оптимальный натяг при посадке упругих волокон в двоякопериодическую систему отверстий в изотропном упругом связующем. Используется принцип равнопрочности и проводится минимизация коэффициентов интенсивности напряжений. В [22] предложена теоретическая модель для прогнозирования распределения напряжений в процессе запрессовки.

В данной работе предложен критерий выбора натяга, препятствующего разрушению композита, армированного однонаправленными волокнами, и обеспечивающего оптимальное распределение напряжений.

**Постановка задачи.** Рассматривается составное упругое тело, представляющее собой упругую среду (матрицу) с распределенными в ней одинаковыми волокнами из другого упругого материала. Предполагается, что связующий материал ослаблен двоякопериодической системой прямолинейных трещин различной длины, коллинеарных осей координат (рис. 1).

Пусть неограниченное тело (композит) находится в условиях плоской деформации или в плосконапряженном состоянии. Считается, что связующее ослаблено двоякопериодической системой круговых отверстий, имеющих радиус  $\lambda < 1$ . Центры этих отверстий расположены симметрично относительно координатных осей в точках

$$P_{mn} = m\omega_1 + n\omega_2 \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$\omega_1 = 2, \quad \omega_2 = 2h \exp^{i\alpha}, \quad h > 0, \quad \text{Im } \omega_2 > 0.$$

Берега прямолинейных трещин свободны от внешних нагрузок. Композит подвергается растяжению средними напряжениями (растяжение на бесконечности)

$$\sigma_x = \sigma_x^\infty, \quad \sigma_y = \sigma_y^\infty, \quad \tau_{xy} = 0.$$

Для повышения несущей способности композита контуры круговых отверстий  $L_{mn}$  ( $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) подкреплены с натягом волокнами из другого упругого материала.

Считаем, что в процессе деформирования композита противоположные берега трещин не вступают в контакт. Начало системы координат совместим с геометрическим центром волокна  $L_{0,0}$  (см. рис. 1). В круговые отверстия  $L_{mn}$  связующего путем запрессовки или теплового воздействия вставлены с натягом упругие волокна из другого упругого материала. Принято, что сначала размеры поперечных сечений волокон больше размеров

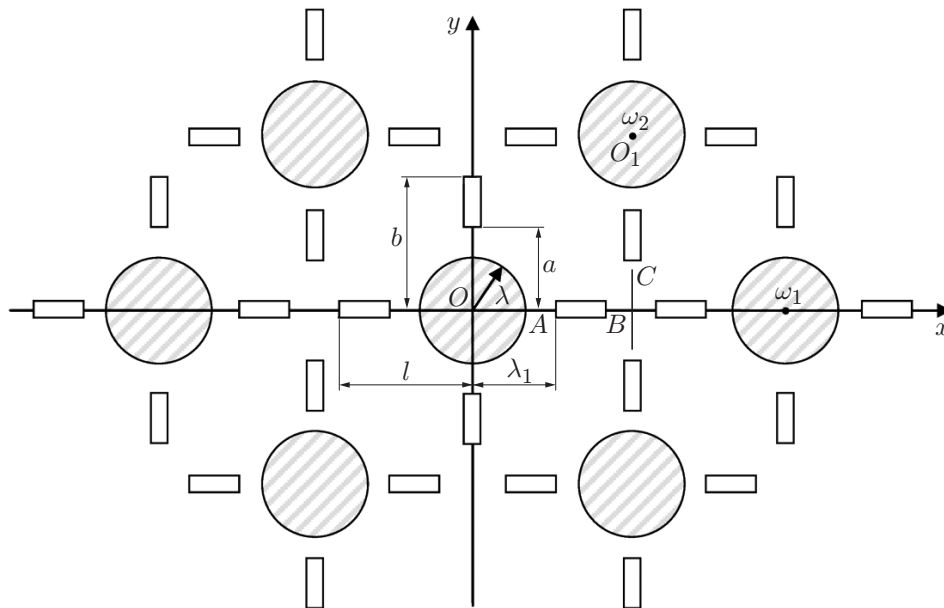


Рис. 1. Расчетная схема задачи о минимизации напряженного состояния волокнистого композита

отверстий в связующем. Требуется определить натяг для посадки волокна в отверстие упругого связующего, так чтобы созданное ими поле напряжений препятствовало разрушению композита. Для этого рассмотрим задачу механики разрушения для композита, армированного однонаправленными волокнами.

Для прогнозирования разрушения композита необходимо найти коэффициенты интенсивности напряжений. Для определения функции натяга соединения материалов постановку задачи следует дополнить критерием (условием) определения натяга. Согласно теории квазихрупкого разрушения Ирвина — Орована (см. [23]) параметром, характеризующим напряженное состояние в окрестности вершин трещины, является коэффициент интенсивности напряжений. Следовательно, можно считать, что разрушение композита происходит в тот момент, когда коэффициент интенсивности напряжений в окрестности вершин трещин достигает критического значения.

В качестве критерия выбора натяга соединения (функция  $q(\theta)$ ) примем условие минимизации максимального значения окружного напряжения  $\sigma_\theta(\theta)$  на контуре соединения связующего и волокна и равенство нулю коэффициентов интенсивности напряжений вблизи вершин всех трещин.

Таким образом, требуется определить функцию натяга соединения  $q(\theta)$ , так чтобы созданное в процессе нагружения композита поле напряжений обеспечивало выполнение условия минимизации максимального значения  $\sigma_\theta(\theta)$  на границах раздела сред и препятствовало росту трещин.

Не нарушая общности поставленной задачи, полагаем, что искомая функция натяга  $q(\theta)$  может быть представлена в виде ряда Фурье по тригонометрическим функциям. Следовательно, коэффициенты  $A_{2k}^t$  разложения искомой функции натяга нужно выбрать таким образом, чтобы обеспечивались минимизация максимального значения  $\sigma_\theta(\theta)$  на границе раздела сред и минимизация (равенство нулю) коэффициентов интенсивности напряжений вблизи всех вершин трещин.

В силу симметрии граничных условий и геометрии области  $D_*$ , занятой упругой средой, напряжения в связующем являются двоякопериодическими функциями с основными периодами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

На границе раздела  $L_{mn}$  сред имеем

$$\sigma_r - i\tau_{r\theta} = \sigma_r^0 - i\tau_{r\theta}^0, \quad u + iv = u_0 + iv_0 + q(\theta). \quad (1)$$

Здесь  $\sigma_r, \tau_{r\theta}$  — компоненты тензора напряжений в полярной системе координат в связующем;  $\sigma_r^0, \tau_{r\theta}^0$  — компоненты тензора напряжений в волокне;  $u, v$  — компоненты вектора перемещений.

Граничные условия на берегах прямолинейных трещин имеют вид

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = 0 \quad \text{на } L', \quad \sigma_x - i\tau_{xy} = 0 \quad \text{на } L'', \quad (2)$$

где  $L'$  — совокупность трещин, коллинеарных оси абсцисс;  $L''$  — совокупность трещин, коллинеарных оси ординат.

Дополнительные условия оптимизации для основного параллелограмма периодов записываются в виде

$$\min_{\eta \in C} \max_{\theta \in [0, 2\pi]} \sigma_\theta(\theta, \eta), \quad (3)$$

где  $C$  — множество ограничений, подлежащих определению;  $\eta = A_{2k}^t$  — проектные параметры конструкции.

Таким образом, задача оптимального проектирования композита с трещинами сводится к определению коэффициентов  $A_{2k}^t$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) разложения функции  $q(\theta)$  натяга соединения, при которых обеспечиваются минимизация максимального значения окружного напряжения  $\sigma_\theta(\theta)$  на контуре раздела сред и равенство нулю коэффициентов интенсивности напряжений вблизи всех вершин трещин.

Дополнительные условия (3) позволяют определить искомую функцию натяга соединения связующего и волокна.

**Метод решения.** При нагружении составного тела перемещения в общих точках, принадлежащих границам волокна и связующего, различаются на величину натяга (условие (1)), а усилия, действующие со стороны связующего на любое волокно, равны по величине и противоположны по знаку усилиям, действующим на связующее со стороны волокна. Так как решение для связующего обладает свойством двоякопериодичности, достаточно рассмотреть условия сопряжения связующего и волокна вдоль контура  $L_{0,0}$  ( $|z| = \lambda$ ).

В плоской задаче теории упругости компоненты тензора напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  и вектора перемещений  $u, v$  можно представить через комплексные потенциалы Колосова — Мусхелишвили [24].

Обозначим комплексные потенциалы, соответствующие связующему, через  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$ , а соответствующие волокну — через  $\Phi_0(z)$  и  $\Psi_0(z)$ . Тогда граничные условия (1), (2) записываются в виде

$$\begin{aligned} \Phi(\tau) + \overline{\Phi(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi'(\tau) + \Psi(\tau)] e^{2i\theta} &= \Phi_0(\tau) + \overline{\Phi_0(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi_0'(\tau) + \Psi_0(\tau)] e^{2i\theta}, \\ \Phi(\tau) - \varkappa\overline{\Phi(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi'(\tau) + \Psi(\tau)] e^{2i\theta} &= \\ &= (G/G_0)\{\Phi_0(\tau) - \varkappa_0\overline{\Phi_0(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi_0'(\tau) + \Psi_0(\tau)] e^{2i\theta}\} + 2Gq'(\tau), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\tau = \lambda e^{i\theta}$ ;  $\varkappa, G$  и  $\varkappa_0, G_0$  — упругие постоянные материала связующего и волокна соответственно.

Записывая условие отсутствия усилий на берегах трещин, принадлежащих основному параллелограмму периодов, получаем краевые условия на  $L = [-\lambda_1, -l] + [\lambda_1, l]$  и  $L_1 = [-b, -a] + [a, b]$ :

$$\begin{aligned}\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + t\overline{\Phi'(t)} + \overline{\Psi(t)} &= 0 \quad \text{на } L, \\ \Phi(t_1) + \overline{\Phi(t_1)} + t_1\overline{\Phi'(t_1)} + \overline{\Psi(t_1)} &= 0 \quad \text{на } L_1\end{aligned}\quad (5)$$

( $t, t_1$  — аффиксы точек берегов трещины, направленных коллинеарно осям абсцисс и ординат соответственно).

Задача о напряженно-деформированном состоянии композита сводится к определению двух пар аналитических функций  $\Phi_0(z), \Psi_0(z)$  и  $\Phi(z), \Psi(z)$  комплексной переменной  $z = x + iy$ , удовлетворяющих граничным условиям (4), (5).

Обозначим левую часть граничного условия (4) через  $f_1 - if_2$ :

$$\Phi_0(\tau) + \overline{\Phi_0(\tau)} - [\overline{\tau}\Phi_0'(\tau) + \Psi_0(\tau)] e^{2i\theta} = f_1 - if_2.$$

Пусть на контуре  $L_{0,0}$  функция  $f_1 - if_2$  разлагается в ряд Фурье. В силу симметрии этот ряд имеет вид

$$f_1 - if_2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k} e^{2ik\theta}, \quad \text{Im } A_{2k} = 0.$$

Функции  $\Phi_0(z)$  и  $\Psi_0(z)$  аналитичны в области  $S_{0,0}$ , занятой материалом волокна и ограниченной контуром  $L_{0,0}$ . Следовательно, функции  $\Phi_0(z)$  и  $\Psi_0(z)$  могут быть представлены в виде

$$\Phi_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} z^{2k}, \quad \Psi_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k} z^{2k}.\quad (6)$$

Для определения комплексных потенциалов  $\Phi_0(z)$  и  $\Psi_0(z)$  на контуре  $L_{0,0}$  имеем граничное условие

$$\Phi_0(\tau) + \overline{\Phi_0(\tau)} - [\overline{\tau}\Phi_0'(\tau) + \Psi_0(\tau)] e^{2i\theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k} e^{2ki\theta}.\quad (7)$$

Подставляя функции (6) в граничное условие (7) и применяя метод степенных рядов, получаем

$$\Phi_0(\tau) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{-2k} \left(\frac{z}{\lambda}\right)^{2k}, \quad \Psi_0(\tau) = - \sum_{k=0}^{\infty} [(2k+1)A_{-2k-2} + A_{2k+2}] \left(\frac{z}{\lambda}\right)^{2k}.\quad (8)$$

С использованием функций (8) после ряда преобразований запишем краевые условия на контуре  $L_{0,0}$  для комплексных потенциалов  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  в следующем виде:

$$\begin{aligned}\Phi(\tau) + \overline{\Phi(\tau)} - [\overline{\tau}\Phi'(\tau) + \Psi(\tau)] e^{2i\theta} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k} e^{2ik\theta}, \\ \Phi(\tau) - \varkappa \overline{\Phi(\tau)} - [\overline{\tau}\Phi'(\tau) + \Psi(\tau)] e^{2i\theta} &= \\ &= \frac{G}{G_0} \left( A_0 \frac{1 - \varkappa_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k} e^{2ik\theta} - \varkappa_0 \sum_{k=1}^{\infty} A_{-2k} e^{-2ik\theta} \right) + 2Gq'(\tau).\end{aligned}\quad (9)$$

Построим решение задачи плоской теории упругости для связующего. В случае однородного растяжения средними напряжениями (растяжение на бесконечности) комплексные потенциалы  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  для связующего композита будем искать в виде

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= (\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty)/4 + \Phi_1(z) + \Phi_2(z) + \Phi_3(z), \\ \Psi(z) &= (\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty)/2 + \Psi_1(z) + \Psi_2(z) + \Psi_3(z), \\ \Phi_1(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+1} \gamma^{(2k)}(z)}{(2k+1)!}, \\ \Psi_1(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \gamma^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} Q^{(2k+1)}(z)}{(2k+1)!}, \\ \Phi_2(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_L g(t) \zeta(t-z) dt + A', \\ \Psi_2(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_L [\zeta(t-z) + Q(t-z) - t\gamma(t-z)] g(t) dt + B', \\ \Phi_3(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_L g_1(t_1) \zeta(it_1 - z) dt_1 + A'',\end{aligned}\tag{10}$$

$$\Psi_3(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_L \{ \overline{g_1(t_1)} \zeta(it_1 - z) - [Q(it_1 - z) + it_1 \gamma(it_1 - z)] g_1(t_1) \} dt_1 + B'.$$

Здесь  $\gamma(z)$  — эллиптическая функция Вейерштрасса;  $Q(z)$  — специальная мероморфная функция;  $\zeta(z)$  — дзета-функция Вейерштрасса;  $\zeta'(z) = -\gamma(z)$ ;  $g(x)$ ,  $g_1(y)$  — искомые функции, характеризующие величину раскрытия берегов трещин:

$$g(x) = \frac{2G}{1+\kappa} \frac{\partial}{\partial x} [v^+(x,0) - v^-(x,0)], \quad g_1(y) = \frac{2G}{i(1+\kappa)} \frac{\partial}{\partial y} [u^+(0,y) - u^-(0,y)].$$

Приведем зависимости, которым должны удовлетворять коэффициенты общих представлений (10).

На каждой границе раздела сред действует одна и та же самоуравновешенная система сил, напряженное состояние симметрично относительно координатных осей. Из условий постоянства главного вектора сил, действующих на дугу, соединяющую две конгруэнтные точки в области  $D_*$ , с учетом свойств функций  $\gamma(z)$ ,  $\zeta(z)$  и  $Q(z)$  в контурных точках [25] следует

$$\begin{aligned}(A + \bar{A})\omega_k + \bar{B}\bar{\omega}_k &= \delta_k a_* + \bar{\gamma}_k a_* + \bar{\delta}_k (a_* + \bar{a}_*) + (\bar{\delta}_k - \delta_k) b_* + \\ &+ (\bar{\delta}_k - \delta_k) \bar{b}_* + \beta_2 \lambda^2 \delta_k + \alpha_2 \lambda^2 (\delta_k + \bar{\gamma}_k) \quad (k = 1, 2).\end{aligned}\tag{11}$$

Здесь

$$a_* = -\frac{1}{2\pi} \int_L \operatorname{tg}(t) dt, \quad b_* = -\frac{1}{2\pi} \int_{L_1} t_1 g_1(t_1) dt_1, \quad A = A' + A'', \quad B = B' + B'',$$

$$\delta_1 = 2\zeta(\omega_1/2), \quad \delta_2 = 2\zeta(\omega_2/2), \quad \gamma_1 = 2Q(\omega_1/2) - \bar{\omega}_1 \gamma(\omega_1/2), \quad \gamma_2 = 2Q(\omega_2/2) - \bar{\omega}_2 \gamma(\omega_2/2).$$

Из условий симметрии относительно координатных осей находим

$$\operatorname{Im} \alpha_{2k} = 0, \quad \operatorname{Im} \beta_{2k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

К соотношениям (10) следует добавить равенства

$$\int_{-l}^{-\lambda_1} g(t) dt = 0, \quad \int_{\lambda_1}^l g(t) dt = 0, \quad \int_{-b}^{-a} g_1(t_1) dt_1 = 0, \quad \int_a^b g_1(t_1) dt_1 = 0, \quad (12)$$

которые обеспечивают однозначность перемещений при обходе контуров трещин.

Нетрудно показать, что общие представления (10) определяют класс симметричных задач с двоякопериодическим распределением напряжений. Неизвестные функции  $g(x)$ ,  $g_1(y)$  и коэффициенты  $\alpha_{2k}$ ,  $\beta_{2k}$ ,  $A_{2k}$  должны быть определены из краевых условий (5), (9). Так как выполняются условия двоякопериодичности, то система граничных условий (9) вырождается в функциональные уравнения, а система краевых условий (5) заменяется граничными условиями на  $L$  и  $L_1$ .

Подставляя в левую часть первого граничного условия (9) выражения для  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  с учетом (10), запишем это граничное условие в виде

$$\begin{aligned} \Phi_1(\tau) + \overline{\Phi_1(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi_1'(\tau) + \Psi_1(\tau)] e^{2i\theta} = \\ = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A'_{2k} e^{2ki\theta} - \Phi_2(\tau) - \overline{\Phi_2(\tau)} + [\bar{\tau}\Phi_2'(\tau) + \Psi_2(\tau)] e^{2i\theta} - \\ - \Phi_3(\tau) - \overline{\Phi_3(\tau)} + [\bar{\tau}\Phi_3'(\tau) + \Psi_3(\tau)] e^{2i\theta}, \\ A'_0 = A_0 - (\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty)/2, \quad A'_2 = A_2 + (\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty)/2, \\ A'_{2k} = A_{2k} \quad (k = -1, \pm 2, \pm 3, \dots). \end{aligned}$$

Преобразуя аналогично второе граничное условие (9), получаем

$$\begin{aligned} \Phi_1(\tau) - \varkappa \overline{\Phi_1(\tau)} - [\bar{\tau}\Phi_1'(\tau) + \Psi_1(\tau)] e^{2i\theta} = \\ = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A^*_{2k} e^{2ki\theta} + 2Gq'(\tau) + \varkappa \overline{\Phi_2(\tau)} - \Phi_2(\tau) + [\bar{\tau}\Phi_2'(\tau) + \Psi_2(\tau)] e^{2i\theta} + \\ + \varkappa \overline{\Phi_3(\tau)} - \Phi_3(\tau) + [\bar{\tau}\Phi_3'(\tau) + \Psi_3(\tau)] e^{2i\theta}, \\ A^*_0 = \frac{\varkappa - 1}{4} (\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty) - \frac{\varkappa_0 - 1}{2} \frac{G}{G_0} A_0, \quad A^*_2 = \frac{1}{2} (\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty) + \frac{G}{G_0} A_2, \\ A^*_{2k} = \frac{G}{G_0} A_{2k} \quad (k = 2, 3, \dots), \quad A^*_{-2k} = \varkappa_0 \frac{G}{G_0} A_{-2k} \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Для того чтобы получить уравнения относительно коэффициентов  $\alpha_{2k}$  и  $\beta_{2k}$ , будем считать, что функции  $\{-\Phi_2(\tau) - \overline{\Phi_2(\tau)} + [\bar{\tau}\Phi_2'(\tau) + \Psi_2(\tau)] e^{2i\theta}\}$ ,  $\{-\Phi_3(\tau) - \overline{\Phi_3(\tau)} + [\bar{\tau}\Phi_3'(\tau) + \Psi_3(\tau)] e^{2i\theta}\}$ ,  $\{\varkappa \overline{\Phi_3(\tau)} - \Phi_3(\tau) + [\bar{\tau}\Phi_3'(\tau) + \Psi_3(\tau)] e^{2i\theta}\}$ ,  $\{\varkappa \overline{\Phi_2(\tau)} - \Phi_2(\tau) + [\bar{\tau}\Phi_2'(\tau) + \Psi_2(\tau)] e^{2i\theta}\}$  и  $q'(\theta)$  разлагаются на контуре  $|\tau| = \lambda$  в ряды Фурье. С учетом симметрии задачи имеем

$$\begin{aligned} -\Phi_2(\tau) - \overline{\Phi_2(\tau)} + [\bar{\tau}\Phi_2'(\tau) + \Psi_2(\tau)] e^{2i\theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_{2k} e^{2ki\theta}, \quad \text{Im } B_{2k} = 0, \\ -\Phi_3(\tau) - \overline{\Phi_3(\tau)} + [\bar{\tau}\Phi_3'(\tau) + \Psi_3(\tau)] e^{2i\theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B^*_{2k} e^{2ki\theta}, \quad \text{Im } B^*_{2k} = 0, \end{aligned}$$

$$B_{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{-\Phi_2(\tau) - \overline{\Phi_2(\tau)} + [\bar{\tau}\Phi_2'(\tau) + \Psi_2(\tau)] e^{2i\theta}\} e^{-2ki\theta} d\theta \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$



$$\begin{aligned}
B_{2k}^* &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{-\Phi_3(\tau) - \overline{\Phi_3(\tau)} + [\bar{\tau}\Phi_3'(\tau) + \Psi_3(\tau)] e^{2i\theta}\} e^{-2ki\theta} d\theta, \\
q'(\tau) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{2k}^t e^{2ik\theta}, \quad A_{2k}^t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q'(\theta) e^{-2ki\theta} d\theta, \quad \text{Im } A_{2k}^t = 0, \\
\varkappa \overline{\Phi_3(\tau)} - \Phi_3(\tau) + [\bar{\tau}\Phi_3'(\tau) + \Psi_3(\tau)] e^{2i\theta} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} B'_{2k} e^{2ki\theta}, \quad \text{Im } B'_{2k} = 0, \\
\varkappa \overline{\Phi_2(\tau)} - \Phi_2(\tau) + [\bar{\tau}\Phi_2'(\tau) + \Psi_2(\tau)] e^{2i\theta} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_{2k} e^{2ki\theta}, \quad \text{Im } F_{2k} = 0, \\
B'_{2k} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{\varkappa \overline{\Phi_3(\tau)} - \Phi_3(\tau) + [\bar{\tau}\Phi_3'(\tau) + \Psi_3(\tau)] e^{2i\theta}\} e^{-2ki\theta} d\theta, \\
F_{2k} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{\varkappa \overline{\Phi_2(\tau)} - \Phi_2(\tau) + [\bar{\tau}\Phi_2'(\tau) + \Psi_2(\tau)] e^{2i\theta}\} e^{-2ki\theta} d\theta.
\end{aligned}$$

После вычисления интегралов с помощью теории вычетов находим  $B_{2k}, B_{2k}^*, B'_{2k}, F_{2k}$ .

Используя методы решения, изложенные в [3, 21, 25], получаем три бесконечные системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $\alpha_{2k}, \beta_{2k}, A_{2k}$ . В эти системы через интегральные члены  $B_{2k}, B_{2k}^*, B'_{2k}, F_{2k}, A_{2k}^t$  входят искомые функции  $g(x), g_1(y), q(\tau)$ .

Для определения неизвестных функций  $g(x), g_1(y), q(\tau)$  используем граничные условия (3) на берегах трещин  $L$  и  $L_1$ , принадлежащих основному параллелограмму периодов. Требуя, чтобы функции (10) удовлетворяли граничному условию на берегах трещин  $L$ , получаем сингулярное интегральное уравнение относительно искомой функции  $g(x)$ :

$$\frac{1}{2\pi} \int_L g(t) [3\zeta(t-x) + Q(t-x) - (t-x)\gamma(t-x)] dt + H(x) = 0 \quad \text{на } L. \quad (13)$$

Здесь  $H(x) = A' + \bar{A}' + \bar{B}' + \Phi_1(x) + \overline{\Phi_1(x)} + x\Phi_1'(x) + \Psi_1(x)\Phi_3(x) + \overline{\Phi_3(x)} + x\Phi_3'(x) + \Psi_3(x) + \sigma_y^\infty$ .

Подставляя комплексные потенциалы (10) в граничное условие на линии  $L_1$ , после ряда преобразований получаем сингулярное интегральное уравнение относительно неизвестной функции  $g_1(y)$ :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{L_1} \{g_1(t_1) [i\zeta(it_1 - iy) - i\overline{\zeta(it_1 - iy)}] + \overline{g_1(t_1)} [iQ(it_1 - iy) + \\
+ (it_1 - iy)\overline{\gamma(it_1 - iy)} - i\overline{\zeta(it_1 - iy)}]\} dt_1 + N(y) = 0 \quad \text{на } L_1. \quad (14)
\end{aligned}$$

Здесь  $N(y) = A'' + \bar{A}'' + \bar{B}'' + \Phi_1(iy) + \overline{\Phi_1(iy)} + iy\Phi_1'(iy) + \Psi_1(iy) + \Phi_2(iy) + \overline{\Phi_2(iy)} + iy\Phi_2'(iy) + \Psi_2(iy) + \sigma_x^\infty$ .

Сингулярные интегральные уравнения (13), (14) и алгебраические системы уравнений относительно коэффициентов  $\alpha_{2k}, \beta_{2k}, A_{2k}$ , а также уравнения (11) являются основными

разрешающими уравнениями задачи, позволяющими определить функции  $g(x)$ ,  $g_1(y)$  и коэффициенты  $\alpha_{2k}$ ,  $\beta_{2k}$ ,  $A_{2k}$ . В случае заданной функции натяга соединения сред с использованием функций  $g(x)$ ,  $g_1(y)$ ,  $\Phi(z)$ ,  $\Psi(z)$  можно определить напряженно-деформированное состояние композита, армированного однонаправленными волокнами.

**Алгебраизация основных разрешающих уравнений.** С помощью разложения функций  $\zeta(z)$ ,  $\gamma(z)$ ,  $Q(z)$  в основном параллелограмме периодов [25] интегральное уравнение (13) можно привести к виду

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{L^*} \frac{g(l\xi)}{\xi - \xi_0} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_{L^*} g(l\xi) K(\xi - \xi_0) d\xi + H_1(\xi_0) = 0, \\ & \xi = \frac{t}{l}, \quad \xi_0 = \frac{x}{l}, \quad h_1 = \frac{\lambda_1}{l}, \quad L^* = [-1, -h_1] \cup [h_1, 1], \\ & K_0(\xi) = K_*(\xi) - K(\xi), \\ & K_*(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} K_j^* \left(\frac{l}{2}\right)^{2j+2} \xi^{2j+1}, \quad K_0^* = -\frac{\omega_1}{2} (\bar{\gamma}_1 - \bar{\delta}_1), \\ & K(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} K_j \left(\frac{l}{2}\right)^{2j+2} \xi^{2j+1}, \quad K_0 = \omega_1 \operatorname{Re} \delta_1, \\ & K_j = g_{j+1}, \quad K_j^* = (j+1)(\rho_{j+1} - g_{j+1}), \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} H_1(\xi_0) = \{ & [\lambda_2 \lambda^2 (\delta_1 + \bar{\gamma}_1) + \beta_2 \lambda^2 \bar{\delta}_1] / \omega_1 + \Phi_1(\xi_0 l) + \overline{\Phi_1(\xi_0 l)} + \Phi_3(\xi_0 l) + \overline{\Phi_3(\xi_0 l)} + \\ & + (\xi_0 l) \Phi_1'(\xi_0 l) + \Psi_1(\xi_0 l) + (\xi_0 l) \Phi_3'(\xi_0 l) + \Psi_3(\xi_0 l) \} + \sigma_y^\infty. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $p(\xi) = -p(-\xi)$ , преобразуем уравнение (15) к виду, более удобному для нахождения его приближенного решения:

$$\frac{2}{\pi} \int_{h_1}^1 \frac{\xi p(\xi)}{\xi^2 - \xi_0^2} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_{h_1}^1 [K_0(\xi - \xi_0) + K_0(\xi + \xi_0)] p(\xi) d\xi + H_1(\xi_0') = 0, \quad h_1 \leq \xi_0 \leq 1. \tag{16}$$

После замены переменных

$$\xi_0^2 = u_0 = \frac{1 - h_1^2}{2} (\eta + 1) + \lambda_1^2, \quad \xi^2 = u = \frac{1 - h_1^2}{2} (\tau + 1) + \lambda_1^2$$

отрезок интегрирования  $[h_1, 1]$  переходит в отрезок  $[-1, 1]$ , а уравнение (16) принимает вид

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p(\tau)}{\tau - \eta} d\tau + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p(\tau) B(\eta, \tau) d\tau + H_1(\eta) = 0, \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned} B(\eta, \tau) &= \frac{1 - h_1^2}{2} \sum_{j=0}^{\infty} (K_j^* - K_j) \left(\frac{l}{2}\right)^{2j+2} u_0^j A_j, \\ A_j &= \left( (2j+1) + \frac{(2j+1)(2j)(2j-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{u}{u_0} + \dots + \left(\frac{u}{u_0}\right)^j \right). \end{aligned}$$

Решение сингулярного интегрального уравнения (17) представим в виде  $p(\eta) = p_0(\eta)/\sqrt{1-\eta^2}$  [26]. Функция  $p_0(\eta)$  непрерывна по Гельдеру на отрезке  $[-1, 1]$  и заменяется интерполяционным многочленом Лагранжа, построенным по чебышевским узлам.

Использование квадратурных формул [26] позволяет свести основные разрешающие уравнения к бесконечной системе алгебраических уравнений. После ряда преобразований сингулярное интегральное уравнение (13) сводится к конечной системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^M A_{mk} p_k^0 + \frac{1}{2} H_1(\eta_m) = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, M-1), \quad (18)$$

где

$$A_{mk} = \frac{1}{2M} \left( \frac{1}{\sin \theta_m} \operatorname{ctg} \frac{\theta_m + (-1)^{|m-k|} \theta_k}{2} + B(\tau_m, h_k) \right).$$

К системе (18) необходимо добавить условие (12), которое можно записать в дискретной форме:

$$\sum_{k=1}^M \frac{p_k^0}{\sqrt{(1-h_1^2)(\tau_k+1)/2+h_1^2}} = 0. \quad (19)$$

Рассмотрим второе сингулярное интегральное уравнение (14). Используя разложение функций  $\xi(z)$ ,  $\gamma(z)$ ,  $Q(z)$  в основном параллелограмме периодов и учитывая равенство  $g_1(y) = -g_1(y)$ , после замены переменных преобразуем уравнение (14) к виду, более удобному для нахождения его приближенного решения. С использованием изложенного выше способа сведем сингулярное интегральное уравнение (14) к конечной системе линейных алгебраических уравнений относительно приближенных значений  $R_\nu^0$  искомой функции  $g_1(y)$  в узловых точках:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^M a_{m\nu} R_\nu^0 + \frac{1}{2} N_*(\eta_m) &= 0, \\ a_{m\nu} &= \frac{1}{2M} \left( \frac{1}{\sin \theta_m} \operatorname{ctg} \frac{\theta_m + (-1)^{|m-2|\theta_\nu}}{2} + B_*(\eta_m, \tau_\nu) \right), \\ B_*(\tau, \eta) &= -\frac{1-\lambda_2^2}{2} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (2j+1) g_{j+1} \left( \frac{b}{2} \right)^{2j+2} u_1^j A_j, \\ A'_j &= 2j+1 + \frac{(2j+1)(2j)(2j-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{u_1}{u_2} + \dots + \left( \frac{u_1}{u_2} \right)^j. \end{aligned} \quad (20)$$

К алгебраической системе (20) следует добавить второе условие (12), которое можно записать в дискретной форме:

$$\sum_{\nu=1}^M \frac{R_\nu^0}{\sqrt{(1-\lambda_2^2)(\tau_\nu+1)/2+\lambda_2^2}} = 0. \quad (21)$$

Алгебраические системы (18), (19) и (20), (21) являются связанными с бесконечными линейными системами относительно коэффициентов  $\alpha_{2k}$ ,  $\beta_{2k}$ ,  $A_{2k}$ , а также с системой (11), в которых вместо  $B_{2k}$ ,  $B_{2k}^*$ ,  $B'_{2k}$ ,  $F_{2k}$  подставлены соотношения в виде интегральных сумм.

При заданной функции натяга соединения связующего и волокна указанные системы полностью определяют решение задачи механики разрушения составного тела (композиата). Коэффициенты интенсивности напряжений в окрестности вершин трещин определяются на основе приведенных выше формул соотношениями

$$K_I^{\lambda_1} = \sqrt{\frac{\pi l(1 - \eta_1^2)}{\eta_1}} \frac{1}{2M} \sum_{k=1}^M (-1)^{k+M} p_k^0 \operatorname{tg} \frac{\theta_k}{2}, \quad K_I^l = \sqrt{\pi l(1 - \eta_1^2)} \frac{1}{2M} \sum_{k=1}^M (-1)^k p_k^0 \operatorname{ctg} \frac{\theta_k}{2},$$

$$K_I^a = \sqrt{\frac{\pi b(1 - \lambda_2^2)}{\lambda_2}} \frac{1}{2M} \sum_{\nu=1}^M (-1)^{\nu+M} R_\nu^0 \operatorname{tg} \frac{\theta_\nu}{2}, \quad K_I^b = \sqrt{\pi b(1 - \lambda_2^2)} \frac{1}{2M} \sum_{\nu=1}^M (-1)^\nu R_\nu^0 \operatorname{ctg} \frac{\theta_\nu}{2}.$$

**Определение оптимального натяга соединения волокна и связующего.** Рассмотрим задачу оптимального проектирования составного тела. Для построения недостающих уравнений необходимо найти нормальное тангенциальное напряжение  $\sigma_\theta$  на границе раздела сред. Напряжение  $\sigma_\theta$  на контуре  $|z| = \lambda$  определяем с помощью формулы Колосова — Мусхелишвили [24]

$$\sigma_\theta + i\tau_{r\theta} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + [\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] e^{2i\theta}. \quad (22)$$

Подставляя в (22) разложения функций  $\Phi(z)$ ,  $\overline{\Phi(z)}$ ,  $\Phi'(z)$ ,  $\Psi(z)$  на контуре  $z = \lambda e^{i\theta}$  и разделяя действительные и мнимые части, находим  $\sigma_\theta$ .

Требуя выполнения дополнительных условий (3), для функции  $\sigma_\theta(\theta, A_{2k}^t)$  находим ее максимальное значение на контуре  $L$

$$\max \sigma_\theta(\theta_*, A_{2k}^t),$$

где  $\theta_*$  — решение уравнения

$$\frac{d\sigma_\theta(\theta)}{d\theta} = 0.$$

Для построения недостающих уравнений введем условие минимизации максимального значения окружного напряжения  $\sigma_\theta$  на контуре  $L$  раздела сред

$$\min_{\eta \in C} \max_{\theta \in [0, 2\pi]} \sigma_\theta(\eta, \theta)$$

при следующих ограничениях:

$$K_I^{\lambda_1} = 0, \quad K_I^l = 0, \quad K_I^a = 0, \quad K_I^b = 0, \quad \max \sigma_\theta \leq \sigma_*. \quad (23)$$

Здесь  $\sigma_*$  — допустимое окружное напряжение, определяемое в эксперименте.

Проектную функцию  $q(\theta)$  нужно выбрать таким образом, чтобы обеспечивалась минимизация максимального значения напряжения  $\sigma_\theta$  (минимаксный критерий). Так как напряжения  $\sigma_\theta(\theta, A_{2k}^t)$  (показатель качества управления) и  $\max \sigma_\theta(A_{2k}^t)$  линейно зависят от искоемых коэффициентов  $A_{2k}^t$ , то поставленная задача оптимизации сводится к задаче линейного программирования.

Таким образом, требуется найти значения переменных  $A_{2k}^t$ , удовлетворяющие полученной системе уравнений (ограничений) (11), (18)–(21), (23) относительно коэффициентов  $\alpha_{2k}$ ,  $\beta_{2k}$ ,  $A_{2k}$  и обращающие в минимум линейную функцию  $\max \sigma_\theta$  (целевая функция). Для минимизации напряженного состояния могут быть использованы численные методы решения задач линейного программирования. Наиболее эффективным методом решения рассматриваемой задачи является симплексный алгоритм.

С использованием системы уравнений (11), (18)–(21) относительно  $\alpha_{2k}$ ,  $\beta_{2k}$ ,  $A_{2k}$  и с учетом (23), (3) можно определить напряженно-деформированное состояние композиата и оптимальный натяг при посадке упругого волокна в отверстие связующего.

Бесконечные системы уравнений относительно  $\alpha_{2k}$ ,  $\beta_{2k}$ ,  $A_{2k}$  имеют громоздкий вид. Поскольку степень параметра  $\lambda$  ( $0 < \lambda < 1$ ), входящего в указанные системы, много больше единицы, расчеты значительно упрощаются. В большинстве случаев каждую из этих систем можно редуцировать до двух-трех уравнений [25] и, несмотря на это, получить близкие к точным результаты для значений радиуса отверстия  $\lambda$ , которые используются при решении практических задач.

При численной реализации изложенного метода указанные выше алгебраические системы решались с помощью симплексного алгоритма. Использовался метод редукции алгебраических систем. Исследовались одностороннее растяжение композита в одном направлении при действии постоянных напряжений  $\sigma_y^\infty$  ( $\sigma_x^\infty = 0$ ) и всестороннее растяжение при действии напряжений  $\sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = \sigma_0$ . Оказалось, что при изменении радиуса кругового отверстия (волокна) в диапазоне  $0,1 < \lambda < 0,6$  значения величин  $p_k^0$ ,  $R_\nu^0$ , а также коэффициенты  $\alpha_{2k}$ ,  $\beta_{2k}$ ,  $A_{2k}^t$  практически не меняются (совпадают с точностью до пятого знака) при  $M \geq 20$ . В диапазоне значений  $0,6 < \lambda < 0,8$  достаточно выбрать значение  $M = 40$  и редуцировать бесконечные системы относительно  $\alpha_{2k}$ ,  $\beta_{2k}$ ,  $A_{2k}^t$  до 12 уравнений (решения совпадают с точностью до четвертого знака). Для радиуса кругового отверстия  $\lambda > 0,8$  начиная с  $M = 60$  решения совпадают с точностью до третьего знака, при этом системы для  $\alpha_{2k}$ ,  $\beta_{2k}$ ,  $A_{2k}^t$  редуцировались до 30 уравнений. Заметим, что значение параметра  $\lambda > 0,8$  не входит в рабочий диапазон значений радиуса кругового отверстия матрицы. Быстрая сходимость алгоритма при  $0 < \lambda < 0,8$  объясняется тем, что параметр  $\lambda$ , входящий в коэффициенты систем (18)–(21) относительно  $\alpha_{2k}$ ,  $\beta_{2k}$ ,  $A_{2k}^t$ , имеет большую степень.

В табл. 1 приведены результаты расчетов коэффициентов  $A_{2k}^t$  искомого натяга соединения волокна и связующего для различных значений радиуса отверстий в случае треугольной сетки отверстий ( $\eta = 1$ ,  $\alpha = \pi/3$ ) при всестороннем растяжении и растяжении в одном направлении. В табл. 2 приведены результаты расчетов при всестороннем растяжении и растяжении в одном направлении композита в случае квадратной сетки отверстий в связующем ( $\eta = 1$ ,  $\alpha = \pi/2$ ). В расчетах использовались следующие значения параметров: для связующего  $\mu = 0,32$ ,  $G = 2,5 \cdot 10^5$  МПа, для волокна  $\mu_0 = 0,30$ ,  $G_0 = 4,5 \cdot 10^5$  МПа. На рис. 2–5 приведены результаты расчетов полей напряжений в “ячейке симметрии” при различных значениях параметров модели. На рис. 2, 3 представлены кривые, соответствующие распределению нормальных напряжений  $\sigma_x^* = \sigma_x/\sigma_x^\infty$ ,  $\sigma_y^* = \sigma_y/\sigma_y^\infty$  вдоль перемычки  $AB$ , расположенной между соседними волокнами, и прямолинейной границы  $BC$ , являющейся перпендикуляром к перемычке (см. рис. 1), в случае квадратной сетки отверстий при значениях радиуса отверстия  $\lambda = 0,2; 0,5$ . На рис. 4, 5 показаны распределения нормальных напряжений  $\sigma_x^*$ ,  $\sigma_y^*$  в случае треугольной сетки отверстий при  $\lambda = 0,2; 0,5$ .

Заметим, что в случае отсутствия волокон при действии внешней нагрузки напряжения  $\sigma_\theta$  в любых точках связующего положительны и по абсолютной величине больше напряжений  $\sigma_r$ . Наибольшей величины напряжения достигают вблизи внутренней поверхности отверстий связующего. Эти напряжения можно уменьшить за счет посадки волокон в связующее с натягом. Для этого в связующем изготавливаются отверстия, диаметр которых меньше внешнего диаметра волокна. Соотношение между диаметром волокна и размером отверстия в исходном состоянии называется натягом посадки. В результате натяга в композите возникают начальные напряжения, которые накладываются на напряжения, возникающие вследствие приложения внешней нагрузки. Определен натяг посадки, при котором окружное растягивающее напряжение становится минимальным, а коэффициенты интенсивности напряжений в окрестности всех вершин трещин становятся равными нулю. Таким образом, наличие армирующих волокон обеспечивает смыкание берегов трещин в окрестности вершин, предотвращающее развитие трещин, и оптимальное распределение напряжений в композите.

Таблица 1

Значения коэффициентов Фурье оптимального натяга в случае треугольной сетки отверстий

$\lambda$	$\lambda_1$	Всестороннее растяжение				Растяжение в одном направлении			
		$A_0^t$	$A_6^t$	$A_{12}^t$	$A_{18}^t$	$A_0^t$	$A_6^t$	$A_{12}^t$	$A_{18}^t$
0,2	0,35	0,069	0,029	0,010	0,001	0,072	0,032	0,015	0,003
	0,45	0,062	0,036	0,015	0,006	0,070	0,044	0,022	0,008
	0,55	0,047	0,041	0,022	0,013	0,051	0,048	0,024	0,016
	0,65	0,052	0,057	0,029	0,017	0,061	0,066	0,031	0,020
	0,75	0,049	0,061	0,036	0,022	0,058	0,067	0,044	0,026
0,3	0,45	0,093	0,029	0,011	0,002	0,095	0,033	0,015	0,003
	0,55	0,068	0,038	0,018	0,009	0,074	0,041	0,019	0,012
	0,65	0,057	0,046	0,020	0,015	0,061	0,052	0,027	0,018
	0,75	0,052	0,058	0,039	0,018	0,056	0,066	0,045	0,022
0,4	0,55	0,081	0,030	0,010	0,004	0,084	0,032	0,013	0,006
	0,65	0,060	0,042	0,016	0,012	0,065	0,047	0,019	0,017
	0,75	0,048	0,046	0,024	0,017	0,052	0,048	0,028	0,019
0,5	0,65	0,087	0,028	0,012	0,004	0,092	0,031	0,015	0,005
	0,75	0,074	0,043	0,027	0,016	0,079	0,047	0,029	0,018

Таблица 2

Значения коэффициентов Фурье оптимального натяга в случае квадратной сетки отверстий

$\lambda$	$\lambda_1$	Всестороннее растяжение				Растяжение в одном направлении			
		$A_0^t$	$A_4^t$	$A_8^t$	$A_{12}^t$	$A_0^t$	$A_4^t$	$A_8^t$	$A_{12}^t$
0,2	0,35	0,063	0,019	0,008	0,002	0,073	0,025	0,011	0,003
	0,45	0,058	0,032	0,014	0,005	0,061	0,038	0,016	0,007
	0,55	0,043	0,041	0,017	0,011	0,047	0,048	0,021	0,013
	0,65	0,045	0,048	0,025	0,015	0,051	0,050	0,029	0,019
	0,75	0,041	0,055	0,033	0,017	0,048	0,065	0,038	0,021
0,3	0,45	0,087	0,025	0,007	0,001	0,093	0,028	0,010	0,002
	0,55	0,065	0,030	0,015	0,008	0,071	0,034	0,018	0,011
	0,65	0,053	0,041	0,020	0,013	0,059	0,048	0,022	0,015
	0,75	0,050	0,049	0,030	0,017	0,056	0,057	0,041	0,022
0,4	0,55	0,073	0,026	0,008	0,004	0,082	0,031	0,010	0,005
	0,65	0,056	0,039	0,014	0,011	0,065	0,047	0,019	0,013
	0,75	0,044	0,041	0,020	0,015	0,048	0,046	0,027	0,018
0,5	0,65	0,087	0,025	0,009	0,005	0,090	0,029	0,015	0,006
	0,75	0,072	0,038	0,024	0,013	0,079	0,044	0,028	0,015

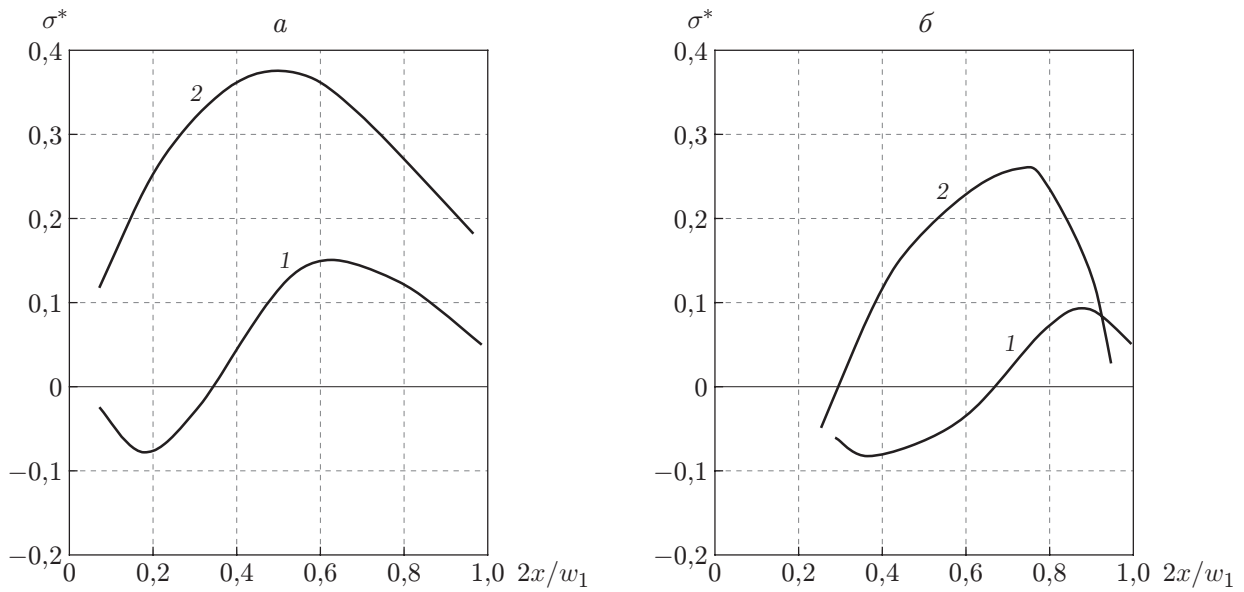


Рис. 2. Распределения нормальных напряжений  $\sigma_x^*$  (1) и  $\sigma_y^*$  (2) вдоль перемычки  $AB$  в случае квадратной сетки отверстий:  
 а —  $\lambda = 0,2$ , б —  $\lambda = 0,5$

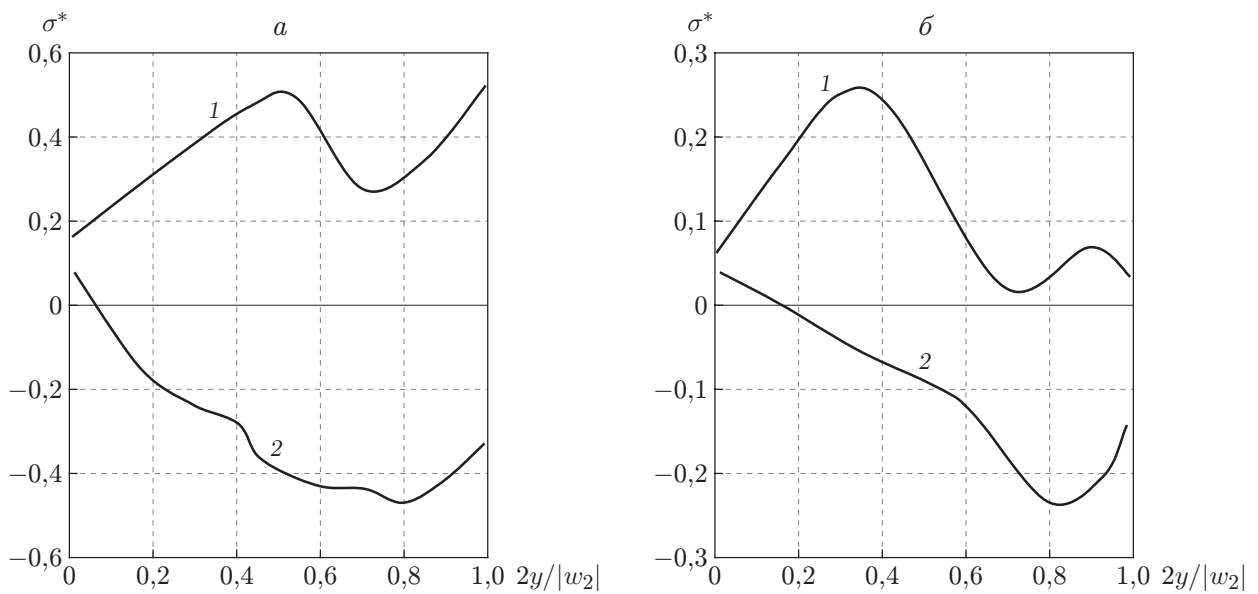


Рис. 3. Распределения нормальных напряжений  $\sigma_x^*$  (1) и  $\sigma_y^*$  (2) вдоль границы  $BC$  в случае квадратной сетки отверстий:  
 а —  $\lambda = 0,2$ , б —  $\lambda = 0,5$

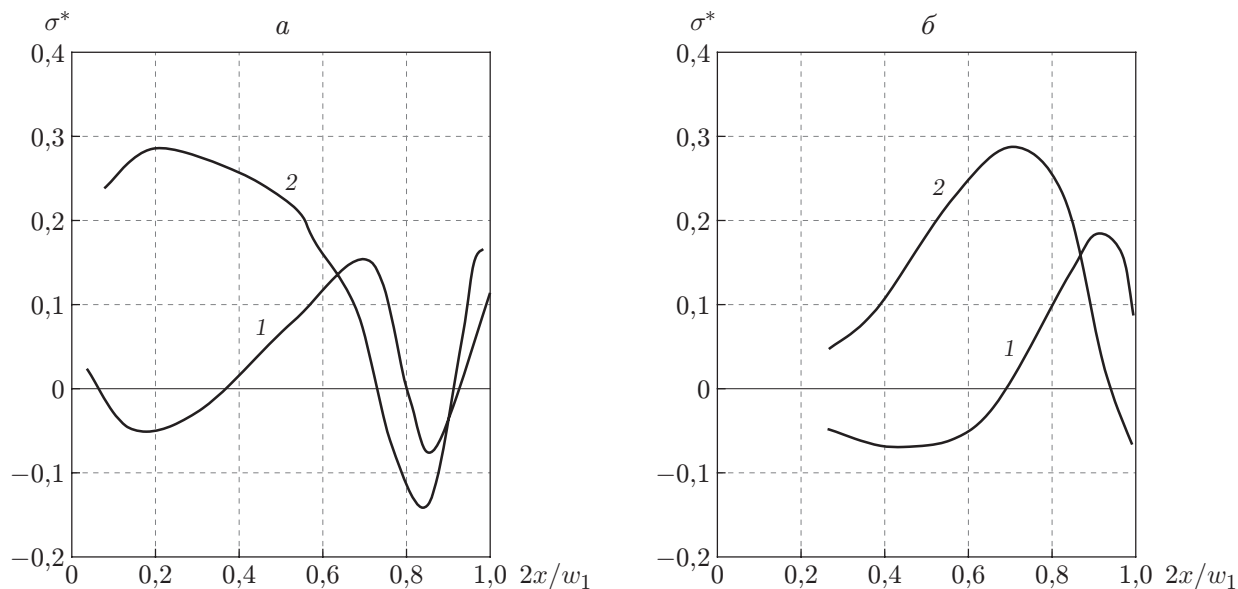


Рис. 4. Распределения нормальных напряжений  $\sigma_x^*$  (1) и  $\sigma_y^*$  (2) вдоль перемычки  $AB$  в случае треугольной сетки отверстий:

$a$  —  $\lambda = 0,2$ ,  $b$  —  $\lambda = 0,5$

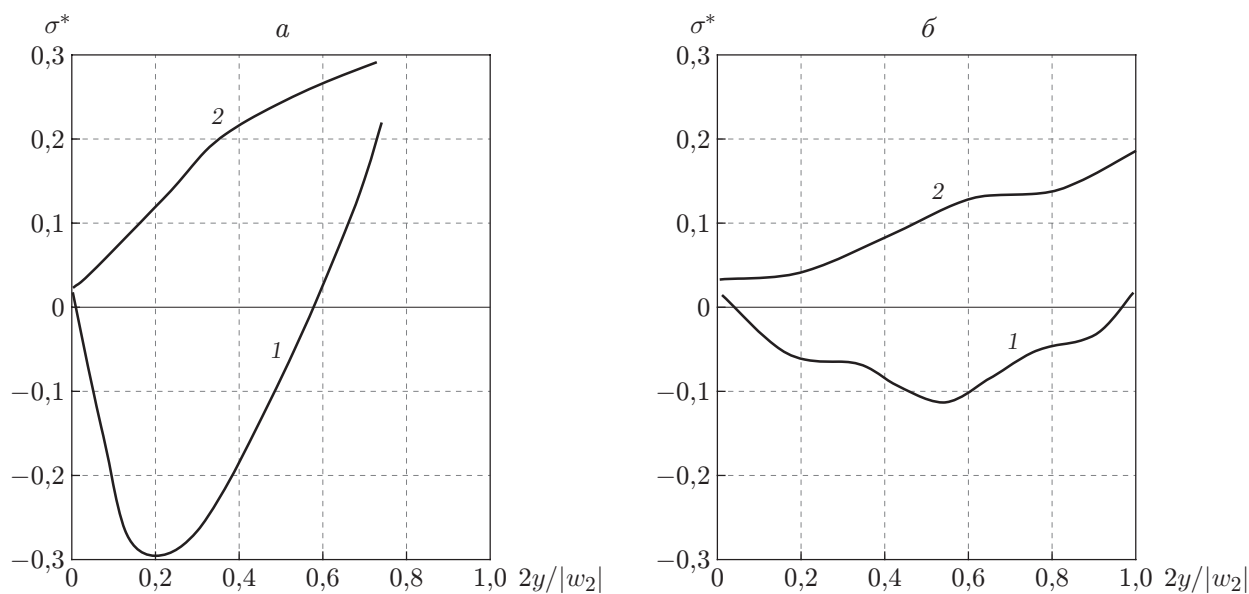


Рис. 5. Распределения нормальных напряжений  $\sigma_x^*$  (1) и  $\sigma_y^*$  (2) вдоль границы  $BC$  в случае треугольной сетки отверстий:

$a$  —  $\lambda = 0,2$ ,  $b$  —  $\lambda = 0,5$



**Выводы.** В работе получены следующие основные результаты. Предложен критерий выбора натяга, предотвращающего разрушение составного тела и обеспечивающего оптимальное распределение напряжений. Найденный натяг соединения материалов обеспечивает минимизацию концентрации напряжений на границе раздела сред и коэффициентов интенсивности напряжений, а также повышение несущей способности композита. Результаты проведенного исследования могут быть использованы при оптимальном проектировании составных тел (композитов) за счет выбора натяга соединения связующего и волокон.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Мирсалимов В. М., Бахышов Ф. А.** Обратная задача механики разрушения составной перфорированной пластины при изгибе // Пробл. машиностроения и надежности машин. 2005. Т. 34, № 5. С. 28–37.
2. **Castagnetti D., Dragoni E.** Optimal aspect ratio of interference fits for maximum load transfer capacity // J. Strain Anal. Engng Design. 2005. V. 40, iss. 2. P. 177–184.
3. **Бахышов Ф. А., Мирсалимов В. М.** Обратная двоякопериодическая задача теории изгиба пластины с упругими включениями // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 4. С. 153–161.
4. **Chakherlou T. N., Mirzajanzadeh M., Vogwell J.** Experimental and numerical investigations into the effect of an interference fit on the fatigue life of double shear lap joints // Engng Failure Anal. 2009. V. 16, iss. 7. P. 2066–2080.
5. **Мирсалимов В. М.** Обратная задача механики разрушения для диска, посаженного на вращающийся вал // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 4. С. 201–209.
6. **Croccolo D., De Agostinis M., Vincenzi N.** Interference fit effect on holed single plates loaded with tension-tension stresses // Frattura Integrità Strutturale. 2012. V. 6. P. 13–20.
7. **Мирсалимов В. М., Велиев Ф. Э.** Обратная задача теории упругости для волокна, подкрепленной обоймой // Пробл. машиностроения и надежности машин. 2012. Т. 41, № 4. С. 64–72.
8. **Croccolo D., De Agostinis M., Vincenzi N.** Design and optimization of shaft-hub hybrid joints for lightweight structures: Analytical definition of normalizing parameters // Intern. J. Mech. Sci. 2012. V. 56. P. 77–85.
9. **Abazadeh B., Chakherlou T. N., Alderliesten R. C.** Effect of interference fitting and/or bolt clamping on the fatigue behavior of Al alloy 2024-T3 double shear lap joints in different cyclic load ranges // Intern. J. Mech. Sci. 2013. V. 72. P. 2–12.
10. **Strozzi A., Baldini A., Giacomini M., et al.** Achievement of a uniform contact pressure in a shaft-hub press-fit // Proc. Inst. Mech. Engrs. Pt C. J. Mech. Engng Sci. 2013. V. 227, iss. 3. P. 405–419.
11. **Mirsalimov V. M., Veliyev F. E.** Inverse problem of failure mechanics for a drawing die strengthened with a holder // Acta Polytech. Hungarica. 2013. V. 10, iss. 1. P. 121–138.
12. **Biron G., Vadean A., Tudose L.** Optimal design of interference fit assemblies subjected to fatigue loads // Structural Multidisciplinary Optimizat. 2013. V. 47, iss. 3. P. 441–451.
13. **Xue H. Q., Tao Q., Bayraktar E.** Effect of interference-fit on fatigue life for composite lap joints // Adv. Materials Res. 2014. V. 939. P. 39–46.
14. **Jiang J., Bi Y., Dong H., et al.** Influence of interference fit size on hole deformation and residual stress in hi-lock bolt insertion // Proc. Inst. Mech. Engrs. Pt C. J. Mech. Engng Sci. 2014. V. 228, iss. 18. P. 3296–3305.
15. **Pedersen N. L.** On optimization of interference fit assembly // Structural Multidisciplinary Optimizat. 2016. V. 54, iss. 2. P. 349–359.

16. **Bi Y., Jiang J., Ke Y.** Effect of interference fit size on local stress in single lap bolted joints // Adv. Mech. Engng. 2015. V. 7, iss. 6. P. 1–12.
17. **Lü X., Zhao J., Hu L., Wang H.** Effect of interference fits on the fatigue lives of bolted composite joints // J. Shanghai Jiaotong Univ. (Science). 2016. V. 21, iss. 6. P. 648–654.
18. **Kim S.-Y., He B., Kim D. (D.-W.), et al.** Bearing strength of interference-fit pin joined glass fiber reinforced plastic composites // J. Composite Materials. 2016. [Electron. resource]. Режим доступа: <https://doi.org/10.1177/0021998316636462>.
19. **Zou P., Li Y., Zhang K., et al.** Influence of interference-fit percentage on stress and damage mechanism in hi-lock pin installation process of CFRP // J. Composite Materials. 2017. V. 51, iss. 25. P. 3525–3538.
20. **Zou P., Zhang K., Li Y., et al.** Bearing strength and failure analysis on the interference-fit double shear-lap pin-loaded composite // Intern. J. Damage Mech. 2018. V. 27, iss. 2. P. 179–200.
21. **Mirsalimov V. M.** The inverse doubly periodic problem of fracture mechanics for a composite reinforced with unidirectional fibres // Math. Mech. Solids. 2019. V. 24, iss. 10. P. 3254–3278.
22. **Wang X., Lou Z., Wang X., et al.** Prediction of stress distribution in press-fit process of interference fit with a new theoretical model // Proc. Inst. Mech. Engrs. Pt C. J. Mech. Engng Sci. 2019. V. 233, iss. 8. P. 2834–2846.
23. **Черепанов Г. П.** Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
24. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
25. **Григолюк Э. И.** Перфорированные пластины и оболочки / Э. И. Григолюк, Л. А. Фильштинский. М.: Наука, 1970.
26. **Панасюк В. В.** Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацьшин. Киев: Наук. думка, 1976.

*Поступила в редакцию 7/X 2019 г.,  
после доработки — 9/XII 2019 г.  
Принята к публикации 23/XII 2019 г.*

---