УДК 519.632

Краевая задача для одной переопределенной стационарной системы, возникающей в двухскоростной гидродинамике*

М.В. Урев[1,2,3], Х.Х. Имомназаров[1], Жиан-Ган Тан[4]

[1]Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

[2]Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090,

[3]Сибирский институт управления — филиал РАНХиГС, ул. Нижегородская, 6, Новосибирск, 630102

[4]YiLi Normal University, 448, Jiefang Road, Yinning Xinjiang, P.R. of China,

E-mails: mih.urev2010@yandex.ru (Урев М.В.), imom@omzg.sscc.ru (Имомназаров Х.Х.), tjg@ylsy.edu.cn (Тан Жиан-Ган)

Урев М.В., Имомназаров Х.Х., Тан Жиан-Ган. Краевая задача для одной переопределенной стационарной системы, возникающей в двухскоростной гидродинамике // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние.— Новосибирск, 2017.— Т. 20, № 4.— С. 425–437.

Рассматривается стационарная система двухскоростной гидродинамики с одним давлением и неоднородными дивергентными и краевыми условиями для двух скоростей. Данная система является переопределенной. Заменой искомых функций задача приводится к однородной. Решение полученной системы сводится к последовательному решению двух краевых задач: задачи Стокса для одной скорости и давления и переопределенной системы для другой скорости. Приведены обобщенные постановки этих задач и их дискретные аппроксимации по методу конечных элементов. Для решения переопределенной задачи применяется новый вариант метода регуляризации.

DOI: 10.15372/SJNM20170406

Ключевые слова: *переопределенная стационарная система двухскоростной гидродинамики, множитель Лагранжа, метод конечных элементов.*

Urev M.V., Imomnazarov Kh.Kh., Tang Jian-Gang. A boundary value problem for one overdetermined stationary system emerging in the two-velocity hydrodynamics // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci.— Novosibirsk, 2017.— Vol. 20, № 4.— P. 425–437.

In this paper we investigate the two-velocity stationary hydrodynamics system with a single pressure and inhomogeneous divergent and boundary conditions for the two velocities. This system is overdetermined. By replacing the unknown functions, the problem is reduced to a homogeneous one. The solution of the resulting system is reduced to the consecutive solutions of the two boundary value problems: the Stokes problem for a single velocity and pressure, and overdetermined system for the other velocity. We present the generalized statements of these problems and their discrete approximation using the finite element method. To solve the overdetermined problem we apply a version of the regularization methods.

Keywords: *overdetermined two-velocity stationary hydrodynamics system, Lagrange multiplier, finite element method.*

1. Введение

Формы движения двухфазных потоков значительно многообразнее, а законы, ими управляющие, существенно сложнее, чем формы движения и законы гидродинамики од-

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 14-11-00485П).

нородных сред. Интерес исследователей к проблемам и задачам механики многофазных сред обусловлен широким распространением таких систем в природе и их интенсивным использованием в современной технике. Математические модели многофазных или гетерогенных сред описывают различные явления гидро- и газодинамики, теории фильтрации, ракетостроения, угле- и нефтедобычи, ядерной и неядерной теплоэнергетики, металлургической и строительной промышленности, астрофизики. Модели многофазных сред возникают также при рассмотрении разнообразных задач описания техногенных систем: моделирование динамических процессов в нефтяных скважинах и приповерхностных пластах, а также при описании эндогенных процессов при решении связанных с ними задач геодинамики и моделирования рудообразующих структур в рамках единой согласованной модели эволюции системы, включающей верхнюю мантию, мантийную литосферу и земную кору, включая геоэкологический мониторинг за конкретными природными и техногенными объектами.

В [1, 2] для объяснения локализации и генерации магмы предложена нелинейная математическая модель на основе метода законов сохранения. В этих работах сплошная среда в геологическом временном масштабе представлена как вязкая жидкость-1 за счет собственной вязкости, либо достигающая необходимых термодинамических условий протекания фазового перехода по другим причинам. По границам зерен и межзеренным узлам начинает скапливаться магма–жидкость-2 с вязкостью, присущей известным в геологии расплавам. Такой расплав включается в процесс совместного тепломассопереноса и фильтруется сквозь систему, его породившую. Другими словами, эта модель представляет собой динамику взаимного проникновения одной менее вязкой жидкости сквозь более вязкую среду как своеобразный процесс фильтрации. В данной работе рассматривается краевая задача в ограниченной области для линеаризованной стационарной системы уравнений нелинейной модели В.Н. Доровского [1, 2].

В ограниченной односвязной области Ω трехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$ рассматривается линеаризованная неоднородная стационарная система двухскоростной гидродинамики относительно скоростей $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ и давления p [3–5]:

$$\nu_1 \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{u}_1 - \mathbf{grad}\, p = -\rho \boldsymbol{f}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u}_1 = q_1 \quad \text{в } \Omega, \tag{1}$$

$$\nu_2 \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{u}_2 - \mathbf{grad}\, p = -\rho \boldsymbol{f}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u}_2 = q_2 \quad \text{в } \Omega, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{g}_1, \quad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{g}_2 \qquad \text{на } \partial\Omega, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3)$ — массовая сила, $\rho = \rho_1 + \rho_2$, ρ_1, ρ_2 — парциальные плотности соответствующих фаз, $\boldsymbol{u}_i = (u_{i1}, u_{i2}, u_{i3})$, $i = 1, 2$, $\mathbf{grad}$ — оператор градиента по $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$, ν_1 и ν_2 — соответствующие сдвиговые вязкости фаз [5]. Через $\boldsymbol{\Delta}$ и $\triangle$ будем обозначать векторный и скалярный операторы Лапласа соответственно, так что

$$\boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{v} := -\,\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\, \boldsymbol{v} + \mathbf{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{v}, \quad \triangle \varphi := \operatorname{div} \mathbf{grad}\, \varphi.$$

Через q_1 и q_2 обозначены источники, отвечающие за массобмен между фазами, которые удовлетворяют равенству

$$\rho_1 q_1 + \rho_2 q_2 = 0.$$

В п. 2 для исходной переопределенной системы (1)–(3) устанавливается необходимое условие разрешимости. Затем система (1)–(3) заменой неизвестных скоростей и правых частей в векторных уравнениях (1) и (2) приводится к системе с однородными дивергентными ограничениями и однородными краевыми условиями для скоростей. Преобразованная система является неэллиптической переопределенной системой и разрешима только тогда, когда дивергенции правых частей совпадают. Для получения эллиптической задачи, согласно методу ортогонального расширения С.Г. Крейна [6], в систему вводится неизвестная скалярная функция с нулевым условием Дирихле. Далее решение данной системы сводится к последовательному решению двух краевых задач: задачи Стокса для одной скорости и давления и расширенной по С.Г. Крейну задачи для второй скорости.

В п. 3 приводятся необходимые сведения из функционального анализа и формулируются обобщенные постановки для приведенных выше двух краевых задач. Для задачи Стокса принята хорошо изученная смешанная обобщенная постановка в терминах скорость–давление. Для второй векторной задачи смешанная обобщенная постановка оригинальным приемом приводится к регуляризированному уравнению.

В п. 4 для решения регуляризированной задачи используются векторные конечные элементы Неделека на тетраэдрах, предложенные в работе [11]. Вводятся необходимые конечно-элементные пространства, и формулируется конечномерная вариационная постановка регуляризированной задачи.

В п. 5 для решения регуляризированной конечно-элементной задачи получена система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Показано, что матрица СЛАУ обладает хорошими свойствами, так что для решения СЛАУ можно применять метод сопряженных градиентов с различными вариантами предобуславливания.

2. Рассмотрение системы при гладких данных

В данном пункте будем выполнять преобразования, связанные с системой (1)–(3), предполагая, что все функции обладают необходимой гладкостью.

Заметим, что правые части дивергентных уравнений в (1) и (2) должны удовлетворять определенным условиям согласования. Действительно, применяя формулу векторного анализа $\operatorname{div}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} = 0$, получим, что

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\Delta v} = \operatorname{div}\mathbf{grad}(\operatorname{div}\boldsymbol{v}) = \triangle(\operatorname{div}\boldsymbol{v}). \tag{4}$$

Далее, действуя на первые векторные уравнения в (1) и (2) оператором дивергенции, получим из одного уравнения

$$\triangle p = \nu_1 \triangle q_1 + \rho \operatorname{div}\boldsymbol{f},$$

а из другого —

$$\triangle p = \nu_2 \triangle q_2 + \rho \operatorname{div}\boldsymbol{f}, \tag{5}$$

откуда

$$\nu_1 \triangle q_1 = \nu_2 \triangle q_2. \tag{6}$$

Граничные функции $\boldsymbol{g}_i$ в (3) должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{n}\, ds = \int_{\Omega} q_i\, d\boldsymbol{x}, \quad i = 1, 2, \tag{7}$$

где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали к границе $\partial\Omega$. Систему уравнений (1)–(3) можно свести к равносильной системе с однородными дивергентными и краевыми условиями. Для этого вводим функции $\tilde{\boldsymbol{u}}_i = \mathbf{grad}\,\psi_i$, $i = 1, 2$, где ψ_i — решения граничных задач

$$\triangle\psi_i = q_i \quad \text{в } \Omega, \quad \psi_i = 0 \quad \text{на } \partial\Omega.$$

Тогда новые искомые функции $\tilde{\boldsymbol{v}}_i = \boldsymbol{u}_i - \tilde{\boldsymbol{u}}_i$ будут удовлетворять системе уравнений:

$$\nu_i \boldsymbol{\Delta} \tilde{\boldsymbol{v}}_i - \mathbf{grad}\, p = \tilde{\boldsymbol{f}}_i, \quad \operatorname{div} \tilde{\boldsymbol{v}}_i = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad i = 1, 2, \tag{8}$$

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_1 = \boldsymbol{a}_1, \quad \tilde{\boldsymbol{v}}_2 = \boldsymbol{a}_2 \quad \text{на } \partial\Omega, \tag{9}$$

где $\tilde{\boldsymbol{f}}_i = -\nu_i \boldsymbol{\Delta}\, \mathbf{grad}\, \psi_i - \rho \boldsymbol{f}$ в Ω и $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{g}_i - \mathbf{grad}\, \psi_i$ на $\partial\Omega$. Отметим, что если имеют место соотношения (6) и (7), то правые части $\tilde{\boldsymbol{f}}_i$ в (8) и граничные функции $\boldsymbol{a}_i$ в (9) удовлетворяют условиям:

$$\operatorname{div} \tilde{\boldsymbol{f}}_1 = \operatorname{div} \tilde{\boldsymbol{f}}_2 \quad \text{в } \Omega, \qquad \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{n}\, ds = 0, \quad i = 1, 2. \tag{10}$$

Граничные функции $\boldsymbol{a}_i$ в (9), удовлетворяющие условиям (10), могут быть продолжены в область Ω в виде соленоидальных функций $\boldsymbol{z}_i$, т. е. так, что $\operatorname{div} \boldsymbol{z}_i = 0$ в Ω и $\boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{a}_i$ на $\partial\Omega$ (см. [7, с. 38; 8, лемма 2.2]). Положим $\tilde{\boldsymbol{v}}_i = \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{z}_i$. Тогда из системы (8), (9) получим следующую систему уравнений относительно функций $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, p$:

$$\nu_i \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{v}_i - \mathbf{grad}\, p = \boldsymbol{f}_i, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v}_i = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad i = 1, 2, \tag{11}$$

$$\boldsymbol{v}_1 = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0} \quad \text{на } \partial\Omega, \tag{12}$$

где $\boldsymbol{f}_i = \tilde{\boldsymbol{f}}_i - \nu_i \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{z}_i$ в Ω. Кроме того, функции $\boldsymbol{f}_i$ должны удовлетворять условию разрешимости системы (11), (12), а именно, необходимо, чтобы

$$\operatorname{div} \boldsymbol{f}_1 = \operatorname{div} \boldsymbol{f}_2 \quad \text{в } \Omega. \tag{13}$$

Далее будем рассматривать систему уравнений (11), (12), которая является переопределенной, так как состоит из восьми уравнений и семи искомых скалярных функций и, следовательно, не является эллиптической. Следуя [6], мы добавим к нашей системе градиент от новой искомой функции φ с нулевым граничным условием так, что наша система станет эллиптической. Итак, вместо системы (11), (12) будем рассматривать расширенную систему:

$$\nu_1 \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{v}_1 - \mathbf{grad}\, p = \boldsymbol{f}_1, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v}_1 = 0 \quad \text{в } \Omega, \tag{14}$$

$$\nu_2 \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{v}_2 - \mathbf{grad}\, p + \mathbf{grad}\, \varphi = \boldsymbol{f}_2, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v}_2 = 0 \quad \text{в } \Omega, \tag{15}$$

$$\boldsymbol{v}_1 = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}, \quad \varphi = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \tag{16}$$

Решение системы (14)–(16) сводится к последовательному решению двух краевых задач. Сначала решается задача для $(\boldsymbol{v}_1, p)$:

$$\nu_1 \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{v}_1 - \mathbf{grad}\, p = \boldsymbol{f}_1, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v}_1 = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad \boldsymbol{v}_1 = \mathbf{0} \quad \text{на } \partial\Omega. \tag{17}$$

Затем определяется пара $(\boldsymbol{v}_2, \varphi)$ как решение системы:

$$\begin{gathered} \nu_2 \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{v}_2 + \mathbf{grad}\, \varphi = \mathbf{grad}\, p + \boldsymbol{f}_2, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v}_2 = 0 \quad \text{в } \Omega, \\ \boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}, \ \varphi = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \end{gathered} \tag{18}$$

Для задач (17) и (18) выполнение условия согласования (13) не предполагается. Если же условие (13) выполнено, то $\varphi = 0$ в Ω и тройка функций $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, p)$ удовлетворяет системе (11), (12). Действительно, пусть выполнено условие (13). Тогда после применения к первому уравнению системы (17) и к первому уравнению системы (18) оператора div, ввиду (4), (13) и равенств $\operatorname{div} \boldsymbol{v}_i = 0$, $i = 1, 2$, получим:

$$-\Delta p = \operatorname{div} \boldsymbol{f}_1,$$
$$\operatorname{div}(\nu_2 \boldsymbol{\Delta v}_2 + \mathbf{grad}\,\varphi) = \triangle\varphi,$$
$$\operatorname{div}(\mathbf{grad}\,p + \boldsymbol{f}_2) = \Delta p + \operatorname{div} \boldsymbol{f}_2 = -\operatorname{div} \boldsymbol{f}_1 + \operatorname{div} \boldsymbol{f}_2 = 0.$$

Откуда имеем

$$\triangle\varphi = 0 \text{ в } \Omega, \quad \varphi = 0 \quad \text{на } \partial\Omega.$$

Значит, $\varphi = 0$ в Ω.

Отметим, что функцию φ можно было ввести в первое векторное уравнение системы (14)–(16) и последовательно решать две краевые задачи в обратном порядке. При выполнении условия согласования (13) результат решения не изменится.

3. Обобщенная постановка

Сначала приведем обобщенную постановку задачи (17). Для этого введем необходимые гильбертовы функциональные пространства [9]. Через $H^k(\Omega)$, где k — положительное целое, будем обозначать скалярные гильбертовы пространства Соболева $W_2^k(\Omega)$:

$$H^k(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) : D^\alpha f \in L^2(\Omega)\ \forall\, |\alpha| \le k\}.$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ — мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, D^α — это дифференциальный оператор:

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}}.$$

Норма и полунорма в них обозначаются через $\|\cdot\|_{k,\Omega}$ и $|\cdot|_{k,\Omega}$ соответственно и определяются равенствами:

$$\|f\|_{k,\Omega}^2 = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \le k} (D^\alpha f)^2\, d\boldsymbol{x}, \qquad |f|_{k,\Omega}^2 = \int_\Omega \sum_{|\alpha| = k} (D^\alpha f)^2\, d\boldsymbol{x}.$$

Введем также пространства:

$$\boldsymbol{H}^k(\Omega) = (H^k(\Omega))^3, \qquad H_0^1(\Omega) = \{f \in H^1(\Omega) : f\, |_{\partial\Omega} = 0\},$$
$$X = \boldsymbol{H}_0^1(\Omega) = (H_0^1(\Omega))^3, \qquad P = L_0^2(\Omega) = \left\{ p \in L^2(\Omega);\ \int_\Omega p\, d\boldsymbol{x} = 0 \right\}.$$

Для пространства вектор-функций $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \boldsymbol{H}^k(\Omega)$ норма и полунорма в нем обозначаются аналогично скалярному случаю и определяются равенствами:

$$\|\boldsymbol{u}\|_{k,\Omega} = \left(\sum_{s=0}^k |\boldsymbol{u}|_{s,\Omega}^2 \right)^{1/2}, \quad |\boldsymbol{u}|_{s,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^3 |u_i|_{s,\Omega}^2 \right)^{1/2}, \ s = 0, \ldots, k.$$

Для функций $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3) \in X$ и $p \in P$ имеем:

$$\|\boldsymbol{u}\|_X = \left(\sum_{i=1}^3 |u_i|_{1,\Omega}^2 \right) g^{1/2}, \qquad \|p\|_P = \|p\|_{0,\Omega} = \left(\int_\Omega p^2\, d\boldsymbol{x} \right)^{1/2}.$$

Далее для $G \subset \mathbb{R}^3$ через $(\cdot,\cdot)_{0,G}$, или просто $(\cdot,\cdot)_0$ в очевидных случаях, будем обозначать скалярное произведение как в $L^2(G)$, так и в $\boldsymbol{L}^2(G) = (L^2(G))^3$. Таким образом, если $p, q \in L^2(G)$, а $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{L}^2(G)$, то

$$(p,q)_{0,G} = \int_G pq\, d\boldsymbol{x}, \qquad (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{0,G} = \int_G \boldsymbol{uv}\, d\boldsymbol{x}.$$

Введем билинейные формы $a_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ на $X\times X$ и $b_1(\boldsymbol{v},q)$ на $X\times P$:

$$a_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \nu_1 \sum_{i,j=1}^{3} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)_0,$$
$$b_1(\boldsymbol{v},q) = -(q, \operatorname{div}\boldsymbol{v})_0.$$

Система (17) является стационарной задачей Стокса движения вязкой несжимаемой жидкости. В качестве ее обобщенной постановки примем широко распространенную смешанную формулировку: найти вектор-функцию $\boldsymbol{v}_1\in X$ и функцию $p\in P$, удовлетворяющие равенствам:

$$a_1(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{u}) + b_1(\boldsymbol{u},p) = -(\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{u})_0 \quad \forall\,\boldsymbol{u}\in X, \tag{19}$$
$$b_1(\boldsymbol{v}_1,q) = 0 \quad \forall\, q\in P. \tag{20}$$

Смешанная постановка (19), (20) задачи Стокса в терминах скорость–давление исследована, например, в [8]. Там же подробно рассмотрен метод конечных элементов для численного решения данной задачи.

Теперь сформулируем обобщенную постановку для задачи (18). Для этого введем гильбертовы пространства (см. [8]):

$$H(\mathbf{rot};\Omega) = \{\boldsymbol{u}\in \boldsymbol{L}_2(\Omega) : \mathbf{rot}\ \boldsymbol{u}\in \boldsymbol{L}_2(\Omega)\},$$
$$H_0(\mathbf{rot};\Omega) = \{\boldsymbol{u}\in H(\mathbf{rot};\Omega) : \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{u}\,|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}\},$$
$$V = H_0(\mathbf{rot};\Omega), \quad Q = H_0^1(\Omega).$$

Пространство V снабжается следующей нормой:

$$\|\boldsymbol{u}\|_V = (\|\,\mathbf{rot}\ \boldsymbol{u}\|_{0,\Omega}^2 + \|\boldsymbol{u}\|_{0,\Omega}^2)^{1/2}, \quad \boldsymbol{u}\in V.$$

Обозначим через $-\boldsymbol{F}_2$ правую часть в первом уравнении системы (18): $-\boldsymbol{F}_2 = \mathbf{grad}\,p + \boldsymbol{f}_2$. Имея ввиду формулу векторного анализа для определения векторного оператора Лапласа, перепишем систему (18) в следующем виде:

$$\begin{cases} \nu_2\,\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}_2 - \mathbf{grad}\,\varphi = \boldsymbol{F}_2 & \text{в } \Omega,\\ \operatorname{div}\boldsymbol{v}_2 = 0 & \text{в } \Omega,\\ \boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0},\ \varphi = 0 & \text{на } \partial\Omega. \end{cases} \tag{21}$$

Теперь вариационную постановку задачи (21) в области Ω сформулируем следующим образом: пусть $\boldsymbol{F}_2\in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$, требуется найти пару функций $(\boldsymbol{v}_2,\varphi)\in V\times Q$, удовлетворяющих равенствам:

$$\begin{cases} a_2(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{u}) + b_2(\boldsymbol{u},\varphi) = (\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{u})_0 & \forall\,\boldsymbol{u}\in V,\\ b_2(\boldsymbol{v}_2,\psi) = 0 & \forall\,\psi\in Q. \end{cases} \tag{22}$$

Здесь $a_2(\cdot,\cdot)$ и $b_2(\cdot,\cdot)$ обозначают билинейные формы на пространствах $V\times V$ и $V\times Q$ соответственно:

$$a_2(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \nu_2 \int_\Omega \mathbf{rot}\,\boldsymbol{u}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x} \quad \forall\,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V, \tag{23}$$

$$b_2(\boldsymbol{u},\psi) = -\int_\Omega \boldsymbol{u}\nabla\psi\,d\boldsymbol{x} \qquad \forall\,\boldsymbol{u}\in V,\ \forall\,\psi\in Q. \tag{24}$$

Очевидно, что $a_2(\cdot,\cdot)$ и $b_2(\cdot,\cdot)$ являются непрерывными билинейными формами на пространствах $V\times V$ и $V\times Q$ соответственно, а $F(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{u})_0$ — непрерывным линейным функционалом на пространстве V.

Билинейным формам $a_2(\cdot,\cdot)$ и $b_2(\cdot,\cdot)$ отвечают два ограниченных линейных оператора: $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V')$ и $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, H^{-1}(\Omega))$, определяемые как

$$\langle \mathcal{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = a_2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \quad \forall\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V,$$
$$\langle \mathcal{B}\boldsymbol{u}, \psi\rangle = b_2(\boldsymbol{u}, \psi) \quad \forall\, \boldsymbol{u} \in V, \forall\, \psi \in Q,$$

где V' и $H^{-1}(\Omega) = Q'$ — сопряженные пространства для V и Q соответственно, а запись $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначает отношение двойственности между элементами исходного и сопряженного ему пространства.

Воспользуемся теперь спецификой нашей исходной задачи (22), связанной с конкретным видом билинейных форм $a_2(\cdot,\cdot)$ и $b_2(\cdot,\cdot)$, которая позволяет исключить из системы (22) функцию φ. Отметим, что если $\psi \in Q$, то $\nabla\psi \in V$, и тогда

$$a_2(\boldsymbol{u}, \nabla\psi) = 0 \quad \forall\, \boldsymbol{u} \in V, \forall\, \psi \in Q,$$

что позволяет выделить из системы (22) отдельную задачу для функции φ, а именно, найти $\varphi \in Q$:

$$b_2(\nabla\psi, \varphi) = (\boldsymbol{F}_2, \nabla\psi)_0 \quad \forall\, \psi \in Q. \tag{25}$$

Используя (25), перепишем второе уравнение в системе (22) в следующем виде:

$$b_2(\boldsymbol{v}_2, \psi) + \beta b_2(\nabla\psi, \varphi) = \beta(\boldsymbol{F}_2, \nabla\psi)_0 \quad \forall\, \psi \in Q, \tag{26}$$

где $\beta > 0$ — произвольная постоянная.

Равенство (26) будем рассматривать как другое уравнение относительно функции φ, т. е. как задачу определения $\varphi \in Q$:

$$c(\varphi, \psi) = \beta^{-1} b_2(\boldsymbol{v}_2, \psi) - (\boldsymbol{F}_2, \nabla\psi)_0 \quad \forall\, \psi \in Q. \tag{27}$$

Здесь $c(\cdot,\cdot) : Q \times Q \to \mathbb{R}$ — билинейная форма, определенная равенством

$$c(\varphi, \psi) = -b_2(\nabla\psi, \varphi) \quad \forall\, \varphi, \psi \in Q.$$

Непрерывность формы $c(\cdot,\cdot)$ на $Q \times Q$ и ее Q-эллиптичность показаны в [10]. Ограниченность линейного функционала в правой части (27) на пространстве Q также устанавливается просто:

$$|(\boldsymbol{F}_2, \nabla\psi)_0 - \beta^{-1} b_2(\boldsymbol{v}_2, \psi)| \le \big(\|\boldsymbol{F}_2\|_0 + \beta^{-1}\|\boldsymbol{v}_2\|_0\big)\|\psi\|_1 \quad \forall\, \psi \in Q.$$

Таким образом, выполнены все условия леммы Лакса–Мильграма для однозначной разрешимости вариационной задачи (27).

Представим задачу (27) в операторном виде. Известно [8, п. 1.2], что ограниченный линейный оператор $\mathcal{C} : Q \to H^{-1}(\Omega)$, определяемый равенством

$$\langle \mathcal{C}\varphi, \psi\rangle = c(\varphi, \psi) \quad \forall\, \varphi, \psi \in Q,$$

является изоморфизмом и, следовательно, имеет ограниченный обратный оператор $\mathcal{C}^{-1} : H^{-1}(\Omega) \to Q$. Напомним также определение обобщенной дивергенции функции $\boldsymbol{F}_2 \in \boldsymbol{L}^2(\Omega)$ как функционала $\operatorname{div} \boldsymbol{F}_2 \in H^{-1}(\Omega)$, который задается равенством

$$\langle \operatorname{div} \boldsymbol{F}_2, q \rangle = -(\boldsymbol{F}_2, \nabla q)_0 \quad \forall\, q \in Q.$$

Теперь вариационную задачу (27) можно переписать в следующем виде:

$$\langle \mathcal{C}\varphi, \psi \rangle = \langle \beta^{-1}\mathcal{B}\boldsymbol{v}_2, \psi \rangle + \langle \operatorname{div} \boldsymbol{F}_2, \psi \rangle \quad \forall\, \psi \in Q,$$

что соответствует операторному уравнению

$$\mathcal{C}\varphi = \beta^{-1}\mathcal{B}\boldsymbol{v}_2 + \operatorname{div} \boldsymbol{F}_2.$$

Таким образом, решение задачи (27) можно представить как

$$\varphi = \beta^{-1}\mathcal{C}^{-1}\mathcal{B}\boldsymbol{v}_2 + \mathcal{C}^{-1} \operatorname{div} \boldsymbol{F}_2. \tag{28}$$

Подставляя в первое уравнение системы (22) вместо функции φ правую часть (28), получим отдельную вариационную задачу для определения векторной функции $\boldsymbol{v}_2$ во всем пространстве V. Именно, найти $\boldsymbol{v}_{2,\beta} \in V$: $\forall\, \boldsymbol{u} \in V$

$$a_2(\boldsymbol{v}_{2,\beta}, \boldsymbol{u}) + \beta^{-1}\langle \mathcal{B}\boldsymbol{u}, \mathcal{C}^{-1}\mathcal{B}\boldsymbol{v}_{2,\beta} \rangle = (\boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{u})_0 - \langle \mathcal{B}\boldsymbol{u}, \mathcal{C}^{-1} \operatorname{div} \boldsymbol{F}_2 \rangle. \tag{29}$$

Теорема существования и единственности решения вариационной задачи (29) доказана в [10].

Отметим, что, в отличие от общего случая регуляризации (см. [8, п. 4.3]), использование специфики билинейной формы $a_2(\cdot,\cdot)$ и билинейной формы $c(\cdot,\cdot)$, связанной с оператором Лапласа $\mathcal{C}$, позволило сформулировать регуляризованную задачу в виде уравнения (29) так, что пара $(\boldsymbol{v}_{2,\beta}, \varphi_\beta)$ будет точным решением системы (22) при любом $\beta > 0$. Здесь $\boldsymbol{v}_{2,\beta}$ — решение задачи (29), а φ_β определяется формулой (28). В случае выполнения равенства $\operatorname{div} \boldsymbol{F}_2 = 0$, что соответствует условию согласования $\operatorname{div} \boldsymbol{f}_1 = \operatorname{div} \boldsymbol{f}_2$ для задач (17) и (18), нетрудно видеть, что $\varphi_\beta = 0$ и $\boldsymbol{v}_{2,\beta}$ является решением задачи (21) без множителя Лагранжа φ.

4. Дискретная постановка регуляризированной задачи

В этом пункте мы будем предполагать, что множество $\overline{\Omega}$ является многогранником. Это предположение сделано для того, чтобы иметь возможность в точности покрыть $\overline{\Omega}$ тетраидальными конечными элементами. Для численного решения регуляризированной задачи (29) будем использовать векторные конечные элементы Неделека, предложенные в работе [11]. Будем рассматривать такие элементы первого порядка на тетраэдрах. Пусть K есть тетраэдр в $\mathbb{R}^3$; e — ребро K; $P_l(G)$ — пространство полиномов степени $\leq l$, определенных на множестве $G \subset \mathbb{R}^3$. Для функции $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^2(K)$ определим множество степеней свободы на тетраэдре K:

$$M_e(\boldsymbol{u}) = \left\{ \int_e (\boldsymbol{u}\vec{\tau})\varphi \, dl \ \forall e \subset K, \forall \varphi \in P_1(e) \right\}, \tag{30}$$

где $\vec{\tau}$ — единичный вектор на ребре e. В работе [11] показано, что множество моментов (30) определяет единственную функцию $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{P}_1(K) = (P_1(K))^3$ такую, что $M_e(\boldsymbol{u}) = M_e(\boldsymbol{p})$ или что — то же самое

$$\int_e (\boldsymbol{u}-\boldsymbol{p})\vec{\tau}\varphi\, dl = 0 \quad \text{для каждого ребра } e \text{ на } K\ \forall\varphi \in P_1(e).$$

Данную функцию $\boldsymbol{p}$ будем называть интерполянтом функции $\boldsymbol{u}$ на тетраэдре K и обозначать $\pi_K\boldsymbol{u}$, так что $\pi_K\boldsymbol{u} = \boldsymbol{p}$.

Пусть h_K — диаметр K, а ρ_K — верхняя граница диаметров всех шаров, содержащихся в K. В [11] доказана

Лемма 1. *Пусть $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^2(K)$, тогда имеют место следующие оценки ошибки интерполяции:*

$$\|\boldsymbol{u} - \pi_K\boldsymbol{u}\|_{0,K} \le ch_K^2|\boldsymbol{u}|_{2,K}, \qquad \|\,\mathbf{rot}(\boldsymbol{u} - \pi_K\boldsymbol{u})\|_{0,K} \le c\frac{h_K^2}{\rho_K}|\boldsymbol{u}|_{2,K},$$

где константа $c > 0$ не зависит от $\boldsymbol{u}$.

Теперь предположим, что задано семейство тетраидальных разбиений области Ω: $\mathcal{T}_h = \{K_i, i = \overline{1, N_h}\}$, $h = \max_{K\in\mathcal{T}_h} h_K$. Здесь K_i — замкнутые тетраэдры, внутренность которых будем обозначать $\overset{\circ}{K}_i$. Пусть каждое разбиение $\mathcal{T}_h$ обладает следующими свойствами: $\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{N_h} K_i$, $\overset{\circ}{K}_i \cap \overset{\circ}{K}_j = \emptyset$, если $i \ne j$, при этом, если $K_i \cap K_j \ne \emptyset$, то данное пересечение является либо общей гранью, либо общим ребром, либо общей вершиной тетраэдров K_i и K_j.

Дополнительно будем считать, что семейство разбиений $\mathcal{T}_h$ по параметру $h \to 0$ является регулярным [12, с. 127].

Распространим операцию интерполирования на всю область Ω. Для этого определим конечномерные пространства функций (пространства конечных элементов) M_h и V_h:

$$M_h = \{\boldsymbol{u}_h \in H(\mathbf{rot}, \Omega);\ \boldsymbol{u}_h\,|_K \in \boldsymbol{P}_1(K)\ \forall K \in \mathcal{T}_h\},$$

$$V_h = M_h \cap H_0(\mathbf{rot}, \Omega).$$

Произвольная векторная функция $\boldsymbol{v}_h \in M_h$ характеризуется тем, что на гранях тетраэдров имеет непрерывные касательные компоненты [11], в то время как нормальные компоненты могут быть разрывными.

Определим интерполяционный оператор $\pi_h : \boldsymbol{H}^2(\Omega) \to M_h$ как

$$\pi_h\boldsymbol{v}\,|_K = \pi_K\boldsymbol{v} \ \text{ на } \ K\ \ \forall\, K \in \mathcal{T}_h$$

для $\forall\,\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^2(\Omega)$.

Следующая лемма утверждает, что M_h (соответственно V_h) есть конформная аппроксимация для $H(\mathbf{rot}; \Omega)$ (соответственно для $H_0(\mathbf{rot}; \Omega)$) [11].

Лемма 2. *Если $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^2(\Omega)$, то $\pi_h\boldsymbol{v} \in M_h$. Аналогично, если $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^2(\Omega) \cap \boldsymbol{H}_0^1(\Omega)$, то $\pi_h\boldsymbol{v} \in V_h$.*

Введем пространство скалярных конечных элементов второго порядка на тетраэдрах:

$$Q_h = \{q_h \in C^0(\bar{\Omega});\ q_h|_K \in P_2(K)\ \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

Множество степеней свободы таких элементов свяжем со значениями функции в вершинах тетраэдров и в серединах ребер.

Аналогично непрерывному случаю введем операторы $\mathcal{B}_h \in \mathcal{L}(V; Q_h')$ и $\mathcal{C}_h \in \mathcal{L}(Q_h; Q_h')$, связанные с билинейными формами $b_2(\cdot,\cdot)$ и $c(\cdot,\cdot)$ как

$$\langle \mathcal{B}_h \boldsymbol{u}, q_h \rangle = b_2(\boldsymbol{u}, q_h) \quad \forall\, q_h \in Q_h,\ \forall\, \boldsymbol{u} \in V,$$
$$\langle \mathcal{C}_h p_h, q_h \rangle = c(p_h, q_h) \quad \forall\, q_h, p_h \in Q_h,$$

а также билинейную форму $a_\beta^h(\cdot,\cdot) : V_h \times V_h \to \mathbb{R}$:

$$a_\beta^h(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h) = a_2(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h) + \beta^{-1} \left\langle \mathcal{B}_h \boldsymbol{v}_h, \mathcal{C}_h^{-1} \mathcal{B}_h \boldsymbol{u}_h \right\rangle \quad \forall\, \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h \in V_h.$$

Сформулируем дискретный аналог задачи (29). Требуется найти такую функцию $\boldsymbol{u}_h \in V_h$, что выполняется равенство

$$a_\beta^h(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h) = \langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{v}_h \rangle \quad \forall\, \boldsymbol{v}_h \in V_h, \tag{31}$$

где

$$\langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{v}_h \rangle = (\boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{v}_h)_0 - \left\langle \mathcal{B}_h \boldsymbol{v}_h, \mathcal{C}_h^{-1} \operatorname{div} \boldsymbol{F}_2 \right\rangle.$$

В работе [13] доказана

Теорема 1. *Решение $\boldsymbol{u}_h \in V_h$ задачи* (31) *существует и единственно. Для решения $\boldsymbol{u}_h$ справедлива оценка*

$$\|\boldsymbol{u}_h\|_V \le C \|\boldsymbol{F}\|_{\boldsymbol{V}_h'},$$

где константа $C > 0$ не зависит от h и не зависит от $\boldsymbol{F}$ в правой части (31).

5. Система линейных уравнений

При фиксированном параметре h перейдем от дискретной задачи (31) к СЛАУ. Пусть $\mathbb{R}^N$ — евклидово пространство вещественных векторов размерности N со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_N$. Введем базисы пространств V_h и Q_h:

$$V_h = \operatorname{span}\{\boldsymbol{N}_i;\ i = \overline{1, N_V}\}, \quad Q_h = \operatorname{span}\{\varphi_j;\ j = \overline{1, N_Q}\}.$$

Искомая функция $\boldsymbol{u}_h \in V_h$ может быть представлена в виде $\boldsymbol{u}_h = \sum_{j=1}^{N_V} u_j \boldsymbol{N}_j$. Конечномерная вариационная задача записывается в виде СЛАУ относительно неизвестных коэффициентов разложения как векторов из пространства $\mathbb{R}^{N_V}$:

$$\left(\boldsymbol{A} + \beta^{-1} \boldsymbol{T}\right) \boldsymbol{U} = \boldsymbol{P}. \tag{32}$$

Здесь использованы следующие обозначения для векторов $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{N_V}$ и матриц $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{T} \in \mathbb{R}^{N_V} \times \mathbb{R}^{N_V}$:

$$\boldsymbol{U} = \{u_i;\ i = \overline{1, N_V}\}^\top, \qquad \boldsymbol{P} = \left\{ \langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{N}_i \rangle_{\boldsymbol{V}_h' \times \boldsymbol{V}_h};\ i = \overline{1, N_V} \right\}^\top,$$
$$\boldsymbol{A} = \{a_2(\boldsymbol{N}_i, \boldsymbol{N}_j);\ i, j = \overline{1, N_V}\},$$
$$\boldsymbol{T} = \left\{ \left\langle \mathcal{B}_h \boldsymbol{N}_i, \mathcal{C}_h^{-1} \mathcal{B}_h \boldsymbol{N}_j \right\rangle_{Q_h' \times Q_h};\ i, j = \overline{1, N_V} \right\}.$$

Представим матрицу $\boldsymbol{T}$ в виде произведения $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}^\top$, где матрица $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{N_V} \times \mathbb{R}^{N_Q}$ и матрица $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{N_Q} \times \mathbb{R}^{N_Q}$ определяются как

$$\boldsymbol{B} = \{b_2(\boldsymbol{N}_i, \varphi_j);\ i = \overline{1, N_V}, j = \overline{1, N_Q}\}, \qquad \boldsymbol{C} = \{c(\varphi_i, \varphi_j);\ i, j = \overline{1, N_Q}\}.$$

Введем матрицу масс $\boldsymbol{M}$, отвечающую базису пространства V_h:

$$\boldsymbol{M} = \{m_{ij} = (\boldsymbol{N}_i, \boldsymbol{N}_j)_0;\ i,j = 1,\dots,N_V\}.$$

В работе [13] доказана

Теорема 2. *Матрица* $\boldsymbol{A}+\beta^{-1}\boldsymbol{T}$ *симметрична и положительно определена. Существуют константы* $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$, *не зависящие от параметра* h *такие, что*

$$\alpha_1\big((\boldsymbol{A}+\beta^{-1}\boldsymbol{M})\boldsymbol{U},\boldsymbol{U}\big)_{N_V} \le \big((\boldsymbol{A}+\beta^{-1}\boldsymbol{T})\boldsymbol{U},\boldsymbol{U}\big)_{N_V} \le \alpha_2\big((\boldsymbol{A}+\beta^{-1}\boldsymbol{M})\boldsymbol{U},\boldsymbol{U}\big)_{N_V} \quad \forall \boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^{N_V}.$$

На основании данной теоремы для решения СЛАУ (32) можно применять метод сопряженных градиентов с различными вариантами предобуславливания [15]. Такой подход был реализован в рамках программы MODEM 3D, предназначенной для интерпретации данных 3D электромагнитных зондирований Земли [16].

6. Заключение

В работе исследована краевая задача (1)–(3) для описания трехмерных стационарных течений вязких жидкостей двухскоростного континуума с одним давлением в ограниченной области в присутствии массовых сил и источника, отвечающего за массообмен между фазами.

- Исходная переопределенная система (1)–(3) с неоднородными дивергентными и краевыми условиями приведена заменами искомых скоростей к системе (14)–(16) с однородными условиями.
- Решение системы (14)–(16) сводится к последовательному решению двух краевых задач: задачи Стокса для одной скорости и давления и переопределенной задачи для второй скорости.
- Для задачи Стокса принята смешанная обобщенная постановка в терминах скорость–давление, которая хорошо изучена.
- Для решения второй переопределенной задачи использован новый вариант метода регуляризации, ранее предложенный и исследованный в работах [10, 13, 14] с участием одного из авторов.

Литература

1. **Доровский В.Н.** Образование диссипативных структур в процессе необратимой передачи импульса литосферы // Геология и геофизика.— 1987.— № 6.— С. 108–117.
2. **Доровский В.Н., Перепечко Ю.В.** Теория частичного плавления // Геология и геофизика.— 1989.— № 9.— С. 56–64.
3. **Джураев Д., Имомназаров Х.Х., Урев М.В.** Краевая задача для одной переопределенной системы, возникающей в двухскоростной гидродинамике // Тез. Республиканской научной конф. (с участием зарубежных ученых) “Математическая физика и родственные проблемы современного анализа”, Бухара, 26–27 ноября 2015 г.— Бухара, 2015.— С. 197–198.
4. **Имомназаров Х.Х., Имомназаров Ш.Х., Маматкулов М.М., Черных Е.Г.** Фундаментальное решение для стационарного уравнения двухскоростной гидродинамики с одним давлением // Сиб. журн. индустр. матем.— 2014.— Т. 17, № 4.— С. 60–66.

5. **Жабборов Н.М., Имомназаров Х.Х.** Некоторые начально-краевые задачи механики двухскоростных сред. — Ташкент: Изд-во НУУз, 2012.
6. **Гудович И.С., Крейн С.Г., Куликов И.М.** Краевые задачи для уравнений Максвелла // Доклады АН СССР. — 1972. — Т. 207, № 2. — С. 321–324.
7. **Ладыженская О.А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1970.
8. **Girault V., Raviart P.-A.** Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. — Berlin: Springer-Verlag, 1986.
9. **Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.** Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.
10. **Кремер И.А., Урев М.В.** Регуляризация стационарной системы Максвелла в неоднородной проводящей среде и решение ее методом конечных элементов // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2009. — Т. 12, № 2. — С. 161–170.
11. **Nedelec J.C.** A new family of mixed finite elements in $\mathbb{R}^3$ // Numer. Math. — 1986. — Vol. 50. — P. 57–81.
12. **Сьярле Ф.** Метод конечных элементов для эллиптических задач. — М.: Мир, 1980.
13. **Кремер И.А., Урев М.В** Решение методом конечных элементов регуляризованной версии стационарной системы Максвелла в неоднородной проводящей среде // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2010. — Т. 13, № 1. — С. 33–49.
14. **Иванов М.И., Кремер И.А., Урев М.В.** Решение методом регуляризации квазистационарной системы Максвелла в неоднородной проводящей среде // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2012. — Т. 52, № 3. — С. 564–576.
15. **Ортега Дж.** Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем. — М.: Мир, 1991.
16. **Иванов М.И., Катешов В.А., Кремер И.А., Эпов М.И.** Программное обеспечение МОДЕМ 3D для интерпретации данных нестационарных зондирований с учетом эффектов вызванной поляризации // Записки Горного института. — 2009. — Т. 183. — С. 242–245.

Поступила в редакцию 10 января 2017 г.,
в окончательном варианте 18 мая 2017 г.

Литература в транслитерации

1. **Dorovskiy V.N.** Obrazovanie dissipativnyh struktur v protsesse neobratimoy peredachi impul’sa litosfery // Geologiya i geofizika. — 1987. — № 6. — S. 108–117.
2. **Dorovskiy V.N., Perepechko Yu.V.** Teoriya chastichnogo plavleniya // Geologiya i geofizika. — 1989. — № 9. — S. 56–64.
3. **Dzhuraev D., Imomnazarov H.H., Urev M.V.** Kraevaya zadacha dlya odnoy pereopredelennoy sistemy, voznikayushchey v dvuhskorostnoy gidrodinamike // Tez. Respublikanskoy nauchnoy konf. (s uchastiem zarubezhnyh uchenyh) “Matematicheskaya fizika i rodstvennye problemy sovremennogo analiza”, Buhara, 26–27 noyabrya 2015 g. — Buhara, 2015. — C. 197–198.
4. **Imomnazarov H.H., Imomnazarov Sh.H., Mamatkulov M.M., Chernyh E.G.** Fundamental’noe reshenie dlya statsionarnogo uravneniya dvuhskorostnoy gidrodinamiki s odnim davleniem // Sib. zhurn. industr. matem. — 2014. — T. 17, № 4. — S. 60–66.
5. **Zhabborov N.M., Imomnazarov H.H.** Nekotorye nachal’no-kraevye zadachi mekhaniki dvuhskorostnyh sred. — Tashkent: Izd-vo NUUz, 2012.

6. **Gudovich I.S., Kreyn S.G., Kulikov I.M.** Kraevye zadachi dlya uravneniy Maksvella // Doklady AN SSSR. — 1972. — T. 207, № 2. — S. 321–324.
7. **Ladyzhenskaya O.A.** Matematicheskie voprosy dinamiki vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti. — M.: Nauka, 1970.
8. **Girault V., Raviart P.-A.** Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. — Berlin: Springer-Verlag, 1986.
9. **Lions Zh.-L., Madzhenes E.** Neodnorodnye granichnye zadachi i ih prilozheniya. — M.: Mir, 1971.
10. **Kremer I.A., Urev M.V.** Regulyarizatsiya statsionarnoy sistemy Maksvella v neodnorodnoy provodyashchey srede i reshenie ee metodom konechnyh elementov // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2009. — T. 12, № 2. — S. 161–170.
11. **Nedelec J.C.** A new family of mixed finite elements in $\mathbb{R}^3$ // Numer. Math. — 1986. — Vol. 50. — P. 57–81.
12. **S'yarle F.** Metod konechnyh elementov dlya ellipticheskih zadach. — M.: Mir, 1980.
13. **Kremer I.A., Urev M.V.** Reshenie metodom konechnyh elementov regulyarizovannoy versii statsionarnoy sistemy Maksvella v neodnorodnoy provodyashchey srede // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2010. — T. 13, № 1. — S. 33–49.
14. **Ivanov M.I., Kremer I.A., Urev M.V.** Reshenie metodom regulyarizatsii kvazistatsionarnoy sistemy Maksvella v neodnorodnoy provodyashchey srede // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2012. — T. 52, № 3. — S. 564–576.
15. **Ortega Dzh.** Vvedenie v parallel'nye i vektornye metody resheniya lineynyh sistem. — M.: Mir, 1991.
16. **Ivanov M.I., Kateshov V.A., Kremer I.A., Epov M.I.** Programmnoe obespechenie MODEM 3D dlya interpretatsii dannyh nestatsionarnyh zondirovaniy s uchetom effektov vyzvannoy polyarizatsii // Zapiski Gornogo instituta. — 2009. — T. 183. — S. 242–245.