УДК 537.84

ВОЗНИКНОВЕНИЕ КОНВЕКЦИИ В СЛОЕ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ПОСТОЯННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Дж. Пракаш, Р. Кумар, К. Лата

Университет штата Чимачал-Прадеш, 171005 Шимла, Индия
E-mails: jpsmaths67@gmail.com, rajeevkumar2012math@gmail.com, arpitdav05@gmail.com

Получено достаточное условие, при котором происходит изменение типа устойчивости конвекции в магнитогидродинамической многокомпонентной жидкости. Показано, что при наличии возмущений и выполнении указанного достаточного условия в жидкости могут возникнуть колебательные движения. Получены верхние оценки комплексной скорости роста амплитуды колебаний жидкости, в случае если хотя бы одна из границ области, занимаемой жидкостью, является жесткой.

Ключевые слова: конвекция в многокомпонентной жидкости, принцип изменения типа устойчивости, колебательные движения, комплексная скорость роста возмущений.

DOI: 10.15372/PMTF20170104

Введение. В тех случаях, когда плотность жидкости определяется двумя параметрами стратификации, такими как температура и соленость, изменение которых происходит с различными скоростями, состояние покоя жидкости может быть неустойчивым, даже если ее плотность уменьшается в вертикальном направлении. Это явление, известное как термохалинная, или бидиффузионная (двойная диффузионная), конвекция, хорошо изучено [1–4].

Исследованию бидиффузионной конвекции посвящено большое количество работ [5–7], однако существуют системы, состоящие из трех и более компонентов (затвердевающие жидкие сплавы, ядро Земли, геотермальные озера, морская вода, магма и др.) [2, 8]. Часто для описания таких процессов, как перенос загрязняющих веществ, кислотные дожди, течение подземных вод и нагревание стратосферы, помимо солености требуется учитывать наличие в примеси других диффундирующих компонентов. Задачи с тремя и более параметрами стратификации исследовались в работах [8–16]. Показано, что наличие небольшого количества третьего диффундирующего компонента с меньшим коэффициентом диффузии может оказывать значительное влияние на характер диффузионной неустойчивости. Также были отмечены некоторые существенные различия между двойной и тройной диффузионной конвекцией. Например, если градиенты двух параметров стратификации постоянны, то три критических значения числа Рэлея третьего компонента смеси должны удовлетворять критерию линейной устойчивости (в случае бидиффузионной конвекции

Работа выполнена при финансовой поддержке Комиссии по университетским грантам (UGC), Нью-Дели, Индия.

такой критерий определяет только одно критическое значение). Другое различие заключается в том, что в случае наличия свободной границы возникновение конвекции может происходить из исходного неподвижного состояния за счет квазипериодической бифуркации.

В настоящее время тройная диффузионная конвекция также хорошо исследована. Однако, насколько известно авторам данной работы, устойчивость смеси, содержащей более трех компонентов, изучена недостаточно. Возможно, это обусловлено сложностью математических и численных расчетов. В работе [17] с использованием динамических условий на свободной границе получены аналитические решения для случая n компонентов смеси и численные решения для случая $n = 5$. В [12] показано, что результаты расчетов, полученные в случае тройной диффузионной конвекции, можно обобщить на случай n компонентов при наличии жестких поверхностей. Исследование конвекции в многокомпонентной жидкости проводилось также в работах [18–20].

Из предположения об отсутствии в любой момент времени медленных колебательных движений, которые могут быть нейтральными или неустойчивыми, следует справедливость принципа изменения типа устойчивости. Выполнение этого принципа в задачах устойчивости позволяет исключить нестационарные члены в линейном приближении уравнений возмущения. В работе [21] доказана справедливость принципа изменения типа устойчивости (т. е. возникновение стационарной конвекции) для классической задачи неустойчивости Рэлея — Бенара. В [22] этот принцип доказан для задачи тройной диффузионной конвекции.

Изучение влияния магнитного поля на слой многокомпонентной жидкости имеет большое значение в задачах астрофизики и физики Земли, в которых рассматриваются электропроводные жидкости. В настоящей работе проведен анализ возникновения плавучести, обусловленной конвекцией в слое многокомпонентной жидкости, при наличии постоянного вертикального магнитного поля. Обобщаются известные результаты решения задачи тройной диффузионной конвекции с использованием принципа изменения типа устойчивости [22] и результаты, полученные при оценке комплексной скорости роста амплитуды колебаний (когда они возникают) [23], что особенно важно в тех случаях, когда хотя бы одна граница является жесткой, т. е. решения в замкнутой форме не существует. Насколько известно авторам данной работы, для гидродинамических систем с тремя и более компонентами такие результаты отсутствуют. Полученные в данной работе результаты справедливы для любой комбинации жестких и свободных границ.

Математическая формулировка задачи. Вязкая теплопроводная жидкость Буссинеска находится между двумя горизонтальными границами (пластинами) $z = 0$ и $z = d$, на которых поддерживаются постоянные температуры T_0, $T_1 < T_0$ и постоянные концентрации $S_{10}, S_{20}, \ldots, S_{(n-1)0}$, $S_{11}, S_{21}, \ldots, S_{(n-1)1}$, причем $S_{i1} < S_{i0}$ при $i = 1, \ldots, n-1$. На жидкость, находящуюся в поле силы тяжести, действует постоянное вертикальное магнитное поле (см. рисунок). Влияние изменения параметров стратификации в поперечном направлении не учитывается.

Основные уравнения, описывающие движение многокомпонентной жидкости под действием постоянного вертикального магнитного поля, имеют вид [24]

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0; \tag{1}$$

$$\rho\Big(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\,\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big) = \rho X_i - \frac{\partial P_1}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\Big[\mu'\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)\Big] + \frac{\mu_e H_j}{4\pi}\,\frac{\partial H_i}{\partial x_j} - \frac{\mu_e}{8\pi}\,\frac{\partial\,(H_j H_j)}{\partial x_j}; \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_j\,\frac{\partial T}{\partial x_j} = \varkappa \nabla^2 T,$$

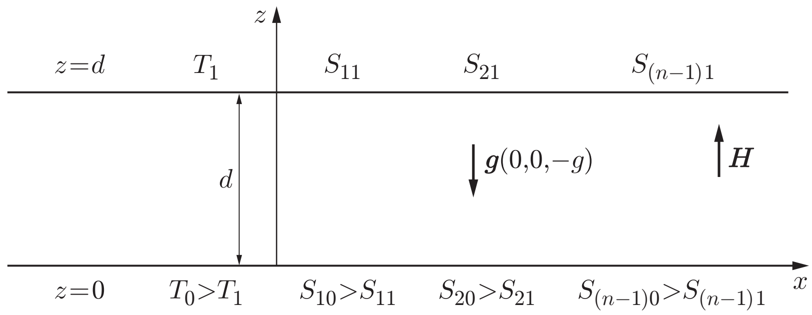

Схема задачи

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} + u_j \frac{\partial S_1}{\partial x_j} = \varkappa_1 \nabla^2 S_1, \qquad \frac{\partial S_2}{\partial t} + u_j \frac{\partial S_2}{\partial x_j} = \varkappa_2 \nabla^2 S_2, \qquad \ldots, \tag{3}$$
$$\frac{\partial S_{n-1}}{\partial t} + u_j \frac{\partial S_{n-1}}{\partial x_j} = \varkappa_{n-1} \nabla^2 S_{n-1},$$
$$\frac{\partial H_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial H_i}{\partial x_j} = H_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \eta \nabla^2 H_i, \qquad \frac{\partial H_i}{\partial x_i} = 0,$$

где ρ — плотность; t — время; x_j $(j = 1,2,3)$ — декартовы координаты x, y, z; u_j $(j = 1,2,3)$ — компоненты скорости; X_i $(i = 1,2,3)$ — компоненты внешней силы в направлениях x, y, z соответственно; P_1 — давление; μ — молекулярная вязкость; $\boldsymbol{H} = (H_1, H_2, H_3) = (0,0,H)$ — напряженность постоянного вертикального магнитного поля; T — температура; $\varkappa$ — теплопроводность; μ_e — магнитная проницаемость; η — коэффициент диффузии, обусловленный влиянием магнитного поля; $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$ — концентрации компонентов; $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{n-1}$ — коэффициенты диффузии массы компонентов, причем $\varkappa_1 > \varkappa_2 > \ldots > \varkappa_{n-1}$. С учетом граничных условий выражение для плотности можно представить в виде

$$\rho = \rho_0[1 + \alpha(T_0 - T) - \alpha_1(S_{10} - S_1) - \alpha_2(S_{20} - S_2) - \ldots - \alpha_{n-1}(S_{(n-1)0} - S_{(n-1)})], \tag{4}$$

где $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ — коэффициенты объемного расширения компонентов смеси, обусловленного изменением температуры и концентрации; ρ_0 — значение ρ в точке $z = 0$.

Уравнение (2) можно упростить:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\mu_e}{4\pi\rho_0} H_j \frac{\partial H_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{P_1}{\rho_0} + \frac{\mu_e |H|^2}{8\pi\rho_0}\Big) +$$
$$+ \Big(1 + \frac{\delta\rho}{\rho_0} + \frac{\delta\rho_1}{\rho_0} + \frac{\delta\rho_2}{\rho_0} + \ldots + \frac{\delta\rho_{n-1}}{\rho_0}\Big) X_i + \nu \nabla^2 u_i. \tag{5}$$

Здесь $\nu = \mu/\rho_0$ — кинематическая вязкость; $P = P_1/\rho_0 + \mu_e |H|^2/(8\pi\rho_0)$ — магнитогидродинамическое давление.

Предположим, что начальное состояние является стационарным:

$$(u, v, w) \equiv (0,0,0), \qquad T \equiv T(z), \qquad P \equiv P(z),$$
$$S_1 \equiv S_1(z), \quad S_2 \equiv S_2(z), \ldots, \quad S_{n-1} \equiv S_{n-1}(z),$$
$$(H_1, H_2, H_3) \equiv (0,0,H), \qquad \rho = \rho(z).$$

Тогда уравнения (1), (3)–(5) имеют стационарное решение, соответствующее начальному состоянию:

$$(u, v, w) = (0,0,0), \qquad T = T_0 - \beta z,$$

$$S_1 = S_{10} - \beta_1 z,\ S_2 = S_{20} - \beta_2 z,\ \ldots,\ S_{n-1} = S_{(n-1)0} - \beta_{n-1} z,$$
$$\rho = \rho_0(1 + \alpha\beta z - \alpha_1\beta_1 z - \alpha_2\beta_2 z - \ldots - \alpha_{n-1}\beta_{n-1} z), \qquad (H_1, H_2, H_3) = (0, 0, H),$$
$$P = \frac{P_1}{\rho_0} + \frac{\mu_e |H|^2}{8\pi\rho_0} = P_0 - g\rho_0\Big(z + (\alpha\beta - \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 - \ldots - \alpha_{n-1}\beta_{n-1})\,\frac{z^2}{2}\Big).$$

Здесь $\beta = (\tau_0 - \tau_1)/d$ — равномерно распределенный положительный градиент температуры; $\beta_1 = (S_{10} - S_{11})/d$, $\beta_2 = (S_{20} - S_{21})/d$, …, $\beta_{n-1} = (S_{(n-1)0} - S_{(n-1)1})/d$ — неположительные градиенты концентрации; H — константа; P_0 — значение P в точке $z = 0$.

Для исследования устойчивости системы введем возмущения переменных

$$\begin{gathered}
(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = (0 + u', 0 + v', 0 + w'), \qquad \bar{T} = T_0 - \beta z + \theta', \\
\bar{S}_1 = S_{10} - \beta_1 z + \varphi'_1, \quad \bar{S}_2 = S_{20} - \beta_2 z + \varphi'_2, \quad \ldots, \quad \bar{S}_{n-1} = S_{(n-1)0} - \beta_{(n-1)} z + \varphi'_{n-1}, \\
\bar{\rho} = \rho_0[1 + \alpha(T_0 - T - \theta') - \alpha_1(S_{10} - S_1 - \varphi'_1) - \alpha_2(S_{20} - S_2 - \varphi'_2) - \\
- \alpha_{n-1}(S_{(n-1)0} - S_{n-1} - \varphi'_{n-1})], \\
\bar{P} = P_0 - g\rho_0[z + (\alpha\beta - \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 - \ldots - \alpha_{n-1}\beta_{n-1})z^2/2] + \delta P', \\
(\bar{H}_1, \bar{H}_2, \bar{H}_3) = (0 + h'_x, 0 + h'_y, H + h'_z),
\end{gathered} \tag{6}$$

где величины u', v', w', θ', $\varphi'_1, \varphi'_2, \ldots, \varphi'_{n-1}$, $\delta P'$, h'_x, h'_y, h'_z полагаются достаточно малыми.

Подставляя (6) в (1), (3), (5), получаем линеаризованные уравнения для возмущений

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \\
\frac{\partial u'}{\partial t} - \frac{\mu_e H}{4\pi\rho_0}\frac{\partial h'_x}{\partial z} = -\frac{\partial\,(\delta P')}{\partial x} + \nu\nabla^2 u', \qquad \frac{\partial v'}{\partial t} - \frac{\mu_e H}{4\pi\rho_0}\frac{\partial h'_y}{\partial z} = -\frac{\partial\,(\delta P')}{\partial y} + \nu\nabla^2 v', \\
\frac{\partial w'}{\partial t} - \frac{\mu_e H}{4\pi\rho_0}\frac{\partial h'_z}{\partial z} = -\frac{\partial\,(\delta P')}{\partial z} + g(\alpha\theta' - \alpha_1\varphi'_1 - \alpha_2\varphi'_2 - \ldots - \alpha_{n-1}\varphi'_{n-1}) + \nu\nabla^2 w', \\
\frac{\partial\theta'}{\partial t} - \beta w' = \varkappa\nabla^2\theta', \\
\frac{\partial\varphi'_1}{\partial t} - \beta_1 w' = \varkappa_1\nabla^2\varphi'_1, \quad \frac{\partial\varphi'_2}{\partial t} - \beta_2 w' = \varkappa_2\nabla^2\varphi'_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\varphi'_{n-1}}{\partial t} - \beta_{n-1} w' = \varkappa_{n-1}\nabla^2\varphi'_{n-1}, \\
\frac{\partial h'_x}{\partial t} = H\frac{\partial u'}{\partial z} + \eta\nabla^2 h'_x, \quad \frac{\partial h'_y}{\partial t} = H\frac{\partial v'}{\partial z} + \eta\nabla^2 h'_y, \quad \frac{\partial h'_z}{\partial t} = H\frac{\partial w'}{\partial z} + \eta\nabla^2 h'_z, \\
\frac{\partial h'_x}{\partial x} + \frac{\partial h'_y}{\partial y} + \frac{\partial h'_z}{\partial z} = 0.
\end{gathered} \tag{7}$$

Предположим, что разложение переменных u', v', w', θ', $\varphi'_1, \varphi'_2, \ldots, \varphi'_{n-1}$, $\partial P'$, h'_x, h'_y, h'_z по нормальным модам имеет вид

$$F'(x, y, z, t) = F''(z)\exp\left[i(k_x x + k_y y) + \tilde{n}t\right], \tag{8}$$

где $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ — волновое число; k_x, k_y — вещественные константы; $\tilde{n}$ — постоянная, которая может являться комплексной. Тогда можно записать следующие выражения:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \tilde{n}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = -k^2, \qquad \nabla^2 = \frac{d^2}{dz^2} - k^2. \tag{9}$$

Подставляя (8), (9) в уравнения (7), получаем

$$ik_x u'' + ik_y v'' + \frac{dw''}{dz} = 0; \tag{10}$$

$$\begin{gathered}\tilde{n}u'' - \frac{\mu_e H}{4\pi\rho_0}\,\frac{dh''_x}{dz} = -ik_x(\delta P'') + \nu\Big(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\Big)u'',\\ \tilde{n}v'' - \frac{\mu_e H}{4\pi\rho_0}\,\frac{dh''_y}{dz} = -ik_y(\delta P'') + \nu\Big(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\Big)v'';\end{gathered} \tag{11}$$

$$\tilde{n}w'' - \frac{\mu_e H}{4\pi\rho_0}\,\frac{dh''_z}{dz} = -\frac{d\,(\delta P'')}{dz} + g(\alpha\theta'' - \alpha_1\varphi''_1 - \alpha_2\varphi''_2 - \ldots - \alpha_{n-1}\varphi''_{n-1}) + {}$$

$$+ \nu\Big(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\Big)w''; \tag{12}$$

$$\begin{gathered}\tilde{n}\theta'' - \beta w'' = \varkappa\Big(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\Big)\theta'',\\ \tilde{n}\varphi''_1 - \beta_1 w'' = \varkappa_1\Big(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\Big)\varphi''_1, \qquad \tilde{n}\varphi''_2 - \beta_2 w'' = \varkappa_2\Big(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\Big)\varphi''_2, \qquad \ldots,\\ \tilde{n}\varphi''_{n-1} - \beta_{n-1} w'' = \varkappa_{n-1}\Big(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\Big)\varphi''_{n-1};\end{gathered} \tag{13}$$

$$\begin{gathered}\tilde{n}h''_x = H\,\frac{du''}{dz} + \eta\Big(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\Big)h''_x, \qquad \tilde{n}h''_y = H\,\frac{dv''}{dz} + \eta\Big(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\Big)h''_y;\\ \tilde{n}h''_z = H\,\frac{dw''}{dz} + \eta\Big(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\Big)h''_z;\\ ik_x h''_x + ik_y h''_y + \frac{dh''_z}{dz} = 0.\end{gathered} \tag{14}$$

Используя (10), исключим u'' и v'' из уравнений (11). Исключая $\delta P''$ из полученного уравнения и уравнения (12), находим

$$\Big(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\Big)\Big(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 - \frac{\tilde{n}}{\nu}\Big)w'' = g\Big(\frac{\alpha k^2\theta''}{\nu} - \frac{\alpha_1 k^2\varphi''_1}{\nu} - \frac{\alpha_2 k^2\varphi''_2}{\nu} - \ldots - \frac{\alpha_n k^2\varphi''_{n-1}}{\nu}\Big) - {}$$

$$- \frac{\mu_e H}{4\pi\rho_0\nu}\,\frac{d}{dz}\Big(\frac{d^2}{dz^2} - k^2\Big)h''_z. \tag{15}$$

Уравнения (13), (14) можно записать следующим образом:

$$\begin{gathered}\Big(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 - \frac{\tilde{n}}{\varkappa}\Big)\theta'' = \frac{\beta}{\varkappa}\,w'', \qquad \Big(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 - \frac{\tilde{n}}{\varkappa_1}\Big)\varphi''_1 = \frac{\beta_1}{\varkappa_1}\,w'',\\ \Big(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 - \frac{\tilde{n}}{\varkappa_2}\Big)\varphi''_2 = \frac{\beta_2}{\varkappa_2}\,w'', \quad \ldots, \quad \Big(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 - \frac{\tilde{n}}{\varkappa_{n-1}}\Big)\varphi''_{n-1} = -\frac{\beta_{n-1}}{\varkappa_{n-1}}\,w'',\\ \Big(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 - \frac{\tilde{n}}{\eta}\Big)h''_z = -\frac{H}{\eta}\,\frac{dw''}{dz}.\end{gathered} \tag{16}$$

Вводя безразмерные величины

$$z_* = \frac{z}{d}, \quad \tau_{1*} = \frac{\varkappa_1}{\varkappa}, \ \tau_{2*} = \frac{\varkappa_2}{\varkappa}, \ \ldots, \ \tau_{(n-1)*} = \frac{\varkappa_{(n-1)}}{\varkappa}, \quad \sigma_* = \frac{\nu}{\varkappa}, \quad D_* = d\,\frac{d}{dz}, \quad p_* = \frac{\tilde{n}d^2}{\varkappa},$$

$$a_* = kd, \quad R_* = \frac{g\alpha\beta d^4}{\varkappa\nu}, \quad R_{1*} = \frac{g\alpha_1\beta_1 d^4}{\varkappa\nu},\ R_{2*} = \frac{g\alpha_2\beta_2 d^4}{\varkappa\nu},\ \ldots,\ R_{(n-1)*} = \frac{g\alpha_{n-1}\beta_{n-1} d^4}{\varkappa\nu},$$
$$w_* = \frac{\beta d^2}{\varkappa}\, w'', \quad \theta_* = \theta'', \quad \varphi_{1*} = \frac{\beta}{\beta_1}\,\varphi_1'',\ \varphi_{2*} = \frac{\beta}{\beta_2}\,\varphi_2'',\ \ldots,\ \varphi_{(n-1)*} = \frac{\beta}{\beta_{n-1}}\,\varphi_{n-1}'',$$
$$\sigma_{1*} = \frac{\nu_0}{\eta}, \qquad h_{z*} = \frac{\eta\beta d}{H\varkappa}\, h_z'',$$

уравнения (15), (16) можно свести к безразмерным уравнениям (опуская индекс “$*$”):

$$(D^2 - a^2)\Big(D^2 - a^2 - \frac{p}{\sigma}\Big) w = Ra^2\theta - R_1 a^2\varphi_1 - R_2 a^2\varphi_2 - \ldots$$
$$\ldots - R_{n-1} a^2 \varphi_{n-1} - QD(D^2 - a^2) h_z; \tag{17}$$
$$(D^2 - a^2 - p)\theta = -w; \tag{18}$$
$$\Big(D^2 - a^2 - \frac{p}{\tau_1}\Big)\varphi_1 = -\frac{w}{\tau_1}; \tag{19}$$
$$\Big(D^2 - a^2 - \frac{p}{\tau_2}\Big)\varphi_2 = -\frac{w}{\tau_2}; \tag{20}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Big(D^2 - a^2 - \frac{p}{\tau_{n-1}}\Big)\varphi_{n-1} = -\frac{w}{\tau_{n-1}}; \tag{21}$$
$$\Big(D^2 - a^2 - \frac{p\sigma_1}{\sigma}\Big) h_z = -Dw. \tag{22}$$

Для уравнений (17)–(22) ставятся следующие граничные условия:
— на обеих горизонтальных границах, т. е. в точках $z = 0$ и $z = 1$,

$$w = 0 = \theta = \varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_{n-1}; \tag{23}$$

— на жесткой границе

$$Dw = 0; \tag{24}$$

— на свободной границе

$$D^2 w = 0; \tag{25}$$

— на обеих горизонтальных границах, в случае если область вне жидкости является идеально проводящей,

$$h_z = 0; \tag{26}$$

— на верхней и нижней границах, в случае если область вне жидкости изолированна,

$$Dh_z = \mp a h_z. \tag{27}$$

В (17)–(27) z — вертикальная координата; $D = d/dz$ — производная по z; $a^2 > 0$ — квадрат волнового числа; $\sigma > 0$ — число Прандтля (для воздуха $\sigma \approx 0{,}7$, для воды $\sigma \approx 7$, для ртути $\sigma \approx 0{,}044$, для глицерина $\sigma \approx 7250$); σ_1 — магнитное число Прандтля (для многих материалов $\sigma_1 \ll 1$ [25, 26]); $0 < \tau_i < 1$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ — числа Льюиса [11]; $Q > 0$ — число Чандрасекхара; $R > 0$ — тепловое число Рэлея, соответствующее плавучести (для жидкости, у которой число Рэлея меньше критического, перенос тепла происходит в основном за счет теплопроводности, в противном случае перенос тепла происходит за счет конвекции); $R_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ — концентрационные числа Рэлея; h_z — вертикальная компонента возмущения внешнего магнитного поля; $p = p_r + ip_i$ — комплексная скорость роста амплитуды колебаний; p_r, p_i — вещественные постоянные; w — ускорение в вертикальном направлении; θ — температура; $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ — концентрации компонентов. Следует отметить, что уравнения (17)–(27) являются задачей на собственные значения для p.

Теорема 1. *Если функции w, θ, φ_1, φ_2, ..., φ_{n-1}, h_z, p, $R > 0$, $R_1 > 0$, $R_2 > 0$, ..., $R_{n-1} > 0$, $Q > 0$, $p_r \geqslant 0$ являются решением задачи* (17)–(22) *с граничными условиями* (23)–(27) *и*

$$\frac{R_1\sigma}{2\tau_1^2\pi^4} + \frac{R_2\sigma}{2\tau_2^2\pi^4} + \ldots + \frac{R_{n-1}\sigma}{2\tau_{n-1}^2\pi^4} + \frac{Q\sigma_1}{\pi^2} \leqslant 1,$$

то $p_i = 0$. В частности,

$$p_r = 0 \quad \Rightarrow \quad p_i = 0,$$

если

$$\frac{R_1\sigma}{2\tau_1^2\pi^4} + \frac{R_2\sigma}{2\tau_2^2\pi^4} + \ldots + \frac{R_{n-1}\sigma}{2\tau_{n-1}^2\pi^4} + \frac{Q\sigma_1}{\pi^2} \leqslant 1.$$

Доказательство. Умножая уравнение (17) на w^* (далее индекс "$*$" означает комплексное сопряжение) и интегрируя полученное уравнение по вертикальной области z, получаем

$$\int_0^1 w^*(D^2 - a^2)\Big(D^2 - a^2 - \frac{p}{\sigma}\Big) w\,dz = Ra^2 \int_0^1 w^*\theta\,dz - R_1 a^2 \int_0^1 w^*\varphi_1\,dz -$$
$$- R_2 a^2 \int_0^1 w^*\varphi_2\,dz - \ldots - R_{n-1}a^2 \int_0^1 w^*\varphi_{n-1}\,dz - Q\int_0^1 w^* D(D^2 - a^2)h_z\,dz.$$

Используя уравнения (18)–(22), можно записать

$$\int_0^1 w^*(D^2 - a^2)\Big(D^2 - a^2 - \frac{p}{\sigma}\Big) w\,dz = -Ra^2 \int_0^1 \theta(D^2 - a^2 - p^*)\theta^*\,dz +$$
$$+ R_1 a^2\tau_1 \int_0^1 \varphi_1\Big(D^2 - a^2 - \frac{p^*}{\tau_1}\Big)\varphi_1^*\,dz + R_2 a^2\tau_2 \int_0^1 \varphi_2\Big(D^2 - a^2 - \frac{p^*}{\tau_2}\Big)\varphi_2^*\,dz + \ldots$$
$$\ldots + R_{n-1}a^2\tau_{n-1} \int_0^1 \varphi_{n-1}\Big(D^2 - a^2 - \frac{p^*}{\tau_{n-1}}\Big)\varphi_{n-1}^*\,dz -$$
$$- Q\int_0^1 \Big(D^2 - a^2 - \frac{p^*\sigma_1}{\sigma}\Big) h_z^*(D^2 - a^2)h_z\,dz. \qquad (28)$$

Интегрируя (28) по частям необходимое количество раз с использованием граничных условий (23)–(27), получаем

$$\int_0^1 (|D^2w|^2 + 2a^2|Dw|^2 + a^4|w|^2)\,dz + \frac{p}{\sigma}\int_0^1 (|Dw|^2 + a^2|w|^2)\,dz =$$
$$= Ra^2 \int_0^1 (|D\theta|^2 + a^2|\theta|^2 + p^*|\theta|^2)\,dz - R_1 a^2\tau_1 \int_0^1 \Big(|D\varphi_1|^2 + a^2|\varphi_1|^2 + \frac{p^*}{\tau_1}\,|\varphi_1|^2\Big)\,dz -$$

$$- R_2 a^2 \tau_2 \int\limits_0^1 \Big(|D\varphi_2|^2 + a^2|\varphi_2|^2 + \frac{p^*}{\tau_2}\,|\varphi_2|^2 \Big)\, dz - \ldots$$

$$\ldots - R_{n-1} a^2 \tau_{n-1} \int\limits_0^1 \Big(|D\varphi_{n-1}|^2 + a^2|\varphi_{n-1}|^2 + \frac{p^*}{\tau_{n-1}}\,|\varphi_{n-1}|^2 \Big)\, dz -$$

$$- Q \int\limits_0^1 |(D^2 - a^2) h_z|^2\, dz - \frac{Q p^* \sigma_1}{\sigma} \Big(a[(|h_z|^2)_0 + (|h_z|^2)_1] + \int\limits_0^1 (|Dh_z|^2 + a^2|h_z|^2)\, dz \Big). \qquad (29)$$

Оставляя мнимую часть уравнения (29) и деля обе части на $p_i \neq 0$, находим

$$\frac{1}{\sigma} \int\limits_0^1 (|Dw|^2 + a^2|w|^2)\, dz = -Ra^2 \int\limits_0^1 |\theta|^2\, dz + R_1 a^2 \int\limits_0^1 |\varphi_1|^2\, dz + R_2 a^2 \int\limits_0^1 |\varphi_2|^2\, dz + \ldots$$

$$\ldots + R_{n-1} a^2 \int\limits_0^1 |\varphi_{n-1}|^2\, dz + \frac{Q\sigma_1}{\sigma} \Big(a[(|h_z|^2)_0 + (|h_z|^2)_1] + \int\limits_0^1 (|Dh_z|^2 + a^2|h_z|^2)\, dz \Big). \qquad (30)$$

Из уравнения (19) следует равенство

$$\int\limits_0^1 \Big(D^2 - a^2 - \frac{p}{\tau_1} \Big) \varphi_1 \Big(D^2 - a^2 - \frac{p^*}{\tau_1} \Big) \varphi_1^*\, dz = \frac{1}{\tau_1^2} \int\limits_0^1 |w|^2\, dz. \qquad (31)$$

Интегрируя левую часть уравнения (31) по частям необходимое число раз с использованием граничных условий для φ_1, получаем

$$\int\limits_0^1 (|D^2\varphi_1|^2 + 2a^2|D\varphi_1|^2 + a^4|\varphi_1|^2)\, dz + \frac{2p_r}{\tau_1} \int\limits_0^1 (|D\varphi_1|^2 + a^2|\varphi_1|^2)\, dz +$$

$$+ \frac{|p|^2}{\tau_1^2} \int\limits_0^1 |\varphi_1|^2\, dz = \frac{1}{\tau_1^2} \int\limits_0^1 |w|^2\, dz. \qquad (32)$$

Так как $p_r \geqslant 0$, то из (32) следует

$$2a^2 \int\limits_0^1 |D\varphi_1|^2\, dz \leqslant \frac{1}{\tau_1^2} \int\limits_0^1 |w|^2\, dz. \qquad (33)$$

Поскольку $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ и w удовлетворяют граничным условиям $\varphi_1(0) = 0 = \varphi_1(1)$, $\varphi_2(0) = 0 = \varphi_2(1)$, …, $\varphi_{n-1}(0) = 0 = \varphi_{n-1}(1)$, $w(0) = 0 = w(1)$, в силу неравенства Рэлея — Ритца [27] имеем

$$\int\limits_0^1 |D\varphi_1|^2\, dz \geqslant \pi^2 \int\limits_0^1 |\varphi_1|^2\, dz; \qquad (34)$$

$$\int\limits_0^1 |D\varphi_2|^2\, dz \geqslant \pi^2 \int\limits_0^1 |\varphi_2|^2\, dz, \qquad \ldots, \qquad \int\limits_0^1 |D\varphi_{n-1}|^2\, dz \geqslant \pi^2 \int\limits_0^1 |\varphi_{n-1}|^2\, dz;$$

$$\int_0^1 |Dw|^2\,dz \geqslant \pi^2 \int_0^1 |w|^2\,dz. \tag{35}$$

Подставляя неравенства (34), (35) в (33), получаем

$$a^2 \int_0^1 |\varphi_1|^2\,dz \leqslant \frac{1}{2\tau_1^2\pi^4} \int_0^1 |Dw|^2\,dz. \tag{36}$$

Аналогично из (20), (21) получаем неравенства

$$a^2 \int_0^1 |\varphi_2|^2\,dz \leqslant \frac{1}{2\tau_2^2\pi^4} \int_0^1 |Dw|^2\,dz, \quad \ldots, \quad a^2 \int_0^1 |\varphi_{n-1}|^2\,dz \leqslant \frac{1}{2\tau_{n-1}^2\pi^4} \int_0^1 |Dw|^2\,dz. \tag{37}$$

Умножая (22) на h_z^* и интегрируя по частям с использованием граничных условий (23)–(27), для вещественной части получаем уравнение

$$a[(|h_z|^2)_0 + (|h_z|^2)_1] + \int_0^1 \Big(|Dh_z|^2 + a^2|h_z|^2 + \frac{p_r\sigma_1}{\sigma}\,|h_z|^2\Big)\,dz = \operatorname{Re}\int_0^1 h_z^* Dw\,dz =$$

$$= -\operatorname{Re}\int_0^1 (Dh_z^*)w\,dz \leqslant \Big|\int_0^1 (Dh_z^*)w\,dz\Big| \leqslant \int_0^1 |Dh_z|\,|w|\,dz \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\int_0^1 |Dh_z|^2\,dz\Big)^{1/2}\Big(\int_0^1 |w|^2\,dz\Big)^{1/2}. \tag{38}$$

Так как $p_r \geqslant 0$, то из (38) находим

$$\int_0^1 |Dh_z|^2\,dz \leqslant \Big(\int_0^1 |Dh_z|^2\,dz\Big)^{1/2}\Big(\int_0^1 |w|^2\,dz\Big)^{1/2},$$

откуда следует

$$\Big(\int_0^1 |Dh_z|^2\,dz\Big)^{1/2} \leqslant \Big(\int_0^1 |w|^2\,dz\Big)^{1/2}. \tag{39}$$

Подставляя неравенства (35), (39) в неравенство (38), получаем

$$a[(|h_z|^2)_0 + (|h_z|^2)_1] + \int_0^1 (|Dh_z|^2 + a^2|h_z|^2)\,dz \leqslant \int_0^1 |w|^2\,dz \leqslant \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 |Dw|^2\,dz. \tag{40}$$

В силу неравенств (36), (37), (40) из (30) находим

$$\Big[\frac{1}{\sigma} - \Big(\frac{R_1}{2\tau_1^2\pi^4} + \frac{R_2}{2\tau_2^2\pi^4} + \ldots + \frac{R_{n-1}}{2\tau_{n-1}^2\pi^4} + \frac{Q\sigma_1}{\pi^2}\Big)\Big] \int_0^1 |Dw|^2\,dz + \frac{a^2}{\sigma}\int_0^1 |w|^2\,dz + Ra^2 \int_0^1 |\theta|^2\,dz < 0,$$

откуда следует (при $p_i \neq 0$)

$$\frac{R_1\sigma}{2\tau_1^2\pi^4} + \frac{R_2\sigma}{2\tau_2^2\pi^4} + \ldots + \frac{R_{n-1}\sigma}{2\tau_{n-1}^2\pi^4} + \frac{Q\sigma_1}{\pi^2} > 1.$$

Таким образом, если

$$\frac{R_1\sigma}{2\tau_1^2\pi^4} + \frac{R_2\sigma}{2\tau_2^2\pi^4} + \ldots + \frac{R_{n-1}\sigma}{2\tau_{n-1}^2\pi^4} + \frac{Q\sigma_1}{\pi^2} \leqslant 1,$$

то $p_i = 0$. Теорема доказана.

Из теоремы 1 следует, что для рассматриваемой задачи конвекции магнитогидродинамической многокомпонентной жидкости произвольная нейтральная или неустойчивая мода имеет не колебательный характер, в частности при

$$\frac{R_1\sigma}{2\tau_1^2\pi^4} + \frac{R_2\sigma}{2\tau_2^2\pi^4} + \ldots + \frac{R_{n-1}\sigma}{2\tau_{n-1}^2\pi^4} + \frac{Q\sigma_1}{\pi^2} \leqslant 1$$

справедлив принцип изменения типа устойчивости.

Частные случаи теоремы 1. Из теоремы 1 следует, что произвольная нейтральная или неустойчивая мода имеет не колебательный характер и справедлив принцип изменения типа устойчивости для следующих типов конвекции:

1) конвекция Рэлея — Бенара ($R_1 = R_2 = \ldots = R_{n-1} = Q = 0$) [21];

2) магнитогидродинамическая конвекция Рэлея — Бенара ($R_1 = R_2 = \ldots = R_{n-1} = 0$) при $Q\sigma_1/\pi^2 \leqslant 1$ [28];

3) магнитогидродинамическая термохалинная конвекция ($R_1 > 0$, $R_2 = \ldots = R_{n-1} = 0$) при $R_1\sigma/(2\tau_1^2\pi^4) + Q\sigma_1/\pi^2 \leqslant 1$ [28];

4) термохалинная конвекция ($R_1 > 0$, $R_2 = \ldots = R_{n-1} = Q = 0$) при $R_1\sigma/(2\tau_1^2\pi^4) \leqslant 1$ [28];

5) тройная диффузионная конвекция ($R_1 > 0$, $R_2 > 0$, $R_3 = \ldots = R_{n-1} = Q = 0$) при $R_1\sigma/(2\tau_1^2\pi^4) + R_2\sigma/(2\tau_2^2\pi^4) \leqslant 1$ [22].

Таким образом можно получить условия стационарной конвекции для любого количества компонентов жидкости.

Поскольку при $Q > 0$ возникают колебательные движения, необходимо получить оценки комплексной скорости роста осцилляций.

Теорема 2. *Если $R > 0$, $R_1 > 0$, $R_2 > 0$, …, $R_{n-1} > 0$, $Q > 0$, $p_r \geqslant 0$, $p_i \neq 0$, то необходимым условием существования нетривиального решения $(w, \theta, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}, h_z, p)$ уравнений* (17)–(22) *с граничными условиями* (23)–(27) *является неравенство*

$$|p| < \max\left\{\sqrt{(R_1 + R_2 + \ldots + R_{n-1})\sigma},\ Q\sigma\right\}.$$

Доказательство. Так как $p_r \geqslant 0$, то из уравнения (32) следует

$$\int_0^1 |\varphi_1|^2\,dz \leqslant \frac{1}{|p|^2}\int_0^1 |w|^2\,dz. \tag{41}$$

Аналогично из (20), (21) получаем

$$\int_0^1 |\varphi_2|^2\,dz \leqslant \frac{1}{|p|^2}\int_0^1 |w|^2\,dz, \quad \ldots, \quad \int_0^1 |\varphi_{n-1}|^2\,dz \leqslant \frac{1}{|p|^2}\int_0^1 |w|^2\,dz. \tag{42}$$

Умножая уравнение (22) на комплексно-сопряженное с ним уравнение и интегрируя по частям необходимое число раз с использованием граничных условий (23)–(27), получаем

$$\int_0^1 |(D^2-a^2)h_z|^2\,dz + \frac{2p_r\sigma_1}{\sigma}\Big(a[(|h_z|^2)_0+(|h_z|^2)_1] + \int_0^1 (|Dh_z|^2+a^2|h_z|^2)\,dz\Big) + \\ + \frac{|p|^2\sigma_1^2}{\sigma^2}\int_0^1 |h_z|^2\,dz = \int_0^1 |Dw|^2\,dz. \qquad (43)$$

Поскольку $p_r \geqslant 0$, из (43) следует

$$\int_0^1 |h_z|^2\,dz < \frac{\sigma^2}{|p|^2\sigma_1^2}\int_0^1 |Dw|^2\,dz, \qquad \int_0^1 |(D^2-a^2)h_z|^2\,dz \leqslant \int_0^1 |Dw|^2\,dz. \qquad (44)$$

Используя неравенства (44), получаем

$$a[(|h_z|^2)_0+(|h_z|^2)_1] + \int_0^1 (|Dh_z|^2+a^2|h_z|^2)\,dz = -\int_0^1 h_z^*(D^2-a^2)h_z\,dz \leqslant \\ \leqslant \Big|\int_0^1 h_z^*(D^2-a^2)h_z\,dz\Big| \leqslant \int_0^1 |h_z^*|\,|(D^2-a^2)h_z|\,dz \leqslant \\ \leqslant \Big(\int_0^1 |h_z|^2\,dz\Big)^{1/2}\Big(\int_0^1 |(D^2-a^2)h_z|^2\,dz\Big)^{1/2} \leqslant \frac{\sigma}{|p|\sigma_1}\int_0^1 |Dw|^2\,dz. \qquad (45)$$

В силу (41), (42), (45) из уравнения (30) находим неравенство

$$\frac{1}{\sigma}\Big(1-\frac{Q\sigma}{|p|}\Big)\int_0^1 |Dw|^2\,dz + \frac{a^2}{\sigma}\Big(1-\frac{(R_1+R_2+\ldots+R_{n-1})\sigma}{|p|^2}\Big)\int_0^1 |w|^2\,dz + Ra^2\int_0^1 |\theta|^2\,dz < 0,$$

из которого следует

$$|p| < \max\big\{\sqrt{(R_1+R_2+\ldots+R_{n-1})\sigma},\ Q\sigma\big\}.$$

Теорема доказана.

Теорему 2 можно сформулировать следующим образом: значение комплексной скорости роста амплитуды произвольного, нейтрального или неустойчивого колебательного возмущения в магнитогидродинамической многокомпонентной жидкости, нагреваемой снизу, должно находиться в правой части плоскости (p_r, p_i) внутри полукруга, центр которого расположен в начале координат и радиус которого равен $\max\big\{\sqrt{(R_1+R_2+\ldots+R_{n-1})\sigma},\ Q\sigma\big\}$.

Частные случаи теоремы 2. Из теоремы 2 следует ряд частных случаев для полученной оценки:

1) для магнитогидродинамической конвекции Рэлея — Бенара ($R_1 = 0 = R_2 = \ldots = R_{n-1} = 0$, $Q > 0$) $|p|^2 < Q^2\sigma^2$ [29];

2) для термохалинной конвекции ($R_1 > 0$, $R_2 = \ldots = R_{n-1} = Q = 0$) $|p| < \sqrt{R_1\sigma}$ [29];

3) для магнитогидродинамической термохалинной конвекции типа конвекции Верониса ($R_1 > 0$, $R_2 = \ldots = R_{n-1} = 0$, $Q > 0$) [2] $|p|^2 < \max(R_1\sigma, Q^2\sigma^2)$ [30];

4) для тройной диффузионной конвекции ($R_1 > 0$, $R_2 > 0$, $R_3 = \ldots = R_{n-1} = Q = 0$) $|p|^2 < (R_1 + R_2)\sigma$ [23].

Аналогично можно получить оценки комплексной скорости роста осцилляций для любого количества компонентов.

Выводы. Проведенное исследование позволяет обобщить ранее полученные результаты на случаи диффузионной, двойной и тройной диффузионной конвекции. Получено достаточное условие, при котором справедлив принцип изменения типа устойчивости конвекции в магнитогидродинамической многокомпонентной жидкости. Получены оценки комплексной скорости роста осцилляций.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Turner J. S.** Double diffusive phenomena // Annual Rev. Fluid Mech. 1974. V. 6. P. 37–56.
2. **Turner J. S.** Buoyancy effects in fluids. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1973.
3. **Brandt A.** Double diffusive convection / A. Brandt, H. J. S. Fernando. Washington: Amer. Geophys. Union, 1996.
4. **Radko T.** Double-diffusive convection. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013.
5. **Kellner M., Tilgner A.** Transition to finger convection in double diffusive convection // Phys. Fluids. 2014. V. 26. 094103.
6. **Nield D. A., Kuznetsov A. V.** The onset of double-diffusive convection in a nanofluid layer // Intern. J. Heat Fluid Flow. 2011. V. 32, N 4. P. 771–776.
7. **Schmitt R. W.** Thermohaline convection at density ratios below one: A new regime for salt fingers // J. Marine Res. 2011. V. 69. P. 779–795.
8. **Griffiths R. W.** The influence of a third diffusing component upon the onset of convection // J. Fluid Mech. 1979. V. 92. P. 659–670.
9. **Griffiths R. W.** A note on the formation of salt finger and diffusive interfaces in three component systems // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1979. V. 22. P. 1687–1693.
10. **Turner J. S.** Multicomponent convection // Annual Rev. Fluid Mech. 1985. V. 17. P. 11–44.
11. **Pearlstein A. J., Harris R. M., Terrones G.** The onset of convective instability in a triply diffusive fluid layer // J. Fluid Mech. 1989. V. 202. P. 443–465.
12. **Lopez A. R., Romero L. A., Pearlstein A. J.** Effect of rigid boundaries on the onset of convective instability in a triply diffusive fluid layer // Phys. Fluids A. 1990. V. 2, N 6. P. 897–902.
13. **Terrones G.** Cross-diffusion effects on the stability criteria in a triply diffusive system // Phys. Fluids A. 1993. V. 5, N 9. P. 2172–2182.
14. **Rionero S.** Triple diffusive convection in porous media // Acta Mech. 2013. V. 224. P. 447–458.
15. **Rionero S.** Multicomponent diffusive-convective fluid motions in porous layers ultimately boundedness, absence of subcritical instabilities, and global nonlinear stability for any number of salts // Phys. Fluids. 2013. V. 25. 054104.
16. **Shivakumara I. S., Naveen Kumar S. B.** Linear and weakly nonlinear triple diffusive convection in a couple stress fluid layer // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2014. V. 68. P. 542–553.
17. **Terrones G., Pearlstein A. J.** The onset of convection in a multicomponent fluid layer // Phys. Fluids A. 1989. V. 1, N 5. P. 845–853.
18. **Ryzhkov I. I., Shevtsova V. M.** On thermal diffusion and convection in multicomponent mixtures with application to the thermogravitational column // Phys. Fluids. 2007. V. 19. 027101.

19. **Ryzhkov I. I., Shevtsova V. M.** Long wave instability of a multicomponent fluid layer with the Soret effect // Phys. Fluids. 2009. V. 21. 014102.
20. **Ryzhkov I. I.** Long-wave instability of a plane multicomponent mixture layer with the Soret effect // Fluid Dynamics. 2013. V. 4, N 48. P. 477–490.
21. **Pellew A., Southwell R. V.** On the maintained convective motion in a fluid heated from below // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1940. V. 176. P. 312–343.
22. **Prakash J., Bala R., Vaid K.** On the characterization of nonoscillatory motions in triply diffusive convection // Intern. J. Fluid Mech. Res. 2014. V. 41, N 5. P. 409–416.
23. **Prakash J., Bala R., Vaid K.** Upper limits to the complex growth rates in triply diffusive convection // Proc. Indian Nat. Sci. Acad. 2014. V. 80, N 1. P. 115–122.
24. **Prakash J., Bala R., Vaid K.** On characterization of magnetohydrodynamic triply diffusive convection // J. Magnetism Magnetic Materials. 2015. V. 377. P. 378–385.
25. **Yousef T. A., Brandenburg A., Rudiger G.** Turbulent magnetic Prandtl number and magnetic diffusivity quenching from simulations // Astronomy Astrophys. 2003. V. 411. P. 321–327.
26. **Herron I., Goodman J.** The small magnetic Prandtl number approximation suppresses magnetorotational instability // Z. angew. Math. Phys. 2006. Bd 57. S. 615–622.
27. **Schultz M. H.** Spline analysis. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1973.
28. **Gupta J. R., Sood S. K., Bhardwaj U. D.** On the characterization of nonoscillatory motions in a rotatory hydromagnetic thermohaline convection // Indian J. Appl. Math. 1986. V. 17, N 1. P. 100–107.
29. **Banerjee M. B., Katoch D. C., Dube G. S., Banerjee K.** Bounds for growth rate of perturbation in thermohaline convection // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1981. V. 378. P. 301–304.
30. **Gupta J. R., Sood S. K., Shandil R. G., et al.** Bounds for the growth of a perturbation in some double-diffusive convection problems // J. Austral. Math. Soc. Ser. B. 1983. V. 25, iss. 2. P. 276–285.

Поступила в редакцию 15/I 2015 г.,
в окончательном варианте — 1/VI 2015 г.