

УДК 681.586; 681.785.65

СОВМЕСТНАЯ ОЦЕНКА УРОВНЯ И ПЛОТНОСТИ ЖИДКОСТИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

Е. Н. Абросимов, А. С. Семёнов, А. Л. Шестаков

*Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Южно-Уральский государственный университет»,
454080, г. Челябинск, просп. Ленина, 76
E-mail: 560101@rambler.ru*

Рассматривается алгоритм работы гидростатического уровнемера в условиях неизвестной плотности жидкости, основанный на определении момента перехода уровня через датчик давления и позволяющий повысить точность измерения плотности и уровня, в сравнении с известными методами. Синтез алгоритма проведён на основе метода максимального правдоподобия. Выполнен анализ алгоритма и приведены данные экспериментальных исследований.

Ключевые слова: алгоритм, уровень, плотность, погрешность, оценка.

Введение. Контроль уровня жидкостей — одна из самых распространённых задач в различных технологических процессах. Это является причиной большого разнообразия способов контроля уровня, основанных на ультразвуковом, радиолокационном и других методах.

Контроль уровня гидростатическим методом, базирующимся на измерении давления столба жидкости, имеет ряд преимуществ [1], важные из которых — хорошее соотношение точность/стоимость и высокая надёжность, основанная на отсутствии подвижных элементов и простоте конструкции.

Главным выражением для оценки уровня гидростатическим методом является $H = D/(\rho g)$, где H — уровень жидкости, D — величина давления, ρ — удельное давление (плотность) жидкости, g — ускорение свободного падения [2]. Однако такой способ имеет существенный недостаток: метод хорошо работает только при условии точного знания ρ . Погрешность измерения уровня, связанная с погрешностью оценки ρ , для $\Delta\rho \ll \rho$ прямо пропорциональна значению измеряемого уровня. Это может привести к тому, что при изменении плотности во время работы погрешность оценки уровня датчиком превысит допустимое значение.

Для устранения этого недостатка было предложено установить второй датчик давления (датчик плотности) выше первого (датчика уровня) на известном расстоянии H_0 , как это показано на рис. 1. Тогда удельное давление можно оценить по формуле

$$\rho = \frac{D_0 - D_1}{gH_0}, \quad (1)$$

где D_0 и D_1 — показания нижнего и верхнего датчиков давления.

Уровень жидкости при такой конструкции измерителя определяется из выражения

$$H_1 = H_0 \frac{D_0}{D_0 - D_1}, \quad (2)$$

причём значение H_1 должно превышать значение H_0 . Назовём алгоритм работы этого метода алгоритмом-прототипом.

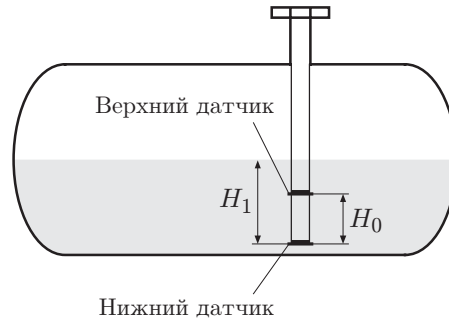


Рис. 1

Очевидно, что в силу простоты метода теоретическое обоснование гидростатического измерителя ограничивается вышеприведёнными формулами за исключением [3], где проанализирована возможность использования калмановской фильтрации для повышения точности оценки плотности и уровня. Большинство публикаций содержит различные варианты конструктивной реализации. Более подробный анализ погрешности гидростатического измерителя позволяет провести синтез алгоритма, чтобы улучшить его параметры.

Целью данной работы является создание такого алгоритма, а также теоретическое и экспериментальное исследование его точностных характеристик.

Оценка параметров алгоритма-прототипа. Будем считать, что в системе, изображённой на рис. 1, оценка давления происходит с погрешностью

$$D_0 = D_{0a} + \xi_0; \quad D_1 = D_{1a} + \xi_1, \quad (3)$$

где D_{0a} и D_{1a} — истинные значения давления жидкости на уровнях расположения нижнего и верхнего датчиков, а ξ_0 и ξ_1 — погрешности измерения соответствующих давлений. При этом полагаем, что погрешность датчика складывается из двух компонент: систематической и случайной (шумовой), т. е. $\xi = \xi_c + \xi_{ш}$.

Так как выражение (2) нелинейно относительно измеряемых параметров, для оценки погрешности измерений используем метод линеаризации, предложенный в [4], в соответствии с которым нелинейная функция разлагается в ряд Тейлора

$$f(a_1, \dots, a_m) = f(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial a_i} \Delta a_i + R,$$

где $f(a_1, \dots, a_m)$ — нелинейная функциональная зависимость измеряемой величины от измеренных аргументов a_i ; $\partial f / \partial a_i$ — первая производная от функции f по аргументу a_i , вычисленная в точке $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m$; Δa_i — отклонение результата измерений от его среднего арифметического; $R = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial a_i \partial a_j} (\Delta a_i \Delta a_j)$ — остаточный член. В нашем случае

$f(a_1, \dots, a_m)$ соответствует выражению (2), $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m$ — фактическим значениям давления D_{0a} и D_{1a} , а Δa_i — погрешности оценки давлений.

Подставляя (2) в формулу линеаризации, для измеренного уровня получим

$$H_{1из} \approx \frac{D_{0a} H_0}{D_{0a} - D_{1a}} + \frac{H_0}{D_{0a} - D_{1a}} \left(\frac{\xi_1 D_{0a} - \xi_0 D_{1a}}{D_{0a} - D_{1a}} \right) + R. \quad (4)$$

Можно показать, что условия $|\xi_1| + |\xi_0| \ll D_{0a} - D_{1a}$ и $|\xi_0| \ll D_{0a}$ являются достаточными для того, чтобы принять $R = 0$. Тогда, выразив истинные значения давления через

фактический уровень H_1 из (4), будем иметь

$$\Delta_H = \frac{1}{\rho} \left[\xi_1 \frac{H_1}{H_0} + \xi_0 \left(1 - \frac{H_1}{H_0} \right) \right] = H_{\max} \left[\xi_1 \frac{H_1}{H_0} + \xi_0 \left(1 - \frac{H_1}{H_0} \right) \right], \quad (5)$$

где Δ_H — абсолютная погрешность уровня при заданной погрешности датчиков давления; ρ — текущее значение удельной плотности жидкости; $H_{\max} = D_{\max}/\rho$ — максимальное значение, рассчитанное исходя из верхнего допустимого предела давления (подразумевается, что технические характеристики датчиков одинаковые). Так как погрешности датчиков можно считать независимыми, то из (5) получаем значение дисперсии измерения уровня

$$\sigma_H^2 = H_{\max}^2 \left[\sigma_{\xi_1}^2 \left(\frac{H_1}{H_0} \right)^2 + \sigma_{\xi_0}^2 \left(1 - \frac{H_1}{H_0} \right)^2 \right] = H_{\max}^2 \sigma_{\xi}^2 \left[\left(\frac{H_1}{H_0} \right)^2 + \left(1 - \frac{H_1}{H_0} \right)^2 \right], \quad (6)$$

где σ^2 — дисперсия величины, обозначенной нижним индексом.

Из формулы (4) видно, что при оценке уровня по алгоритму (2), во-первых, появляется новая компонента погрешности, связанная с работой датчика плотности, и, во-вторых, при возрастании уровня появляется линейная зависимость среднеквадратичного отклонения от значения текущего уровня с коэффициентом $K_1 \approx \sqrt{2} \sigma_{\varepsilon} (H_{\max}/H_0)$. С одной стороны, эти недостатки резко ограничивают возможность применения метода, так как приводят либо к слишком низким точностям оценки уровня при его возрастании, либо требуют очень малых пределов основной допустимой погрешности датчиков давления (0,1 % и ниже). С другой стороны, ясно, что этот метод не использует информацию, которую можно извлечь, сравнивая изменения в показаниях датчиков при изменениях уровня. Отсюда возникает стремление исследовать возможность повышения точности работы системы, показанной на рис. 1, при условии, что уровень жидкости изменяется и граница раздела жидкость — газ периодически пересекает уровень расположения верхнего датчика. Так как этот алгоритм работает только при изменениях уровня, назовём его алгоритмом динамической оценки.

Синтез алгоритма динамической оценки. В соответствии с методом максимального правдоподобия [5] для получения оценки параметров необходимо решить систему уравнений

$$\frac{\partial \ln L(D(t)/\vartheta)}{\partial \vartheta_i} = 0,$$

где L — функционал отношения правдоподобия сигнала давления $D(t)$, зависящий от вектора неизвестных параметров v и времени t ; v_i — i -й оцениваемый параметр.

Пусть значение уровня в системе, показанной на рис. 1, изменяется от времени и в некоторый момент τ пересекает значение H_0 . В этот момент на входе датчика уровня давление составляет величину D_H . Момент времени τ находится внутри интервала наблюдения $[-T \dots T]$, и в пределах этого интервала уровень можно принять линейно изменяющимся. Тогда, учитывая (3), идеальные сигналы на выходе нижнего и верхнего датчиков соответственно можно записать как

$$D_0(t) = D_H - a(t - \tau) + \xi_{0c}; \quad D_1(t) = -a(t - \tau) + \xi_{1c} \quad (7)$$

(a — скорость изменения давления, ξ_{0c} и ξ_{1c} — систематические компоненты погрешности), а измеренные — в виде

$$X_0(t) = D_0(t) + \xi_{0ш}(t); \quad X_1(t) = D_1(t) + \xi_{1ш}(t), \quad (8)$$

где $\xi_{\text{ш}}(t)$ — случайный нормально распределённый белый шум со спектральной плотностью N .

При таких предположениях логарифм функционала правдоподобия запишем в виде

$$\ln L = I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = \frac{1}{N} \int_{-T}^T D_0(t) \left[X_0(t) - \frac{1}{2} D_0(t) \right] dt;$$

$$I_2 = \frac{1}{N} \int_{-T}^{\tau} D_1(t) \left[X_1(t) - \frac{1}{2} D_1(t) \right] dt + \frac{1}{N} \int_{\tau}^T \xi_{1c} \left(X_1(t) - \frac{1}{2} \xi_{1c} \right) dt. \quad (9)$$

В формулах (9) учтено, что при уровне ниже H_0 сигнал на выходе датчика плотности фактически равняется его постоянной погрешности ξ_1 .

Для того чтобы создать алгоритм определения неизвестных параметров в соответствии с методом максимального правдоподобия, надо продифференцировать функционал правдоподобия по каждому параметру, приравнять производные к нулю и решить полученную систему уравнений.

Продифференцируем $\ln L$ по параметрам ξ_0 , ξ_1 , a и τ :

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \xi_{0c}} = \frac{1}{N} \int_{-T}^T (X_0(t) - D_0(t)) dt = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \xi_{1c}} = \frac{1}{N} \int_{-T}^{\tau} (X_1(t) - D_1(t)) dt + \frac{1}{N} \int_{\tau}^T (X_1(t) - \xi_{1c}) dt = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = \frac{1}{N} \int_{-T}^T (t - \tau)(X_0(t) - D_0(t)) dt + \frac{1}{N} \int_{-T}^{\tau} (t - \tau)(X_1(t) - D_1(t)) dt = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \tau} = \frac{a}{N} \int_{-T}^T (X_0(t) - D_0(t)) dt + \frac{a}{N} \int_{-T}^{\tau} (X_1(t) - D_1(t)) dt = 0. \quad (13)$$

Рассмотрим подробнее уравнение (11). Графическая интерпретация этого соотношения приведена на рис. 2.

При известных скорости налива a и систематической погрешности верхнего датчика ξ_{1c} , с одной стороны, выполнение равенства достигается изменением предела интегрирования τ , а с другой — фиксацией τ и изменением положения строба. Таким образом, уравнение (11) можно интерпретировать как аналитическое выражение алгоритма следящего строба. Заметим, что при фиксированном положении перехода уровня через значение

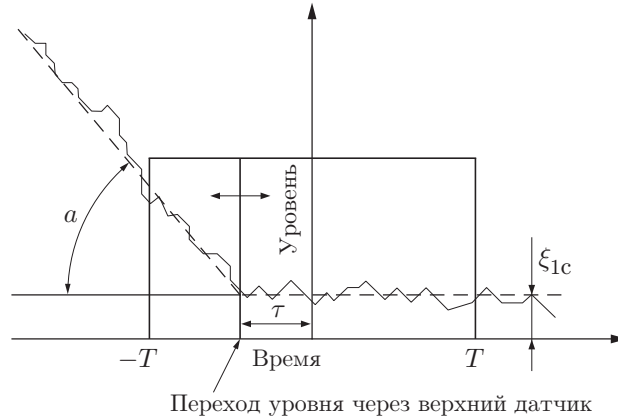


Рис. 2

H_0 (уровень верхнего датчика) всегда можно подобрать начало строба так, что точка перехода придётся на его середину, т. е. $\tau = 0$. Тогда система упрощается:

$$\int_{-T}^T (X_0(t) - D_0(t)) dt = 0,$$

$$\int_{-T}^0 (X_1(t) - D_1(t)) dt = 0,$$

$$\int_{-T}^T t(X_0(t) - D_0(t)) dt + \int_{-T}^0 t(X_1(t) - D_1(t)) dt = 0,$$

$$\int_0^T (X_1(t) - \xi_{1c}) dt = 0.$$

После подстановки $D_0(t)$, $D_1(t)$ и интегрирования будет иметь место система:

$$\int_{-T}^T X_0(t) dt = 2T(D_H + \xi_{0c}),$$

$$\int_{-T}^0 X_1(t) dt = T\xi_{1c} + \frac{aT^2}{2},$$

$$\int_0^T X_1(t) dt = \xi_{1c}T,$$

$$\int_{-T}^T tX_0(t) dt + \int_{-T}^0 tX_1(t) dt = -\frac{2}{3}aT^3 - \frac{r_2T^2}{2} - \frac{1}{3}aT^3.$$

После преобразований получаем, что в момент $\tau = 0$, когда значение уровня равно

H_0 , должны выполняться следующие соотношения:

$$D_H + \xi_{0c} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X_0(t) dt, \quad (14)$$

$$\xi_{1c} = \frac{1}{T} \int_0^T X_1(t) dt, \quad (15)$$

$$a = \frac{2}{T^2} \left(\int_{-T}^0 X_1(t) dt - \int_0^T X_1(t) dt \right), \quad (16)$$

$$\frac{1}{T} \left[\int_{-T}^T t X_0(t) dt + \int_{-T}^0 t X_1(t) dt \right] = -2 \int_{-T}^0 X_1(t) dt + \frac{3}{2} \int_0^T X_1(t) dt. \quad (17)$$

Формулы (14), (15) и (17) дают алгоритм калибровки датчиков. На первом этапе с помощью скользящих стробов фиксируется момент выполнения равенства (17), который фактически является моментом перехода середины строба наблюдения через точку H_0 . Показания нижнего датчика, оцениваемые по формуле (14), в это время соответствуют уровню H_0 . Поставив показания нижнего датчика в соответствие уровню H_0 , можно провести компенсацию его систематической ошибки, что эквивалентно калибровке уровнемера в точке H_0 . После этого, обозначив оценку интегрального показания нижнего датчика в момент $\tau = 0$ как $D_y = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X_0(t) dt$, оценим уровень жидкости в любой момент времени по формуле

$$H_{\text{из}} = H_0 \frac{D_0}{D_y}. \quad (18)$$

Предварительный анализ полученного выражения показывает, что в отличие от формулы (2) при оценке значения текущего уровня показания верхнего датчика не учитываются. Таким образом, можно предположить, что в первом приближении исчезнет и компонента погрешности, связанная с погрешностью верхнего датчика, т. е. точность измерения уровня будет повышена.

Характеристики алгоритма динамической оценки. Будем считать, что основная погрешность датчика определяется систематической составляющей $\xi_0 \approx \xi_{0c}$ (обычно это справедливо). Тогда формулу (18) представим в виде

$$H_{\text{из}} = H_0 \frac{D_{0a} + \xi_0}{D_{ya} + \xi_0} \approx H_1 + \xi_0 H_{\text{max}} \left(1 - \frac{H_1}{H_0} \right), \quad (19)$$

где H_1 — истинное значение уровня; D_{ya} — интегральное показание нижнего датчика в момент $\tau = 0$ при $\xi_0 = 0$. Отсюда погрешность измерения

$$\Delta_H = \xi_0 H_{\text{max}} \left(1 - \frac{H_1}{H_0} \right). \quad (20)$$

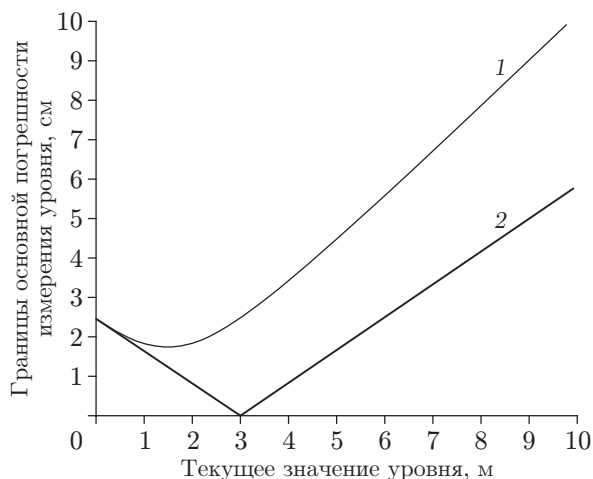


Рис. 3



Рис. 4

Из формулы (20) находим дисперсию оценки уровня при помощи предложенного алгоритма:

$$\sigma_H^2 = \sigma_{\xi_0}^2 H_{\max}^2 \left(1 - \frac{H_1}{H_0}\right)^2. \tag{21}$$

На рис. 3 приведены графики функций (5) (прототип — кривая 1) и (20) (предлагаемый алгоритм — кривая 2) для $H_{\max} = 10$ м, $H_0 = 3$ м и $\sigma_0 = 0,25$ %. Из рисунка видно, что хотя в предлагаемом алгоритме и сохраняется линейная зависимость погрешности от уровня, коэффициент её пропорциональности $K_2 \approx \sigma_\varepsilon (H_{\max}/H_0) = K_1/\sqrt{2}$ и, кроме того, в первом приближении пропадает зависимость от точностных характеристик верхнего датчика. Указанные особенности позволяют получить существенный выигрыш в точности оценки уровня. Конкретная эффективность алгоритма определяется текущим уровнем и достигает максимального значения в районе установки верхнего датчика.

Таким образом, хотя для предложенного алгоритма необходим гораздо больший объём вычислений, чем для описанного в [3], получаемый выигрыш свидетельствует о возможности его применения в приложениях, требующих повышенной точности работы.

Результаты экспериментальных работ. Изображение стенда для экспериментальных исследований приведено на рис. 4. Его основу составляет цилиндрический резервуар высотой 3 м и диаметром 120 мм. Датчики давления установлены на высотах 0, 0,8 и 1,6 м. Они представляют собой тензометрические сенсоры с электронными преобразователями. Два сенсора имеют верхний предел 40 кПа и относительную основную погрешность $\pm 0,2$ %, а один (нижний) — верхний предел 100 кПа и относительную основную погрешность $\pm 0,25$ %. Программный блок обеспечивает цикл опроса датчиков 0,1 с и вычисление уровня.

На рис. 5 и 6 показаны типичные графики погрешности оценки уровня при наливе и сливе воды соответственно с помощью алгоритмов прототипа (кривые 1) и динамической оценки (кривые 2). Погрешность определялась как разница между показаниями водомерного стекла и результатами работы соответствующих алгоритмов.

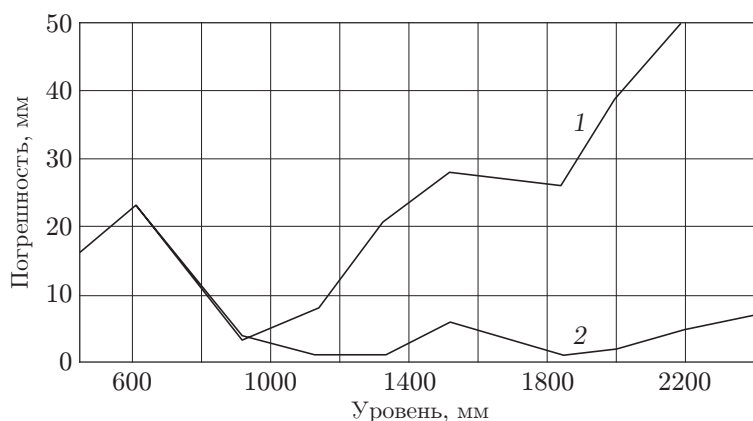


Рис. 5

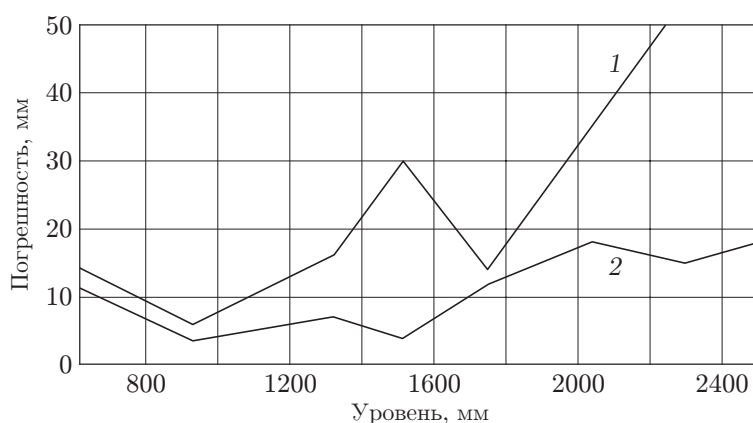


Рис. 6

На первом участке графика рис. 5 (0–600 мм) используется априорная оценка плотности воды и результаты работы алгоритмов совпадают. При увеличении уровня алгоритм динамической оценки демонстрирует существенно более высокую точность, чем алгоритм-прототип.

На всех графиках просматриваются зоны, в которых изменяется поведение погрешности (700–1000 мм и 1500–1700 мм). Для алгоритма-прототипа в этих зонах происходит оценка истинной плотности жидкости. Для алгоритма динамической оценки указанные области можно считать своеобразными зонами калибровки уровнемера, так как здесь определяются показания нижнего датчика давления, соответствующие уровню расположения верхнего датчика.

Сравнивая графики на рис. 5 и 6 с зависимостями на рис. 3, можно отметить их качественное совпадение, что подтверждает достоверность полученных теоретических результатов.

Заключение. В данной работе рассмотрен вопрос повышения точности работы гидростатического измерителя уровня в условиях неизвестной плотности. Показано, что характеристики устройства с несколькими сенсорами зависят не только от параметров сенсоров, но и от алгоритмов обработки поступающей от них информации.

Разработан алгоритм динамической калибровки, позволяющий существенно улучшить метрологические характеристики измерителя без изменения его конструкции.

Предложенный алгоритм может быть использован в условиях химико-технологического производства или иных технологических процессов, когда отсутствуют точные данные о плотности рабочей жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Жданкин В. К.** Приборы для измерения уровня // Современные технологии автоматизации. 2002. № 3. С. 6–19.
2. **Бобровников Г. Н., Катков А. Г.** Методы измерения уровня. М.: Машиностроение, 1977. 168 с.
3. **Шестаков А. Л., Семенов А. С., Корепанов И. Г., Ибряева О. Л.** Применение фильтра Калмана при измерении уровня и плотности жидкости с помощью двух датчиков давления // Измер. техника. 2007. № 6. С. 45–49.
4. **МИ 2083-90 ГСИ.** Измерения косвенные. Определение результатов измерений и оценивание их погрешностей. М.: Изд-во стандартов, 1991.
5. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники. Т. 2. М.: Сов. радио, 1975. 392 с.

Поступила в редакцию 7 мая 2008 г.
