

ЛИТЕРАТУРА

1. Иорданский С. В. Об уравнениях движения жидкости, содержащей пузырьки газа // ПМТФ.— 1960.— № 6.
2. Когарко Б. С. Одномерное неустановившееся движение жидкости с возникновением и развитием кавитации // ДАН СССР.— 1964.— Т. 155.— № 4.
3. Гарипов Р. М. Замкнутые уравнения движения жидкости с пузырьками // ПМТФ.— 1973.— № 6.
4. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред.— М.: Наука, 1978.
5. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики.— М.: Наука, 1981.
6. Ляпидевский В. Ю., Плаксин С. И. Структура ударных волн в газожидкостной среде с нелинейным уравнением состояния // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1983.— Вып. 62.
7. Уизем Д. Б. Линейные и нелинейные волны.— М.: Мир, 1977.
8. Маслов В. П. Асимптотические методы решения псевдодифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1987.
9. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике.— М.: Наука, 1978.
10. Доброхотов С. Ю., Маслов В. П. Конечнорезонансные почти периодические решения в ВКБ-приближениях.— М.: ВИНТИ. Сер. Современные проблемы математики, 1980.— Т. 15.

Поступила 19/XI 1987 г.

УДК 517.9 + 532.5 + 534.26

ЭФФЕКТ ВОЛНОВОДА

С. В. Сухинин

(Новосибирск)

Основная цель теории рассеяния — изучение качественных особенностей рассеянных волн. В настоящей работе исследованы аномальные явления типа эффекта волновода для задач рассеяния на одномерно-периодических структурах. Эффект волновода, по определению Р. М. Гарипова, — существование собственных волн, локализованных в окрестности структуры. Свойства этих волн описываются обобщенными собственными функциями, которые являются решениями задач для установившихся колебаний. Рассмотрены условия существования и возможности эффекта волновода для одномерно-периодических структур: для длинных волн на мелкой воде — одномерно-периодическая цепочка островов, или береговая линия, или одномерно-периодический подводный хребет типа плато; для акустических или электромагнитных волн — одномерно-периодическая решетка пластин или гладких препятствий*.

1. Формулировка задач. Необходимые сведения. Пусть Γ описывает на плоскости \mathbb{R}^2 декартовых переменных (x, y) границу свободного пространства и препятствия. Считается, что Γ может быть связной кривой или совокупностью достаточно гладких замкнутых или разомкнутых кривых. Предполагается, что Γ периодична вдоль оси y с периодом 2π . Препятствия могут быть пронизываемыми или непрозрачными (рис. 1).

Волновые явления около препятствий описываются достаточно гладкой вне границы препятствия Γ комплексно-значной функцией $u(x, y)$ физическое содержание которой конкретизируется в зависимости от задачи. Пусть Ω_1 и Ω_2 — области, на которые Γ делит плоскость \mathbb{R}^2 . Сужение функции $u(x, y)$ на области Ω_1 и Ω_2 обозначено далее $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ соответственно. Функции $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ должны быть решениями уравнения Гельмгольца:

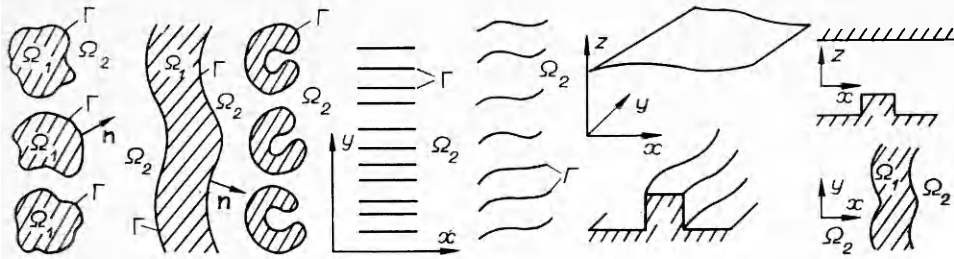
$$(1.1) \quad (\Delta_1^* + \kappa^2 \lambda^2)u_1 = 0 \text{ в } \Omega_1, \quad (\Delta + \lambda^2)u_2 = f \text{ в } \Omega_2.$$

На границе Γ областей Ω_1 и Ω_2 выполняются условия сопряжения

$$(1.2) \quad \delta u_1 = u_2, \quad \gamma \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{n}} \text{ на } \Gamma.$$

Здесь $\kappa > 0$, $\delta > 0$, $\gamma > 0$ — вещественные, а λ — комплексный параметр, физический смысл которых определяется содержанием исследуемого явления. Функция $f(x, y)$ описывает источники колебаний и считается периодической по y с периодом 2π и локализованной в окрестности структуры

* Основные результаты этой работы были доложены на VI Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике.



Р и с. 1

ны. Все функции удовлетворяют условиям локальной конечности энергии ($u_1 \in W_{2\text{loc}}^1(\Omega_1)$, $u_2 \in W_{2\text{loc}}^1(\Omega_2)$) и предполагаются периодическими вдоль оси y с периодом 2π .

Общее решение однородного уравнения Гельмгольца с параметром λ , удовлетворяющее условию периодичности по y с периодом 2π , имеет вид

$$1.3) \quad u(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [a_k^\pm \exp(iky + i|x|\sigma_k) + b_k^\pm \exp(iky - i|x|\sigma_k)],$$

где $\sigma_k = \sqrt{\lambda^2 - k^2}$; k — произвольное целое число; a_k^\pm и b_k^\pm — комплексные числа.

Для каждого фиксированного числа k выражения $\exp(iky + i|x|\sigma_k)$ и $\exp(iky - i|x|\sigma_k)$ представляют собой волны, не идущие в одном направлении по отношению к оси x (возможен вырожденный случай $\sigma_k = 0$ или $\lambda^2 = k^2$). Поэтому, если функция $u(x, y)$ описывает рассеянные на препятствии Γ волны, то можно считать, что для достаточно большого удаления от препятствия коэффициенты $b_k^+ = b_k^- = 0$ для всех k (или $a_k^+ = a_k^- = 0$ для всех k).

Далее будет использовано

О п р е д е л е н и е 1.1. Условие (1.3) — представление решения уравнения Гельмгольца с параметром λ , удовлетворяющего условиям 2π -периодичности по y , в котором все коэффициенты b_k^+ , b_k^- равны нулю ($b_k^+ = b_k^- = 0$), — назовем условием излучения. Функция вида (1.3) удовлетворяет условиям излучения, если $b_k^+ = b_k^- = 0$ для всех k . В соотношении (1.3) для $x \gg 1$ берутся числа a_k^+ , а для $x \ll -1$ — числа a_k^- .

Термины, описывающие направление распространения волн, носят условный характер, так как в исследуемых в настоящей работе задачах время обратимо. Если рассматриваются задачи, описывающие рассеяние плоских волн на периодических структурах, то коэффициенты b_k^+ , b_k^- в соотношении (1.3) должны быть заданы, так как они описывают приходящие (неуходящие) волны.

Обычно знаки перед $\sqrt{\lambda^2 - k^2} = \sigma_k$ выбираются таким образом, чтобы функция $u(x, y, \lambda)$ убывала при удалении от препятствия. Методика изучения задач рассеяния, применяемая в настоящей работе, основана на идее аналитического продолжения условий излучения, фундаментального решения и резольвенты по параметру λ на поверхность Римана аналитического продолжения. Она впервые применена в [1] для исследования задач рассеяния на ограниченных гладких препятствиях.

Поверхность Римана Λ аналитического продолжения по λ функций вида (1.3) ($b_k^+ = b_k^- = 0$) описана в [2—4] и обладает следующими свойствами: Λ бесконечнолистка; точки $\lambda = k$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) являются точками ветвления второго порядка; для каждого элемента λ ($\lambda \in \Lambda$) существует число k_0 такое, что для всех целых чисел k ($|k| > k_0$) выполнены неравенства $\text{Im} \sqrt{\lambda^2 - k^2} \geq 0$. Отметим, что если решение уравнения Гельмгольца удовлетворяет условиям излучения, то для некоторых элементов λ ($\lambda \in \Lambda$) оно может возрастать при удалении от препятствий.

В зависимости от физического содержания задачи рассеяния условия (1.2) на границе препятствия Γ могут быть заменены на условия Дирихле ($\delta = 0$)

$$(1.2a) \quad u|_{\Gamma} = 0$$

или на условия Неймана ($\gamma = 0$)

$$(1.2b) \quad \partial u / \partial n|_{\Gamma} = 0.$$

Для дальнейшего изложения необходима терминология [4]:

О п р е д е л е н и е 1.2. Квазисобственным значением задачи рассеяния (1.1), ((1.2), или (1.2a), или (1.2b)), (1.3) называется такой элемент λ_* поверхности Римана Λ , для которого существует нетривиальное решение соответствующей однородной ($f \equiv 0$) краевой задачи.

Имеет место [2—6]

Теорема 1.1. Множество Λ_* квазисобственных значений λ_* ($\lambda_* \in \Lambda_*$ задачи (1.1), ((1.2), или (1.2a), или (1.2b)), (1.3) дискретно на поверхности Римана Λ . Каждое квазисобственное значение имеет конечную кратность. Для тех значений λ , которые не являются квазисобственными ($\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_*$) соответствующие краевые задачи имеют единственное решение.

Условия излучения определяют моды, не идущие в разных направлениях вдоль оси x , в том и только в том случае, когда для всех k , для которых $a_k^+ \neq 0$ или $a_k^- \neq 0$ в (1.3), выполнены неравенства

$$(1.4) \quad (\operatorname{Re} \lambda)(\operatorname{Re} \sqrt{\lambda^2 - k^2}) \geq 0.$$

Для всех k $\operatorname{sign}(\operatorname{Re} \sqrt{\lambda^2 - k^2})$ определяет направление распространения моды колебаний, а $\operatorname{sign}(\operatorname{Im} \sqrt{\lambda^2 - k^2})$ — затухание или возрастание этой моды при удалении от препятствия. Условия (1.4) позволяют классифицировать квазисобственные значения по физическому содержанию соответствующих им квазисобственных функций. Используем терминологию [4, 5]:

О п р е д е л е н и е 1.3. Собственным значением задачи (1.1), (1.2) (1.3) или (1.1), ((1.2a) или (1.2b)), (1.3) называется такое квазисобственное значение λ_* ($\lambda_* \in \Lambda_*$), для которого выполнены условия (1.4). Псевдособственными значениями называются такие квазисобственные значения, которые не являются собственными. Кратко можно записать: квазисобственные = собственные + псевдособственные.

Имеет место очень важное для приложений

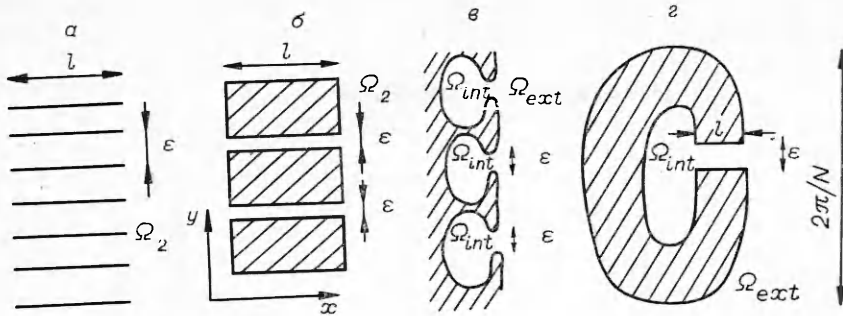
Утверждение 1.1 [4]. Собственные значения задачи рассеяния на одномерно-периодической структуре с условиями (1.1), (1.2a), (1.3) или (1.1), (1.2b), (1.3) могут быть только вещественными числами. Для проникаемых препятствий доказательство теоремы 2.1 работы [4] полностью не проходит, так как в этом случае решение может иметь разрывы или терять гладкость на границах, поэтому условия теоремы Хольмгрена не выполняются, и имеет место

Утверждение 1.2. Собственное значение задачи рассеяния вещественно тогда, когда в условиях излучения (1.3) для соответствующей квазисобственной функции содержится бесконечное множество слагаемых.

В [5] приведен простой пример существования комплексных собственных значений задачи рассеяния на проникаемой структуре.

Утверждения 1.1 и 1.2 позволяют сформулировать «эффект волновода» для одномерно-периодической структуры как существование собственных значений и собственных функций соответствующей задачи рассеяния. Существование собственной функции, локализованной в окрестности структуры, обуславливает эффект волновода структуры и возможно только для вещественного собственного значения. Поэтому дальнейшее изложение посвящено исследованию собственных значений и функций задач рассеяния.

З а м е ч а н и е 1.1. Принадлежность элемента λ_* ($\lambda_* \in \Lambda$) тому или иному листу поверхности Римана Λ тесно связана с видом соответствующей λ_* квазисобственной функции.



Р и с. 2

2. Периодическая цепочка резонаторов. Эффект волновода. Рассмотрим возможность эффекта волновода для периодических структур задачи рассеяния, на которых описываются (1.1), (1.3) с условиями (1.2a) или (1.2б) на границе Γ . Возможность эффекта волновода для одномерно-периодических структур имеет важное значение для различных прикладных вопросов. Эффект волновода необходимо учитывать при изучении волн на воде около периодической береговой линии, при изучении распространения акустических или электромагнитных волн около периодической решетки или периодической поверхности.

Пусть Γ — одномерно-периодическая цепочка резонаторов с периодом 2π (рис. 2, а, б — отсутствует внутренность резонатора, а имеется только канал (отверстие), в, г — полость резонатора Ω_{int}). Внешность во всех случаях обозначена Ω_{ext} , канал (отверстие) — Ω_c и характеризуется длиной l , шириной ϵ . Значение ϵ может быть достаточно малым по сравнению с l и другими характерными размерами резонатора. Для дальнейшего изложения необходимо утверждение, доказательство которого содержится в [4]:

Теорема 2.1. Если ν^2 — собственное значение оператора Лапласа $-\Delta$ в области Ω_{int} (внутренность резонатора) для функций, удовлетворяющих условиям Дирихле или условиям Неймана на стенках резонатора ($\partial\Omega_{int}$), то существует такое квазисобственное значение $\lambda^*(\epsilon)$ соответствующей задачи рассеяния (1.1), ((1.2a) или (1.2б)), (1.3), что имеет место

$$(2.1) \quad \nu = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lambda^*(\epsilon).$$

Кроме того, в задаче Неймана (1.1), (1.2б), (1.3) для всех k существуют квазисобственные значения такие, что

$$(2.2) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lambda_k^*(\epsilon) = k\pi/l.$$

В соотношениях (2.1) и (2.2) пределы понимаются в топологии поверхности Римана Λ . Числа $k\pi/l$ в соотношении (2.2) связаны с собственными колебаниями открытого канала. Если скорость распространения волн равна 1, то $k\pi/l$ есть собственные частоты канала для достаточно малых ϵ . Теорема 2.1 говорит о существовании квазисобственных значений на поверхности Римана Λ и о близости в некоторых специальных случаях к вещественной оси.

Для удобства дальнейшего изложения запишем формулировку задачи Неймана (или Дирихле), описывающую квазисобственные значения λ^* и функции $u^*(x, y)$ задачи рассеяния (1.1), (1.2б), (1.3):

$$(2.3) \quad \begin{aligned} &(\Delta + \lambda^2)u = 0 \text{ в } \Omega = \Omega_{int} + \Omega_{ext} + \Omega_c, \\ &u(x, y + 2\pi) = u(x, y), \quad \partial u / \partial n = 0 \text{ (или } u = 0 \text{) на } \Gamma, \\ &u(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^\pm \exp(iyk + i|x| \sqrt{\lambda^2 - k^2}), \quad |x| \gg 1. \end{aligned}$$

А. Задачи рассеяния на одномерно-периодической решетке пластин имеют важное приложение в области аэроакустики [6—9] и в области электродинамики [10].

Пусть Γ — решетка отрезков, параллельных оси x , периодическая по направлению оси y с периодом 2π , которая моделирует одномерно-периодическую решетку пластин. Функции $\exp(i\lambda x)$ и $\exp(-i\lambda x)$ удовлетворяют однородным условиям Неймана на Γ и являются решениями однородного уравнения Гельмгольца с параметром λ . Пусть Λ_0 — лист поверхности Римана Λ с разрезами $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$, на котором выполнено для всех k неравенство $\text{Im} \sqrt{\lambda^2 - k^2} > 0$. В силу теоремы 2.1 для определенных значений l (длины пластин) и ε (расстояния между некоторыми двумя пластинами) (рис. 2, а) на листе Λ_0 существуют квазисобственные значения λ_* задачи (2.1). Пусть $u_*(x, y, \lambda_*)$ — соответствующая λ_* квазисобственная функция, $\text{Im} \sqrt{\lambda_*^2 - k^2} \neq 0$. Так как $u_*(x, y)$ есть решение (2.1), то для достаточно больших $|x|$ ($|x| \gg 1$) имеет место

$$u_*(x, y) = \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{+\infty} a_k^\pm \exp(iky + i|x| \sqrt{\lambda_*^2 - k^2}) + a_0^\pm \exp(i|x| \lambda_*).$$

Поэтому функция $v_* = a_0^+ \exp(ix\lambda_*) - a_0^- \exp(-ix\lambda_*)$ — решение задачи (2.3) в том случае, когда Γ описывает решетку пластин. Заметим, что если функция $u_*(x, y, \lambda_*)$ возрастает при удалении от препятствия, то функция $v_*(x, y, \lambda_*)$ убывает. Поэтому можно считать, что квазисобственные функции задачи рассеяния на решетке пластин не возрастают при удалении от решетки пластин, если λ — вещественное число, и убывают, если $\text{Im} \lambda \neq 0$. При помощи формулы Грина можно получить соотношение для квазисобственной функции $u_*(x, y, \lambda_*)$, $\lambda_* \in \Lambda_0$:

$$(2.4) \quad \int_{\Omega_0} (|\nabla u_*|^2 - \lambda_*^2 |u_*|^2) d\Omega_0 = 0.$$

Здесь $\Omega_0 = \Omega \cap \{(x, y), 0 \leq y < 2\pi\}$. Из (2.4) вытекает равенство $\text{Im} \lambda_* = 0$. Существование вещественных квазисобственных значений λ_* на листе Λ_0 следует для достаточно малых ε из (2.2), если $|k\pi| < l$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm k_0$).

Пусть k_0 — максимальное целое число, для которого выполнено неравенство $|k_0\pi| < l$, l — длина отрезков, моделирующих решетку пластин (см. рис. 2). Имеет место

Теорема 2.2. В окрестности каждого числа ν_k , $\nu_k = k\pi/l$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm k_0$) для достаточно малых ε ($\varepsilon > 0$) существует вещественное собственное значение λ_k^* задачи (2.3), соответствующая собственная функция $u_k^*(x, y, \lambda_k^*)$ локализована в окрестности решетки Γ в том смысле, что $u_k^*(x, y, \lambda_k^*) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Наличие вещественных собственных значений задачи (2.3) для решетки пластин обосновывает возможность эффекта волновода для соответствующих структур. Поэтому утверждение теоремы 2.2 описывает возможности существования эффекта волновода для одномерно-периодической решетки пластин, на которых выполнено однородное условие Неймана.

Б. Пусть препятствие Γ обладает свойством

$$(2.5) \quad \Gamma = \Gamma + (2\pi/N)\mathbf{e}_y.$$

Здесь и далее N — натуральное число; \mathbf{e}_y — единичный вектор в направлении оси y . Соотношение (2.5) означает, что структура, описываемая Γ , имеет период вдоль оси y , равный $2\pi/N$. На рис. 2 N — число одинаковых резонаторов в полосе $y_0 \leq y \leq y_0 + 2\pi$. Прямым вычислением можно проверить, что если $u(x, y, \lambda^*)$ есть квазисобственная функция (2.3), то $u(x, y + 2\pi/N, \lambda^*)$ — также квазисобственная функция задачи (2.3), когда одномерно-периодическая структура Γ имеет период $2\pi/N$ (2.5). Всякое решение $u(x, y)$ задачи (2.3) в том случае, когда Γ удовлетворяет условию

2.5), можно представить в виде

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^N u_n(x, y).$$

Функции $u_n(x, y)$ удовлетворяют условиям квазипериодичности ($n = 1, \dots, N$)

$$2.6) \quad u_n(x, y + 2\pi/N) = u_n(x, y) \exp(i2\pi n/N).$$

Эти соотношения описывают специфику колебаний около одномерно-периодической структуры, период повторяемости которой меньше, чем период вдоль оси структуры искомого решения. Обычно говорят, что (2.6) вызывает сдвиг фазы колебаний в соседних областях около одномерно-периодической структуры.

Пусть $u_n(x, y, \lambda)$ — решение задачи (2.3), которое удовлетворяет соотношению (2.6), $n \in \{1, 2, \dots, N\}$. Тогда достаточно далеко от структуры ($|x| \gg 1$) справедливо представление

$$2.7) \quad u_n(x, y, \lambda) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^{\pm} \exp[i(n + kN)y + i|x| \sqrt{\lambda^2 - (n + kN)^2}].$$

Коэффициенты c_k^+ и c_k^- в разложении (2.7) связаны с коэффициентами a_k^+ и a_k^- в условиях излучения (2.3) соотношениями $c_k^+ = a_{n+kN}^+$, $c_k^- = a_{n+kN}^-$. Функции вида (2.7) аналитически зависят от параметра λ на поверхности Римана. Числа $\pm(n + kN)$ — точки ветвления. Значительным отличием (2.7) от условий излучения (2.3) является отсутствие для $n \neq N$ «ненулевого» слагаемого вида $a_0^{\pm} \exp(i|x|\lambda)$. Утверждение последующей леммы вытекает из условий выбора листа Λ_0 и (2.7).

Лемма 2.1. Если квазисобственная функция $u^*(x, y, \lambda^*)$ удовлетворяет для некоторого числа n ($n \in \{1, 2, \dots, N-1\}$) условию (2.7), то $u^*(x, y, \lambda^*)$ убывает при удалении от препятствия ($|x| \gg 1$) для всех квазисобственных значений λ^* , находящихся на листе Λ_0 поверхности Римана Λ .

Для рис. 2, б справедлива

Теорема 2.3. Если m — такое наибольшее натуральное число, для которого выполнено неравенство $m\pi/l < \min\{n, N-n\}$, то для достаточно малого ϵ существуют вещественные собственные значения (2.3) $\lambda_k^*(\epsilon)$ ($-m \leq k \leq m$) такие, что выполняется соотношение $k\pi/l = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lambda_k^*(\epsilon)$. Собст-

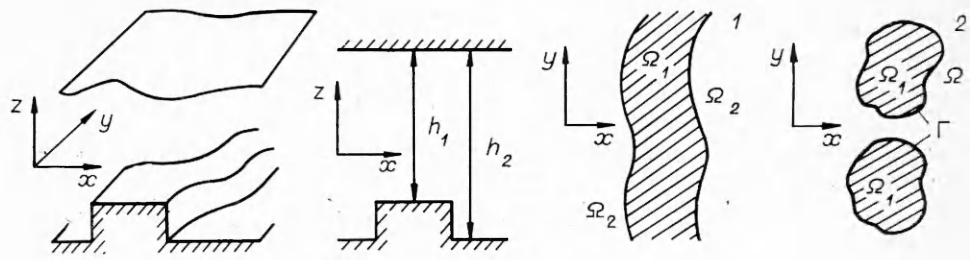
венные функции $u_k^*(x, y, \lambda_k^*)$ локализованы в окрестности структуры и удовлетворяют соотношению (2.6).

Доказательство. Существование квазисобственных значений вытекает из теоремы 2.1. Из леммы 2.1 следует, что эти квазисобственные значения являются собственными и собственные функции локализованы в окрестности структуры, показанной на рис. 2, б. Если структуры рис. 2, в, г удовлетворяют условию (2.5), то справедлива

Теорема 2.4. Пусть ν_k^2 — собственное значение оператора Лапласа Δ в области Ω_{int} для функций, удовлетворяющих условиям Дирихле или Зеймана на внутренней границе резонатора $\partial\Omega_{\text{int}}$, а m — такое наибольшее натуральное число, для которого выполнено неравенство $|v_m| < \min\{n, N-n\}$. Предполагается, что ν_k ($k = 1, 2, \dots$) пронумерованы в порядке возрастания ($|v_1| \leq |v_2| \leq \dots \leq |v_k| \leq |v_{k+1}| \leq \dots$). Тогда для достаточно малого ϵ существуют вещественные собственные значения (ϵ) задачи (2.3) ($-m \leq k \leq m$) такие, что выполняются соотношения $\nu_k^2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lambda_k^*(\epsilon)$. В том случае, когда ν_k не являются квазисобственными зна-

чениями задачи (2.3) в области Ω_{ext} , соответствующие $\lambda_k^*(\epsilon)$ собственные функции локализованы в окрестности структуры Г.

Доказательство аналогично предыдущему, так как лемма справедлива для структур рис. 2, в, г.



Р и с. 3

З а м е ч а н и е 2.1. Так как N (число одинаковых резонансных подструктур в периоде) может быть сколь угодно большим и число n которое определяет сдвиг фазы колебаний в соседних подструктурах (2.6) достаточно произвольно ($0 < n < N$), то $\min\{n, N - n\}$ может быть сколь угодно большим.

3. Подводная одномерно-периодическая структура. Эффект волновода. В 1957 г. М. А. Лаврентьев выдвинул гипотезу, что неровности дна типа однородных подводных гребней могут служить волноводами для поверхностных волн на воде. В 1965 г. Р. М. Гарипов [11] в рамках линейной теории доказал, что неровности дна, однородные по одной из переменных, действительно могут быть волноводами для поверхностных волн. Более подробно результаты изложены в [12]. Экспериментально этот вопрос исследован в [13]. В [14—16] изучены различные стороны задачи рассеяния на однородном гребне.

В настоящей работе в рамках линейной теории акустического приближения [12] рассмотрены условия существования и возможность эффекта для подводных одномерно-периодических структур. В этом случае распространение поверхностных волн на мелкой воде описывается уравнением [12]

$$(3.1) \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - g \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \right\} = f,$$

где ζ — высота слоя жидкости; g — ускорение силы тяжести; h — глубина; f — источники возмущений; (x, y) — декартовы координаты. Пусть Ω_1 — область на плоскости (x, y) , периодическая вдоль оси y и ограниченная вдоль оси x . Область $\bar{\Omega}_1$ моделирует проекцию хребта на плоскости (x, y) (рис. 3). Пусть $\bar{\Omega}_2$ — дополнение к области $\bar{\Omega}_1$ на плоскости (x, y) . Предполагается, что области Ω_1 и Ω_2 периодичны вдоль оси y с периодом $2\pi/N$. Если в областях Ω_1 и Ω_2 глубина постоянна и равна h_1 и h_2 соответственно и зависимость от времени имеет вид $\zeta(x, y, t) = \zeta(x, y) \exp(-i\omega t)$ то функция $\zeta(x, y)$ в силу (3.1) должна удовлетворять соотношениям

$$(3.2) \quad (\Delta + \omega^2/gh_1)\zeta_1 = 0 \quad \text{в } \Omega_1, \quad (\Delta + \omega^2/gh_2)\zeta_2 = f \quad \text{в } \Omega_2.$$

Здесь индексы 1 или 2 означают сужение соответствующей функции на область $\bar{\Omega}_1$ или $\bar{\Omega}_2$. Пусть Γ — граница областей Ω_1 и Ω_2 . На линии Γ глубина меняется скачком, и поэтому должны быть выполнены соотношения [18]

$$(3.3) \quad \zeta_1 = \zeta_2, \quad h_1 \partial \zeta_1 / \partial n = h_2 \partial \zeta_2 / \partial n \quad \text{на } \Gamma$$

(\mathbf{n} — единичный вектор нормали к границе Γ). Предполагается, что функции ζ_1 и ζ_2 удовлетворяют условиям периодичности вдоль оси y с периодом 2π , $\zeta(y + 2\pi) = \zeta(y)$. Функция f также предполагается периодической вдоль оси y с периодом 2π . Кроме того, считается, что f локализована в окрестности структуры, а функция ζ удовлетворяет условиям излучения для достаточно большого $|x|$ ($|x| \gg 1$). Имеет место

$$(3.4) \quad \zeta = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^{\pm} \exp(iky + i|x| \sqrt{\lambda^2 - k^2})_x$$

где $\lambda = \omega / \sqrt{gh_2}$; a_k^+ и a_k^- — комплексные числа; берется a_k^+ , если $x \gg 1$, и a_k^- , если $x \ll -1$.

Соотношения (3.2)—(3.4) представляют собой частный случай задачи (1.1)—(1.3), однако асимптотическое поведение решения этой задачи в зависимости от h_1 ($h_1 \rightarrow \infty$) или h_2 ($h_2 \rightarrow \infty$) носит несколько специальный вид, так как эти параметры входят как в уравнение, так и в граничные условия. Имеет место [5]

Теорема 3.1. Множество квазисобственных значений задачи (3.2)—(3.4) дискретно на поверхности Римана Λ . Если $h_2 \rightarrow \infty$, то квазисобственные значения задачи (3.2)—(3.4) (здесь и далее считаем $h_1 = 1$) близки к собственным значениям задачи Дирихле в области Ω_1 в классе функций, удовлетворяющих условиям периодичности. Все сходимость понимаются на произвольном компакте поверхности Римана Λ с индуцированной топологией Λ .

Эта теорема позволяет качественно описать поведение решения задачи рассеяния на подводном гребне в том случае, когда частоты задачи близки к указанным в формулировке теоремы. Асимптотическую локализацию квазисобственных значений и функций в окрестности соответствующих собственных значений и функций можно понимать как эффект волновода для исследуемой структуры. Однако целесообразно изучить возможность и условия существования собственных значений и функций задачи (3.2)—(3.4), так как они описывают эффект волновода в чистом виде.

Пусть Ω_2 — связная область, тогда Ω_1 моделирует периодическую цепочку впадин, если $h_1 > h_2$, или цепочку подводных плато, если $h_2 > h_1$. Имеет место

Теорема 3.2. Когда область Ω_1 моделирует цепочку подводных гор или подводных впадин, задача (3.2)—(3.4) имеет только вещественные собственные значения.

Доказательство. От противного. Возможны два случая: 1) в условиях излучения (3.4) бесконечное число слагаемых не равны нулю, тогда доказательство аналогично доказательству теоремы 2.1 работы [4]; 2) в условиях излучения (3.4) только конечное число слагаемых не равны нулю. Пусть λ_* — комплексное квазисобственное значение, а $v_*(x, y, \lambda_*)$ — квазисобственная функция задачи. Пусть для $x \gg 1$ имеет место

$$(3.5) \quad v_*(x, y, \lambda_*) = v_2(x, y, \lambda_*) = \sum_{n=-n_0}^{+n_0} a_n^+ \exp(iny + ix \sqrt{\lambda_*^2 - n^2}).$$

Функция $v_2(x, y, \lambda_*)$ вида (3.5) может быть определена для всех чисел x, y , $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, и $v_2(x, y, \lambda_*)$ есть решение уравнения Гельмгольца для всех x, y . Поэтому можно найти функцию $w = v_* - v_2$, которая удовлетворяет уравнению Гельмгольца для всех x, y вне границы Γ ($(x, y) \notin \Gamma$) и тождественно равна нулю для достаточно больших x ($x \gg 1$). Отсюда в силу теоремы Хольмгрена вытекает, что сужение функции $w(x, y, \lambda_*)$ на область Ω_2 тождественно равно нулю ($w|_{\Omega_2} \equiv 0$), так как Ω_2 — связная область, а это противоречит условиям излучения.

Пусть область Ω_1 состоит из N связных компонент в полосе $0 \leq y < 2\pi$ и, кроме того, предполагается периодичной вдоль оси y с периодом $2\pi/N$. Тогда справедлива

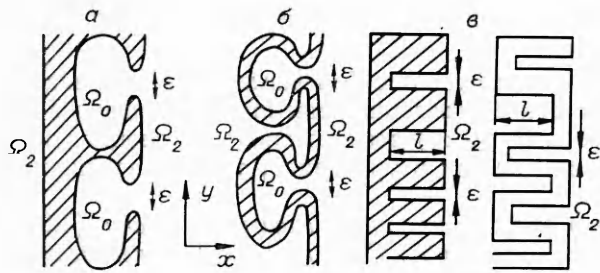
Теорема 3.3. Для одномерно-периодической цепочки гор может иметь место эффект волновода.

Доказательство. Пусть область Ω_1 периодична вдоль оси y с периодом $2\pi/N$ ($N > 1$). Решение задачи рассеяния (3.2)—(3.4) в том случае, когда источники удовлетворяют условию (2.6)

$$f(x, y + 2\pi/N) = f(x, y) \exp(i2\pi n/N)$$

для натурального числа n ($1 \leq n < N$), можно искать в классе функций, для которых справедливо (2.6).

Для квазисобственных значений задачи (3.2)—(3.4) в классе функций с условиями (2.6) теоремы 3.1 и 3.2 остаются справедливыми. Необходимо



Р и с. 4

нее, в одной из связных компонент области Ω_1 . Для большого h_2 найдутся такие квазисобственные значения λ_k^* , что $|\mu_k - \lambda_k^* \sqrt{h_2}| < \sqrt{h_2} \min\{n, N - n\} - |\mu_k|$. При этом достаточно исследовать такие μ_k , которые лежат в интервале $-\sqrt{h_2} \min\{n, N - n\} < \mu_k < \sqrt{h_2} \min\{n, N - n\}$ ($k = 1, 2, \dots, k_0$), и для соответствующих квазисобственных значений λ_k^* имеет место лемма 2.1. Отсюда вытекает то, что требовалось доказать.

З а м е ч а н и е 3.1. Число N одинаковых резонансных структур в полосе $0 \leq y < 2\pi$ может быть сколь угодно большим и число n , которое определяет сдвиг фазы колебаний в соседних подструктурах периодического препятствия Ω_1 , вообще говоря, произвольно, отсюда $\min\{n, N - n\}$ может быть сколь угодно большим. Поэтому, так как квазисобственные значения непрерывно зависят от параметров h_1 и h_2 , если $h_1 \neq h_2$, $h_1 > 0$, $h_2 > 0$ (выполнены требования [19]), условия леммы 2.1 выполнены для достаточно широкого выбора возможных h_1 и h_2 .

Для связной области Ω_2 можно показать, что для подводных препятствий специального вида (рис. 4) имеет место эффект волновода. Пусть структура подводного препятствия имеет вид, который определен размером периода $2\pi/N$ структуры и значением ϵ , характеризующим горло подводного резонатора. Справедлива

Теорема 3.4. Для достаточно больших h_2 и достаточно малых ϵ структуры (рис. 4, а—в) обладают эффектом волновода.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для достаточно больших h_2 (в этом случае Ω_1 моделирует подводный гребень) квазисобственные значения задачи (3.2)—(3.4) близки к квазисобственным значениям задачи Неймана в области Ω_2 , которые в свою очередь для достаточно малых ϵ близки к собственным значениям задачи Неймана в Ω_0 и соответствующим числам, описывающим собственные колебания в горле резонатора [4]. Поэтому для достаточно большого h_2 и малого ϵ для квазисобственных значений выполняются условия леммы 2.1. Следовательно, в этом случае структуры (рис. 4, а—в) обладают эффектом волновода, что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Reichardt H. Ausstrahlungsbedingungen für die Wellengleichung // Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar Universität.— Hamburg, 1960.— Bd 24.
2. Alber H. D. A quasi-periodic boundary value problem for Laplacian and continuation of its resolvent // Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A., Math.— 1979.— V. 82.
3. Сухинин С. В. Об акустических и электромагнитных колебаниях около периодической решетки // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1981.— Вып. 51.
4. Сухинин С. В. Качественные вопросы теории рассеяния на периодических цилиндрических препятствиях // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1984.— Вып. 67.
5. Сухинин С. В. Качественные вопросы теории рассеяния на периодических пронизываемых препятствиях // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1988.— Вып. 86.
6. Сухинин С. В. Обоснование модели колебаний газа, обтекающего решетку пластин // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1982.— Вып. 56.
7. Parker R. Resonance effects in wake, shedding from parallel plates: calculation of resonant frequencies // J. Sound and Vibr.— 1969.— V. 5, N 2.

8. Голдстейн М. Д. Аэроакустика.— М.: Машиностроение, 1981.
9. Сухинин С. В. Эоловы колебания около периодической решетки пластин // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1986.— Вып. 77.
10. Шестопалов В. П., Кириленко А. А., Масалов С. А., Сиренко Ю. А. Резонансное рассеяние волн. Т. 1. Дифракционные решетки.— Киев: Наук. думка, 1986.
11. Гарипов Р. М. Неустановившиеся волны над подводным хребтом // ДАН СССР.— 1965.— Т. 161, № 3.
12. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели.— М.: Наука, 1973.
13. Биченков Е. И., Гарипов Р. М. Распространение волн на поверхности тяжелой жидкости в бассейне с неровным дном // ПМТФ.— 1969.— № 2.
14. Налимов В. И., Плотников П. И. Нерегулярные задачи на собственные значения и эффект волновода // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1973.— Вып. 23.
15. Селезов И. Т., Яковлев В. В. Дифракция волн на симметричных неоднородностях.— Киев: Наук. думка, 1978.
16. Бабич В. М., Билый И. Я. О волноводных свойствах подводного горного хребта // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1979.— № 3.
17. Ламб Г. Гидродинамика.— М.; Л.: ОГИЗ, 1947.
18. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане.— М.: Мир, 1981.— Т. 1, 2.
19. Steinberg S. Meromorphic families of compact operators // Arch. Rat. Mech. Anal.— 1968.— V. 31, N 5.

Поступила 9/II 1988 г.,
в окончательном варианте — 5/III 1988 г.

УДК 532.516 : 536.24.01

ВОЗНИКНОВЕНИЕ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОЙ КОНВЕКЦИИ В ЖИДКОМ ЦИЛИНДРЕ, ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ И ПЛОСКОМ СЛОЯХ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННИХ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА

В. К. Андреев, А. А. Родионов, Е. А. Рябицкий

(Красноярск)

В условиях невесомости имеют место ситуации, когда не только внешние силы, но и силы самогравитации являются настолько слабыми, что не могут вызвать конвективного движения. Однако конвекция может возникнуть вследствие того, что коэффициент поверхностного натяжения зависит от температуры.

Изучению условий возникновения конвекции в жидкости при нагревании твердой или свободной поверхности посвящены работы [1—4]. В настоящей работе исследуется устойчивость равновесного состояния, которое возникает в жидком цилиндре, цилиндрическом и плоском слоях под действием постоянных внутренних источников тепла. Получены явные формулы для критических чисел Марангони. Показано, что учет деформации свободной поверхности приводит к понижению устойчивости и появлению разрыва нейтральной кривой. Кроме того, равновесное состояние плоского слоя более устойчиво, чем в аналогичной задаче Пирсона [1].

1. Жидкий цилиндр. Пусть внутри покоящегося жидкого цилиндра имеются постоянные внутренние источники тепла интенсивности q . Тогда равновесное состояние описывается формулами

$$(1.1) \quad u = v = w = 0, \quad p = \text{const}, \quad \Theta(r) = -qr^2/(4\chi) + \text{const}.$$

Здесь (u, v, w) — компоненты вектора скорости в цилиндрической системе координат (r, φ, z) ; p — давление; Θ — температура; $\chi = \text{const}$ — коэффициент температуропроводности жидкости.

Выберем в качестве характерных масштабов длины, скорости, давления и температуры величины b , ν/b , $\rho\nu^2/b^2$ и $\nu\gamma b/\chi$ (b — радиус цилиндра, ν — кинематическая вязкость, ρ — плотность жидкости, $\gamma = -\Theta_r(b) = qb/2\chi$). Уравнения малых возмущений произвольного термокапиллярно движения в цилиндрических координатах получены в [5]. Полагая эти возмущения зависящими от φ, z, t по закону $\exp[i(m\varphi + \alpha z - \alpha i Ct)]$, получим амплитудные уравнения для равновесного состояния (1.1):

$$(1.2) \quad \mu U + P' = \left[\frac{1}{\xi} (\xi U)' \right]' - \frac{2im}{\xi^2} V;$$