

$$+ \left(\int_0^t \exp[-\lambda_{kn}^+(t-\tau)] g_{kn}^m(\tau) d\tau \right) \mathbf{v}_{kn}^{m+},$$

$$\text{где } f_{kn}^m(t) = \langle \mathbf{F}_1, \mathbf{v}_{kn}^{m-} \rangle = \int_{\Omega} \int \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{v}_{kn}^{m-} d\Omega; \quad g_{kn}^m(t) = \\ = \langle \mathbf{F}_1, \mathbf{v}_{kn}^{m+} \rangle = \int_{\Omega} \int \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{v}_{kn}^{m+} d\Omega.$$

Из разложения (3.6) видно, что в случае потенциальных массовых сил через некоторое время после начала течения независимо от начального условия в нем будет преобладать низшая гармоника

$$\sum_{m=-1}^1 a_{11}^m \exp(-\lambda_{11}^- t) \mathbf{v}_{11}^{m-},$$

которая представляет собой дифференциальное вращение вокруг некоторой оси, пропорциональное азимутальной компоненте винтового вихря Хилла, описанного в [5], и затухающее пропорционально $\exp(-20,19\nu R^{-2}t)$.

Поступила 24 IV 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. И., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., Наука, 1972.
2. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. М., Высш. школа, 1970.
3. Быков В. М. Винтовые потоки в шаре.— ПМТФ, 1979, № 2.
4. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., Наука, 1970.
5. Ярмацкий А. Г. Об одном пространственном аналоге вихревого столба Чаплыгина (обобщенный вихрь Хилла).— ПМТФ, 1974, № 5.

УДК 532.5 : 532.135

О НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ, ВОЗНИКАЮЩЕМ ПРИ ПОДЖАТИИ СЛОЯ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ, ЗАКЛЮЧЕННОЙ МЕЖДУ ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛАСТИНАМИ

Ю. В. Казанков, В. Е. Первушин

(Москва)

При литье под давлением тонкостенных изделий расплав полимера впрыскивается в полость, образованную не полностью сомкнутыми полуформами. Следующим этапом является смыкание полуформ, в течение которого расплав растекается, заполняя оформляющую полость, и в конце этого процесса затвердевает.

В данной работе рассматривается задача о неизотермическом течении, возникающем в слое расплавленного полимера, заключенного между двумя параллельными пластинками (полуформами), которые сближаются

со скоростью v , направленной нормально плоскости пластин. Исследуется температурный режим охлаждения жидкости в зависимости от определяющих параметров задачи.

Предполагается, что жидкость является несжимаемой и подчиняется степенному реологическому закону, причем консистенция зависит от температуры T : $\mu = \mu(T)$.

Температура жидкости в начальный момент времени равна T_0 , температура стенок — T_w ($T_w \ll T_0$).

Насколько известно, подобная задача рассматривалась в работе [1]. Однако в целях упрощения решения авторы необоснованно отбросили конвективное слагаемое в уравнении теплового баланса.

Введем цилиндрическую систему координат, ось z которой направим перпендикулярно плоскости пластин, а начало координат поместим в центре нижней пластины (фиг. 1). Радиус слоя жидкости $R(t)$ является функцией времени t и находится из условия постоянства начального объема жидкости.

Принимая во внимание осевую симметрию, находим, что касательная составляющая скорости v_φ и производные от всех величин по φ равны нулю.

Сформулированной задаче при условии, что можно пренебречь массовыми силами и силами поверхностного натяжения, соответствует следующая система уравнений:

$$(1) \quad \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left[2\mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^n \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^n \right] + \frac{2}{r} \mu \left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^n - \left(\frac{v_r}{r} \right)^n \right];$$

$$(2) \quad \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^n \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left[2\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^n \right] + \frac{1}{r} \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^n;$$

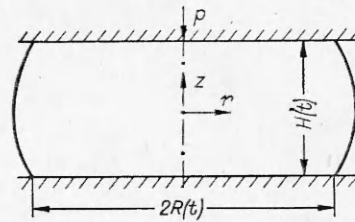
$$(3) \quad \frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = a \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right];$$

$$(4) \quad \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial (rv_z)}{\partial z} = 0,$$

где r — текущий радиус; v_r и v_z — соответственно радиальная и поперечная составляющие скорости; ρ — плотность жидкости; p — давление; n — показатель в степенном реологическом законе; a — коэффициент теплопроводности.

Решение системы (1)–(4) даже численными методами на ЭВМ сталкивается со значительными трудностями. Для упрощения системы (1)–(4) воспользуемся следующим приемом: подходящим выбором масштабов преобразуем эту систему к безразмерному виду так, чтобы порядок каждой переменной был равен единице [2]. При таком преобразовании влияние членов уравнения будет оцениваться безразмерным множителем, возникающим при переходе от системы (1)–(4) к системе, содержащей безразмерные переменные.

Введем масштабы: для радиальной координаты — $R(t)$; для поперечной координаты — $H(t)/2$, где $H(t)$ — расстояние между пластинами; для поперечной скорости — $v_0 = -H(0)f'(0)$, где $f(t) = H(t)/H(0)$; температуры — $(T_0 - T_w)$; времени — $\tau_0 = H(0)/2 v_0$.



Фиг. 1

Масштаб для радиальной составляющей скорости, который обозначим через v_1 , находится из уравнения неразрывности (4) и выражается через уже введенные масштабы скорости и длины в виде $v_1 = 2R(t)v_0/H(t)$.

В качестве характерного давления p_0 можно принять среднее давление на пластины для случая изотермического течения жидкости; эту величину можно оценить аналогично тому, как это сделано в работе [3], где рассматривается изотермическое течение, возникающее при поджатии слоя ньютоновской жидкости, заключенной между двумя параллельными пластинами.

При преобразовании уравнения теплопроводности следует учесть, что существуют различные масштабы времени, характерные для динамики развития течения жидкости и температурного поля. Если считать, что изменение температуры определяется в основном молекулярной теплопроводностью, то, заменяя производные в уравнении (3) (в котором отбрасываются конвективные слагаемые в левой части) отношением конечных приращений, находим масштаб времени, характерный для развития температурного поля: $\tau_1 = H^2(0)/4a$;

Переход от системы (1)–(4) к системе, содержащей безразмерные переменные, и произведенная после этого оценка порядка слагаемых с учетом того обстоятельства, что $H(t) \ll R(t)$ и $T_w \ll T_0$, приводят к существенным упрощениям. Опуская простые выкладки, приведем окончательный вид приближенной системы уравнений, переписав ее в новых безразмерных переменных:

$$(5) \quad \left(-\frac{dP}{d\eta}\right) f^n(\tau) = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\Psi(\Theta) \left(\frac{\partial V_\eta}{\partial \xi}\right)^n \right];$$

$$(6) \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \text{Pe} f(\tau) V_\xi \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2};$$

$$(7) \quad \frac{1}{\eta} \frac{\partial (\eta V_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial V_\xi}{\partial \xi} = 0,$$

где $\Theta = (T - T_w)/(T_0 - T_w)$; $\eta = 2r/H(t)$; $\xi = 2z/H(t)$; $V_\xi = v_z/v_0$, $V_\eta = v_r/v_0$; $P = p/P_1$, $P_1 = \mu(T_0)(2v_0/H(0))^n$; $\tau = \int_0^t 4adt_1/H^2(t_1)$; $\Psi(\Theta) = \mu(T)/\mu(T_0)$; $\text{Pe} = v_0H(0)/2a$ — критерий Пекле.

Система (5)–(7) решается при следующих начальных и краевых условиях:

$$(8) \quad V_\eta = 0, \quad V_\xi = \varphi(\tau), \quad \Theta = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0;$$

$$(9) \quad \partial V_\eta / \partial \xi = 0, \quad V_\xi = 0, \quad \partial \Theta / \partial \xi = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 1;$$

$$(10) \quad \Theta = 1 \quad (0 < \xi \leq 1), \quad \Theta = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0, \quad \tau = 0;$$

$$(11) \quad P = 0 \quad \text{при} \quad \eta = R_1(\tau),$$

где радиус слоя $R_1(\tau)$ находится из условия постоянства объема жидкости

$$R_1(\tau) = 2R(0)f^{-3/2}(\tau)/H(0), \quad \varphi(\tau) = f'(\tau)/f(0), \quad f(\tau) = H(\tau)/H(0).$$

После несложных преобразований решение системы (5)–(11) можно привести к решению нелинейного интегродифференциального уравнения типа теплопроводности.

Действительно, интегрируя уравнение (5) с учетом первого краевого условия (9), получим

$$\frac{\partial V_\eta}{\partial \xi} = \left(-\frac{dP}{d\eta}\right)^{1/n} f(\tau) [(1 - \xi) \Psi^{-1}(\Theta)]^{1/n}.$$

Интегрируя полученное равенство в пределах от 0 до ξ и учитывая первое краевое условие (8), находим выражение для радиальной скорости

$$(12) \quad V_{\eta} = (-dP/d\eta)^{1/n} f(\tau) \Phi(\tau, \xi),$$

где

$$\Phi(\tau, \xi) = \int_0^{\xi} [(1 - \xi_1) \Psi^{-1}(\Theta)]^{1/n} d\xi_1.$$

Из уравнения неразрывности (7), учитывая граничные условия (8), (9), имеем

$$(13) \quad \eta \varphi(\tau) d\eta = \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \int_0^1 \eta V_{\eta} d\xi \right) d\eta.$$

Интегрируя равенство (13) в пределах от 0 до η , получим

$$\varphi(\tau) \eta^2/2 = \int_0^{\eta} \eta V_{\eta} d\xi + \text{const.}$$

Полагая в этом равенстве $\eta = 0$, последовательно находим

$$\text{const} = 0,$$

$$(14) \quad \varphi(\tau) \eta^2/2 = \eta \left(-\frac{dP}{d\eta} \right)^{1/n} f(\tau) \int_0^1 \Phi(\tau, \xi) d\xi.$$

Введем функцию

$$\Phi_1(\tau) = \left\{ \int_0^1 \Phi(\tau, \xi) d\xi \right\}^{-n} = \left\{ \int_0^1 d\xi \int_0^{\xi} [(1 - \xi_1) \Psi^{-1}(\Theta)]^{1/n} d\xi_1 \right\}^{-n}$$

и перепишем равенство (14) в виде

$$(15) \quad \left(-\frac{dP}{d\eta} \right) = [\varphi(\tau)/f(\tau)]^n (\eta/2)^n \Phi_1(\tau).$$

Теперь можем в (12) исключить множитель $(-dP/d\eta)$

$$(16) \quad V_{\eta} = \varphi(\tau) \eta \Phi(\tau, \xi) / \left(2 \int_0^1 \Phi(\tau, \xi) d\xi \right).$$

Интегрируя уравнение для градиента давления (15) от η до $R_1(\tau)$, с учетом (11) получим

$$P(\eta, \tau) = \frac{1}{n+1} \left[\frac{\varphi(\tau)}{f(\tau)} \right]^n \frac{1}{\left(2 \int_0^1 \Phi(\tau, \xi) d\xi \right)^n} (R_1^{n+1}(\tau) - \eta^{n+1}),$$

откуда находится среднее давление на пластины

$$(17) \quad \langle P \rangle = 2 \int_0^{R_1(\tau)} P(\tau, \eta) d\eta / R_1^2(\tau) = \\ = \frac{1}{n+3} \left[\frac{\varphi(\tau)}{f(\tau)} \right]^n \left[\frac{2R_1(0)}{H(0)} \right]^{n+1} f^{-3(n+1)/2}(\tau) / \left(2 \int_0^1 \Phi(\tau, \xi) d\xi \right)^n.$$

Вновь обратимся к уравнению (7) и перепишем его, учитывая (16):

$$(18) \quad \frac{\partial V_{\xi}}{\partial \xi} = -\frac{1}{\eta} \frac{\partial(\eta V_{\eta})}{\partial \eta} = -\varphi(\tau) \Phi(\tau, \xi) \int_0^1 \Phi(\tau, \xi) d\xi.$$

Интегрируем равенство (18) в пределах от 1 до ξ . Учет второго граничного условия (9) позволяет получить явное выражение для поперечной составляющей скорости

$$V_{\xi} = \varphi(\tau) \int_{\xi}^1 \Phi(\tau, \xi) d\xi / \int_0^1 \Phi(\tau, \xi) d\xi.$$

Задача свелась к решению интегродифференциального уравнения

$$(19) \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \text{Re} f(\tau) \varphi(\tau) \left[\int_{\xi}^1 \Phi(\tau, \xi) d\xi / \int_0^1 \Phi(\tau, \xi) d\xi \right] \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2}$$

при следующих краевых и начальных условиях:

$$(20) \quad \Theta = 0 \text{ при } \xi = 0;$$

$$(21) \quad \partial \Theta / \partial \xi = 0 \text{ при } \xi = 1;$$

$$(22) \quad \Theta_{\tau} = 1 \text{ (} 0 < \xi \leq 1, \tau = 0 \text{), } \Theta = 0 \text{ при } \xi = 0.$$

При $\text{Re} = 0$ (т. е. при отсутствии конвекции тепла) система (19)–(22) допускает точное решение [4]. Система (19)–(22) аппроксимировалась шеститочечной неявной разностной схемой и решалась на ЭВМ численно.

Подобный метод ранее применялся для численного решения системы уравнений пограничного слоя в сжимаемом газе на продольно обтекаемой пластине [5].

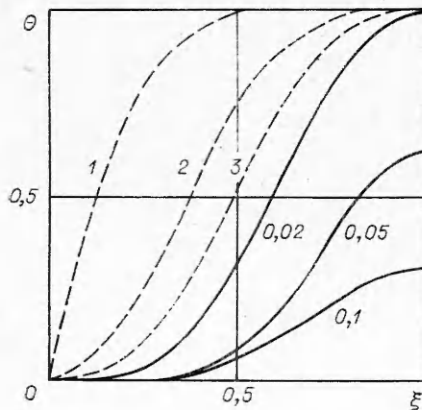
Во всех расчетах принималось, что зависимость величины, обратной консистенции жидкости, от температуры имеет вид

$$(23) \quad \Psi^{-1}(\Theta) = \begin{cases} 1/\exp [b/(\Theta - \Theta_1)], & \text{если } \Theta > \Theta_1, \\ 0, & \text{если } \Theta \leq \Theta_1, \end{cases}$$

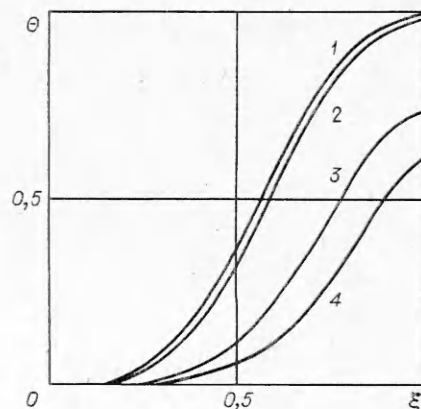
где b и Θ_1 — некоторые положительные константы, а скорость пластин постоянна, $\varphi(\tau) \equiv 1$; в этом случае, как нетрудно установить,

$$f(\tau) = 1/(1 + \text{Pe}\tau).$$

Фиг. 2 иллюстрирует развитие температурного поля во времени ($n = 0,33$; $b = 1,35$; $\Theta_1 = 0,2$). Параметром, указанным цифрами у сплош-



Фиг. 2



Фиг. 3

ных кривых, является безразмерное время (для всех кривых $Re = 40$). Штриховыми кривыми показано распределение температуры при фиксированном $\tau = 0,02$ и различных значениях критерия Пекле: 1 — $Pe = 0$; 2 — $Pe = 20$; 3 — $Pe = 30$.

Точность расчетов можно косвенно оценить, сравнивая кривую 1 с точным решением [4]. Сравнение обнаруживает их полное совпадение вплоть до третьей значащей цифры после запятой, т. е. в пределах погрешности разностной схемы (вычисления проводились с шагами $\Delta \xi = 0,01$; $\Delta \tau = 0,001$, а порядок аппроксимации разностной схемы — $o(\Delta \tau + \Delta \xi^2)$ [5]).

Распределение температуры жидкости в зависимости от параметров n и b иллюстрирует фиг. 3 ($Re = 40$; $\Theta_1 = 0,2$): 1 — $\tau = 0,02$, $b = 1,35$, $n = 1$; 2 — $\tau = 0,02$, $b = 1,35$, $n = 0,5$; 3 — $\tau = 0,04$, $n = 0,33$, $b = 1,35$; 4 — $\tau = 0,04$, $n = 0,33$, $b = 0,5$.

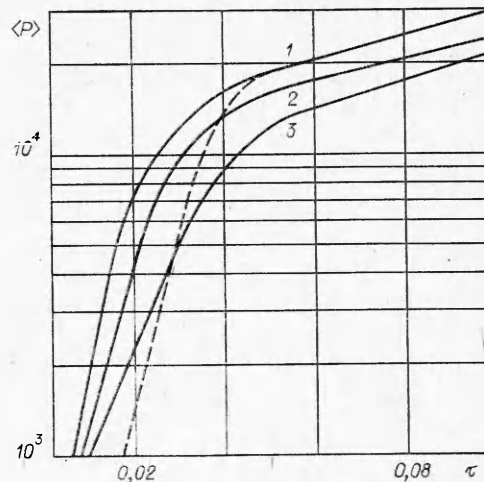
Наглядное представление о наиболее характерных особенностях изменения среднего давления на пластины дает фиг. 4, где сплошным линиям соответствуют фиксированные значения параметров: $n = 0,33$, $b = 1,35$, $\Theta_1 = 0,2$, $\beta = 2R_1(0)/H(0) = 50$. Параметром кривых является значение критерия Пекле: 1 — $Pe = 40$; 2 — $Pe = 30$; 3 — $Pe = 20$. Штриховой кривой показано изменение среднего давления на пластины при $b = 0,5$ (остальные параметры имеют те же значения, что и для кривой 1).

Как и следовало ожидать, при $\tau \rightarrow \infty$ независимо от показателя b при экспоненте в формуле (23) кривые $\langle P \rangle = F(\tau)$ должны иметь одну и ту же асимптоту, и, следовательно, различия между ними (при фиксированном значении Pe), начиная с некоторого τ , становятся незначительными.

Поступила 29 III 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлов С. З., Казанков Ю. В., Малинин А. А., Салазкин К. А. Заполнение литьевой формы в режиме инжекционного прессования. — Труды МИХМ, 1974, вып. 54.
2. Клайн Д. Подобие и приближенные методы. М., Мир, 1968.
3. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений. М.—Л., ГИТТЛ, 1951.
4. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М., Высш. школа, 1967.
5. Брайловская И. Ю., Чудов Л. А. Решение уравнений пограничного слоя разностным методом. — В кн.: Вычислительные методы и программирование. М., изд. Моск. ун-та, 1962.



Фиг. 4