

В исследованном диапазоне начальных условий выявлено наличие в интервале  $60-75^\circ$  значения угла встречи, при котором качественно меняется механизм взаимодействия, при меньших значениях угла характеризующийся наличием стадии, когда контакт ударника с преградой отсутствует еще до полного завершения процесса.

Авторы выражают благодарность В. Г. Дулову за внимание к работе и ее обсуждение.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Титов В. М., Фадеев Ю. И. Сквозное пробивание при метеоритном ударе. — Космич. исслед., 1972, т. 10, вып. 4.
2. Дулов В. Г., Бордюг В. А. и др. К вопросу оптимизации пространственных ударников. — В кн.: Материалы VII Всесоюз. конф. «Численные методы решения задач теории упругости и пластичности». Новосибирск, 1982.
3. Уткин А. В., Дремин А. Н. и др. Особенности волнообразования при больших углах соударения металлических пластин. — ФГВ, 1982, № 2.
4. Хорев И. Е., Горельский В. А. и др. Исследование деформирования и кинетики разрушения контактирующих тел при несимметричном динамическом взаимодействии. — ФГВ, 1983, № 5.
5. Johnson G. R. High velocity impact calculations in three dimensions. — J. Appl. Mech., 1977, v. 44, № 1.
6. Хорев И. Е., Горельский В. А. Численное моделирование откольных разрушений при осесимметричном взаимодействии твердых тел. — В кн.: Детонация. Материалы II Всесоюз. совещ. по детонации. Черноголовка, 1981, вып. 2.
7. Хорев И. Е., Горельский В. А. Осесимметричный откол в задачах широкогодиапазонного взаимодействия твердых тел. — ДАН СССР, 1983, т. 274, № 3.
8. Григорян С. С. Об основных представлениях динамики грунтов. — ПММ, 1960, т. 24, вып. 6.
9. Оден Дж. Конечные элементы в механике сплошной среды. М.: Мир, 1976.
10. Уилкинс М. Л. Расчет упругопластических течений. — В кн.: Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967.

Поступила 17/IV 1984 г.

УДК 534.1

### АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

В. П. Ястребов  
(Ленинград)

Закономерности распространения одномерных продольных волн в нелинейных средах описаны в [1—5]. Отмечено [1, 2] существенное влияние вида зависимости между напряжением и деформацией в материале на характер волнового процесса и возможность возникновения разрывных решений (ударной волны). Автомодельные движения при весьма общем виде зависимости напряжение — деформация исследовались в [3] при задании на границе среды мгновенно приложенного постоянного напряжения. Некоторые автомодельные задачи изучались в [6], однако там имеются неточности.

В данной работе указываются условия, при которых задачи о распространении волн будут автомодельными. Такие условия обеспечиваются заданием степенной зависимости между напряжением и деформацией в материале и степенным законом изменения с течением времени величин, определяющих граничные условия. Найдены соответствующие решения. При отыскании решений широко используется метод характеристик. Комбинация этого метода с автомодельным представлением решения позволяет записать его в удобной форме. В случае разрывных решений применение метода характеристик встречает трудности. Поэтому приходится использовать традиционные методы, основанные на свойствах автомодельных задач. Это позволило получить новые результаты и дать оценку некоторых допущений, закладываемых при применении метода характеристик.

1. Рассмотрим вопрос об условиях, при которых решение автомодельное. Одномерная среда трактуется как однородный прямолинейный стержень постоянного сечения единичной площади. Пусть  $u$  — перемещение частиц стержня вдоль его оси,  $p$  — напряжение в поперечном сечении,

$x$  — координата, отсчитываемая вправо по длине стержня от его левого торца, совмещенного с началом координат,  $t$  — время,  $\varepsilon = \partial u / \partial x$  — деформация,  $\rho$  — плотность материала. Растягивающие напряжения считаются положительными. Напряжение и деформация связаны зависимостью

$$(1.1) \quad p = Ef(\varepsilon),$$

где  $E$  — константа, имеющая размерность напряжения;  $f(\varepsilon)$  — безразмерная функция от  $\varepsilon$ . Деформированное состояние стержня описывается уравнением [1]

$$(1.2) \quad \partial^2 u / \partial t^2 = a^2(\varepsilon) \partial^2 u / \partial x^2, \quad a^2(\varepsilon) = E\rho^{-1} df/d\varepsilon.$$

Решение задачи в случае автомодельного движения ищется в виде [7—9]

$$(1.3) \quad u = u_* t^\alpha \varphi(\xi);$$

$$(1.4) \quad p = p_* t^\delta \psi(\xi),$$

где  $\varphi(\xi)$ ,  $\psi(\xi)$  — безразмерные функции безразмерной переменной

$$(1.5) \quad \xi = x/(bt^\beta);$$

$\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  — неизвестные пока показатели степени;  $u_*$ ,  $p_*$ ,  $b$  — размерные константы. Подстановка (1.3) в (1.2) с учетом (1.5) дает

$$(1.6) \quad E\rho^{-1} b^{-2} t^{-2\beta+2} (df/d\varepsilon) \varphi'' = \beta^2 \xi^2 \varphi'' - \beta(2\alpha - \beta - 1) \xi \varphi' + \alpha(\alpha - 1) \varphi.$$

Здесь штрихами обозначено дифференцирование по переменной  $\xi$ . Производная  $df/d\varepsilon$  является функцией деформации  $\varepsilon$ , которая в свою очередь определяется формулой

$$(1.7) \quad \varepsilon = \partial u / \partial x = u_* b^{-1} t^{\alpha-\beta} \varphi'.$$

Для возможности существования автомодельного решения при произвольном виде функции  $f(\varepsilon)$  необходимо, чтобы время явно не входило в (1.6) и (1.7). Это условие выполняется, когда показатели степени при  $t$  в (1.6) и (1.7) равны нулю. Отсюда получается  $\alpha = \beta = 1$ .

Если (1.7) не зависит явно от времени, то, согласно (1.1), напряжение также не должно явно зависеть от  $t$ . В этом случае  $\delta$  равно нулю в (1.4), а на торце стержня ( $\xi = 0$ ) имеем  $p = p_* \psi(0) = \text{const}$ . Таким образом, при произвольной зависимости между  $p$  и  $\varepsilon$  автомодельное решение может быть получено при задании на торце стержня постоянного (мгновенно приложенного) напряжения или деформации [3].

Дальнейшее расширение класса автомодельных движений возможно путем задания такого вида зависимости (1.1), которая позволила бы вывести время из производной  $df/d\varepsilon$  в (1.6) при подстановке в нее (1.7). Для этого достаточно принять степенную зависимость

$$(1.8) \quad p = Ef(\varepsilon), \quad f(\varepsilon) = |\varepsilon|^\mu \text{sign } \varepsilon, \quad \mu > 0,$$

где  $\mu$  — задаваемый показатель степени. Подставляя новое значение  $df/d\varepsilon$  в (1.6) с учетом (1.7) и приравнявая нулю показатель степени при  $t$ , получаем уравнение для  $\alpha$  и  $\beta$

$$(1.9) \quad (1 - \mu)\alpha + (1 + \mu)\beta = 2.$$

Подстановка (1.4) и (1.7) в (1.8) дает

$$(1.10) \quad \psi = (E/p_*) (u_*/b)^\mu t^{(\alpha-\beta)\mu-\delta} |\varphi'|^\mu \text{sign } \varphi',$$

откуда следует

$$(1.11) \quad (\alpha - \beta)\mu - \delta = 0.$$

Третье уравнение, связывающее показатели степени  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$ , получается из рассмотрения граничных условий. Полагаем, что к стержню на левом торце при  $x = 0$  приложено сжимающее напряжение, а вправо он простирается неограниченно (для стержня конечной длины автомодельность,

как правило, нарушается [10]). Структура выражения (1.4) говорит о том, что напряжение в торцевом сечении ( $\xi = 0$ ) должно изменяться по степенному закону

$$(1.12) \quad p = -p_0 t^\lambda, \quad \lambda \geq 0,$$

где  $p_0$  и  $\lambda$  — задаваемые константы. Приравняв (1.4) и (1.12) при  $\xi = 0$ , получим

$$(1.13) \quad \delta = \lambda, \quad \psi(0) = -p_0/p_*.$$

Решая совместно (1.9), (1.11) и первое равенство (1.13), находим

$$(1.14) \quad \alpha = 1 + [\lambda(\mu + 1)/(2\mu)], \quad \beta = 1 + [\lambda(\mu - 1)/(2\mu)], \quad \delta = \lambda.$$

Константы  $u_*$ ,  $p_*$ ,  $b$  должны быть выражены через определяющие параметры задачи  $E$ ,  $\rho$ ,  $p_0$ . Используя анализ размерностей величин [7], можно образовать следующие комбинации:

$$(1.15) \quad b = (E/\rho)^{1/2} (E/p_0^*)^{(1-\mu)/(2\mu)};$$

$$(1.16) \quad u_* = (E/\rho)^{1/2} (p_0/E)^{(\mu+1)/(2\mu)};$$

$$(1.17) \quad p_* = p_0.$$

Подставляя эти значения в (1.6) и (1.10), имеем уравнения

$$(1.18) \quad [\beta^2 \xi^2 - \mu |\varphi'|^{\mu-1}] \varphi'' - \beta(2\alpha - \beta - 1) \xi \varphi' + \alpha(\alpha - 1) \varphi = 0;$$

$$(1.19) \quad \psi = |\varphi'|^\mu \operatorname{sign} \varphi'.$$

Второе равенство (1.13) и уравнения (1.17), (1.19) дают граничное условие при  $\xi = 0$

$$(1.20) \quad \psi(0) = \varphi'(0) = -1.$$

Полученные дифференциальные уравнения позволяют решить поставленную задачу. Однако во многих случаях методы, основанные на использовании характеристик уравнений гиперболического типа, дают возможность проще прийти к результату, поэтому ниже они широко применяются. Исключение составляют важные случаи разрывных решений, для которых приходится обращаться к непосредственному интегрированию уравнений (1.18) и (1.19).

Для разрывных решений необходимо также учитывать условия, вытекающие из общих теорем механики. Подготовим эти условия. Согласно теореме об изменении количества движения механической системы, количество движения, приобретенное стержнем, должно быть равно импульсу внешнего давления (1.12), действовавшего на левый торец стержня за рассматриваемый промежуток времени. На основании теоремы об изменении энергии сумма кинетической и потенциальной энергий стержня равна работе давления (1.12), приложенного к торцу стержня [11]. Математическая запись условий, вытекающих из этих двух теорем, после подстановки в них выражений (1.3), (1.12) с использованием (1.14) — (1.17) приобретает вид

$$(1.21) \quad \int_0^\xi (\alpha \varphi - \beta \xi \varphi') d\xi = 1/(\lambda + 1);$$

$$(1.22) \quad \int_0^\xi [0,5 (\alpha \varphi - \beta \xi \varphi')^2 + (\mu + 1)^{-1} |\varphi'|^{\mu+1}] d\xi = \alpha \varphi(0)/(\alpha + \lambda),$$

где  $\varphi(0)$  — значение функции  $\varphi(\xi)$  при  $\xi = 0$ , а верхний предел интегрирования соответствует протяженности стержня, охваченной деформациями.

2. Рассмотрим волновое движение в стержне под действием напряжения (1.12), полагая, что при  $t = 0$  он находился в покое. Ограничимся в этом разделе рассмотрением случая  $\lambda \neq 0$ , соответствующего монотон-

ному возрастанию напряжений на торце стержня. Предварительно вводятся новые безразмерные переменные

$$x_* = x/L, \quad \tau = t/T, \quad U_* = u/L, \quad V = vT/L,$$

где  $L, T$  — величины, имеющие размерности длины и времени:

$$(2.1) \quad L = (E/\rho)^{1/2}(E/p_0)^{1/\lambda}, \quad T = (E/p_0)^{1/\lambda},$$

$v$  — скорость частиц стержня,  $v = \partial u/\partial t$ .

Уравнение (1.2) в новых переменных принимает вид

$$(2.2) \quad \partial^2 U/\partial \tau^2 = a_*^2(\varepsilon) \partial^2 U/\partial x_*^2, \quad a_*^2(\varepsilon) = df/d\varepsilon.$$

Можно получить также соотношения

$$(2.3) \quad \xi = x_*/\tau^\beta, \quad U = \tau^\beta \varphi(\xi), \quad p/E = \tau^\delta \psi(\xi), \quad \varepsilon = \partial U/\partial x_*;$$

$$(2.4) \quad V = \partial U/\partial \tau = \tau^{\alpha-1}(\alpha\varphi - \beta\xi\varphi').$$

Граничное условие (1.12) запишем в форме  $p_0/E = -\tau_0^\lambda$  или, согласно (1.8), выразим через деформацию

$$(2.5) \quad \varepsilon_0 = -\tau_0^{\lambda/\mu},$$

где индексом 0 помечены значение  $\varepsilon$  при  $x = 0$  и переменная  $\tau$  («безразмерное время»), когда она входит в граничное условие при  $x = 0$ .

Рассмотрим характеристики дифференциального уравнения (2.2) [1, 4, 5, 12]. В плоскости с координатными осями  $x_*$  и  $\tau$  могут быть построены два семейства характеристик, определяемых уравнениями

$$(2.6) \quad d\tau/dx_* = \pm 1/a_*(\varepsilon).$$

На характеристиках выполняются условия

$$(2.7) \quad V = \int_0^\varepsilon a_*(\varepsilon) d\varepsilon + C_1, \quad V = -\int_0^\varepsilon a_*(\varepsilon) d\varepsilon + C_2.$$

В этих формулах знак плюс и минус присвоены характеристикам положительного и отрицательного наклонов. Константы  $C_1$  и  $C_2$  соответствуют двум указанным семействам характеристик и имеют свои значения на каждой характеристике.

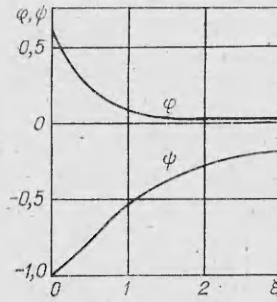
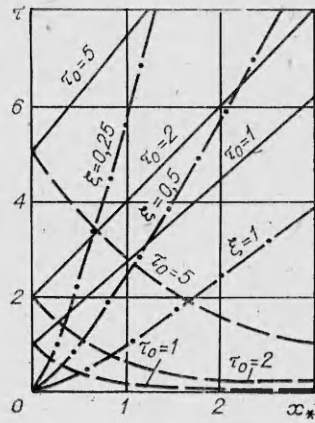
В дальнейшем наряду с переменной  $\tau$  будет использоваться переменная

$$(2.8) \quad \theta = \tau/\tau_0.$$

Как отмечалось,  $\tau_0$  соответствует значению  $\tau$  при  $x = 0$ . Эту величину можно рассматривать как параметр, помечающий ту или иную характеристику, берущую начало на оси  $O\tau$  при соответствующем значении  $\tau_0$ . На фиг. 1 (для  $\mu < 1$ ) показаны сплошными и штриховыми линиями характеристики положительного и отрицательного наклонов, отмеченные значениями  $\tau_0$ . Штрихпунктирными линиями нанесены графики зависимостей между  $x_*$  и  $\tau$  для некоторых значений  $\xi = \text{const}$ . При рассмотрении конкретной характеристики ( $\tau_0 = \text{const}$ ) видно, что каждой ее точке соответствуют наряду со значениями  $x_*$  и  $\tau$  определенные значения величин  $\xi$  и  $\theta$ , которые могут быть выбраны в качестве новых переменных для описания уравнений характеристик.

Вид решения задачи о распространении волн напряжений существенным образом зависит от (1.8). Графическое изображение ее в координатных осях  $\varepsilon, f(\varepsilon)$  может давать выпуклость или вогнутость по отношению к оси  $\varepsilon$ , что определяется знаком производной  $d^2f/d\varepsilon^2$  или значением  $\mu$  в (1.8) ( $\mu$  меньше или больше единицы) [1, 2, 4, 5].

Рассмотрим вначале случай  $\mu < 1$ . Характеристики положительного наклона образуют в этом случае в координатной плоскости  $x_*O\tau$  (см. фиг. 1) пучок расходящихся линий. Характеристики отрицательного наклона для принятой зависимости (1.8) будут асимптотически стремиться к



Ф и г. 2

Ф и г. 1

оси  $Ox_*$ . На оси абсцисс ( $\tau = 0$ ) в силу нулевых начальных условий имеют место  $\varepsilon = 0$  и  $V = 0$ , и поэтому для всех характеристик отрицательного наклона постоянная  $C_2$  во втором равенстве (2.7) равна нулю, т. е.

$$(2.9) \quad V = - \int_0^{\varepsilon} a_*(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Это равенство должно выполняться на всей плоскости переменных  $x_*$ ,  $\tau$ , в том числе и на всех характеристиках положительного наклона. Для того чтобы (2.9) было совместимо с первым равенством (2.7), дающим условие на этих характеристиках, необходимо считать

$$C_1 = - 2 \int_0^{\varepsilon} a_*(\varepsilon) d\varepsilon = \text{const},$$

что может быть выполнено только в том случае, если  $\varepsilon$  и соответственно  $V$  постоянны на каждой положительной характеристике [1, 4, 5].

Интегрируем уравнение характеристики положительного наклона (2.6), учитывая, что  $\varepsilon$  на ней постоянно и равно  $\varepsilon_0$  (2.5), т. е. значению при  $x_* = 0$ :

$$(2.10) \quad \tau - \tau_0 = x_*/a_*(\varepsilon_0).$$

Дальнейшие преобразования, в которых последовательно используются второе выражение (2.2), формулы (1.8), (2.5), (1.14), (2.8), дают из (2.10)

$$(2.11) \quad \theta - 1 = \xi \theta^{\beta} / \sqrt{\mu}.$$

Поскольку вдоль характеристик положительного наклона деформация сохраняется неизменной, то остается постоянным также напряжение, которое в силу граничного условия (1.12) равно  $p/E = -\tau_0^{\lambda}$ . Приравняв это значение третьему равенству (2.3) с учетом (1.14), получаем формулу, определяющую искомое решение (1.4):

$$(2.12) \quad \psi(\xi) = -1/\theta^{\lambda}.$$

При подсчете (2.12) необходимо продвигаться вдоль характеристики. Это эквивалентно тому, что величина  $\theta$  будет выражаться через  $\xi$  с помощью зависимости (2.11).

Выполнив интегрирование в (2.9), получим

$$V = - 2 \sqrt{\mu} (\mu + 1)^{-1} |\varepsilon|^{(\mu+1)/2} \text{sign } \varepsilon.$$

На каждой характеристике положительного направления входящие сюда величины остаются постоянными и равными их значениям при  $x_* = 0$  (2.5), что с учетом (1.14) дает

$$(2.13) \quad V = 2 \sqrt{\mu} (\mu + 1)^{-1} \tau_0^{\alpha-1}.$$

Для получения функции  $\varphi(\xi)$  значение (2.12) подставляется в (1.19) и производится интегрирование

$$(2.14) \quad \varphi(\xi) = - \int \theta^{-\lambda/\mu} d\xi = - \sqrt{\mu} \theta^{-\alpha} [\theta(1-\beta)(1-\alpha)^{-1} - \beta/\alpha] + C,$$

где  $C$  — произвольная постоянная интегрирования. При интегрировании переменная  $\xi$  была заменена переменной  $\theta$  с использованием формулы (2.11). Для нахождения  $C$  (2.14) подставляется в выражение (2.4), которое на каждой характеристике положительного наклона должно быть равно постоянному значению (2.13). Можно доказать, что для выполнения подобного равенства следует принять  $C = 0$ . С помощью (1.14) приведем (2.14) к виду

$$(2.15) \quad \varphi(\xi) = 2\sqrt{\mu}(\mu+1)^{-1}\alpha^{-1}\theta^{-\alpha}[1+0,5\alpha(1-\mu)(\theta-1)].$$

Здесь, как и в (2.12), переменная  $\theta$  должна рассматриваться в качестве функции  $\xi$ , определяемой равенством (2.11). При выполнении практических расчетов удобно находить зависимость функций  $\varphi(\xi)$  и  $\psi(\xi)$  от  $\theta$ , а затем определять соответствующие значения  $\xi$  из (2.11).

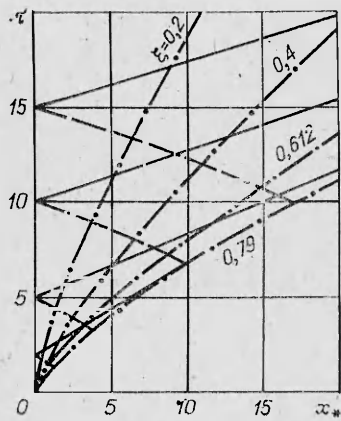
На фиг. 2 представлены графики величин  $\varphi(\xi)$  и  $\psi(\xi)$ , рассчитанных для  $\mu = 1/3$  и  $\lambda = 1/5$ . Соответствующие этому случаю характеристики построены на фиг. 1. Непосредственное численное интегрирование на ЭВМ дифференциальных уравнений (1.18), (1.19) дало результаты, полностью совпадающие с аналитическим расчетом. Условия (1.21), (1.22) выполняются.

Полученное решение дает мгновенное распространение возмущений по стержню. Это объясняется тем, что при плавном нарастании напряжений на торце стержня малым моментам времени соответствуют малые деформации. Для малых деформаций зависимость напряжение — деформация (1.8) имеет при  $\mu < 1$  большую производную  $df/d\varepsilon$ , от которой непосредственно зависит величина  $a_*(\varepsilon)$  (2.2), характеризующая скорость распространения возмущений. В пределе при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеет место  $a_*(\varepsilon) \rightarrow \infty$ , т. е. скорости возмущений бесконечно велики, однако их амплитуды при этом оказываются бесконечно малыми.

Обратимся к случаю  $\mu > 1$  ( $d^2f/d\varepsilon^2 > 0$ ). По-прежнему считаем  $\lambda \neq 0$ . Если двигаться вдоль оси  $O\tau$  координатной плоскости  $x_*O\tau$ , то, согласно (2.6), для  $\mu > 1$  угол наклона положительных характеристик на оси будет непрерывно уменьшаться. Характеристики образуют при этом сходящееся семейство линий. Это означает, что возмущения, возникшие на левом конце стержня ( $x = 0$ ) в более поздний период, будут догонять ранее распространившиеся возмущения, создавая условия для возникновения разрывного решения (ударной волны). На фиг. 3 для  $\mu > 1$  представлены характеристики положительного и отрицательного направлений соответственно сплошными и штриховыми линиями. Там же показаны штрихпунктирными линиями зависимости между  $x_*$  и  $\tau$  при некоторых постоянных значениях  $\xi$ .

Мысленно проведем перпендикулярно плоскости  $x_*O\tau$  третью координатную ось  $U$ , которая будет обозначать возвышение точек интегральной поверхности  $U(x_*, \tau)$  исходного дифференциального уравнения (2.2) над плоскостью  $x_*O\tau$ . На интегральной поверхности могут быть проведены характеристические линии, проекции которых на плоскость  $x_*O\tau$  дают рассматривавшиеся выше характеристики [12]. Бесконечно близкие друг другу характеристики положительного направления пересекаются в точках, образующих линию, являющуюся огибающей к семейству характеристик. Эта огибающая — проекция на плоскость  $x_*O\tau$  ребра возврата интегральной поверхности. Над частью плоскости  $x_*O\tau$ , расположенной между осью  $Ox_*$  и огибающей, интегральная поверхность отсутствует и возмущений нет. В окрестности ребра возврата производные от  $U(x_*, \tau)$  не могут быть непрерывными [12]. Огибающая характеристик или иная кривая, на которой происходит разрыв решения, может рассматриваться как граничная кривая для характеристик отрицательного наклона. На ней





Ф и г. 3

значения деформаций и скоростей заранее неизвестны, поэтому остается неопределенной величина произвольной постоянной  $C_2$  в условии на характеристике отрицательного наклона (2.7). В этом случае не проходит способ доказательства, использованный выше, для установления постоянства деформаций на характеристиках положительного наклона. Следовательно, нельзя утверждать, что эти характеристики будут обязательно прямыми линиями и на них окажется справедливой формула (2.9). Решение, в котором характеристики будут прямолинейными, следует рассматривать как одно из возможных.

Ввиду того, что правые части уравнений характеристик (2.6) остаются неопределенными, использование метода характеристик встречает трудности. Поэтому решение ищется численным интегрированием дифференциальных уравнений (1.18), (1.19). В процессе счета одновременно могут быть найдены характеристики. Для этого их уравнения (2.6) преобразуются следующим образом. Подставляется значение  $\varepsilon = \partial U / \partial x_* = \tau^{\alpha-\beta} \varphi'$ , а дифференциал  $dx_*$  выражается через дифференциалы  $d\xi$  и  $d\tau$  с помощью первого равенства (2.3). Получаются уравнения с разделяющимися переменными, которые после интегрирования и подчинения начальным условиям (при  $\xi = 0$   $\tau = \tau_0$  или  $\theta = 1$ ) дают в общем виде следующие уравнения характеристик:

$$\theta = \exp \left[ \pm \int_0^{\xi} d\xi / (V_{\mu} |\varphi'|^{(\mu-1)/2} \mp \xi \beta) \right].$$

Верхние знаки в этом выражении относятся к характеристикам положительного наклона, нижние — отрицательного наклона.

Уравнение (1.18) имеет особую точку  $\xi_1$ , в которой  $\varphi''$  стремится к бесконечности, а  $\varphi'$  имеет разрыв. Эта точка определяется обращением в нуль коэффициента при  $\varphi''$ , т. е. выполнением равенства

$$(2.16) \quad \beta \xi_1 = V_{\mu} |\varphi'(\xi_1)|^{(\mu-1)/2}.$$

Значение  $\xi_1$  соответствует положению огибающей характеристик, уравнение которой на плоскости  $x_* \tau$  имеет вид  $x_* = \xi_1 \tau^{\beta}$ . На фиг. 3 огибающая показана штрихпунктирной линией  $\xi = 0,79$ .

Интегрирование уравнения (1.18) осуществлялось численным методом на ЭВМ «МИР-2» и «Электроника-60М». Использовался метод прогонки от нулевого значения  $\xi$  (от левого конца), при котором известно лишь одно граничное условие (1.20). Другое условие  $\varphi(0)$  при  $\xi = 0$  задавалось произвольно и уточнялось по результатам прогонки к правому концу. Задавая множество значений  $\varphi(0)$  на левом конце, можно получить множество решений, имеющих разрыв производной в некоторых точках, среди которых должно быть выбрано одно физически допустимое [12]. Для выбора этого решения следует учитывать: естественное условие о равенстве нулю перемещения на фронте волны, которое с учетом (1.3) записывается в виде

$$(2.17) \quad \varphi(\xi_*) = 0$$

( $\xi_*$  — значение переменной  $\xi$  на фронте волны); теоремы об изменении количества движения (1.24) и изменения энергии (1.22); законы сохранения массы, количества движения, энергии непосредственно на фронте разрыва. Если считать, что стержень перед фронтом волны находился в покое, то закон сохранения массы и теорема изменения количества движения дают условие на фронте разрыва [4]  $p = -\rho D \partial u / \partial t$  ( $D$  — скорость

распространения фронта разрыва). Значение  $D$  можно определить из формулы (1.5), в которой величина  $\xi$  соответствует положению фронта  $\xi = \xi_*$ :

$$D = dx/dt = \xi_* b \beta t^{\beta-1}.$$

Используя это значение, а также (1.3), (1.4), (1.14) — (1.17), (1.19), (2.17), можно привести условие на фронте разрыва к виду

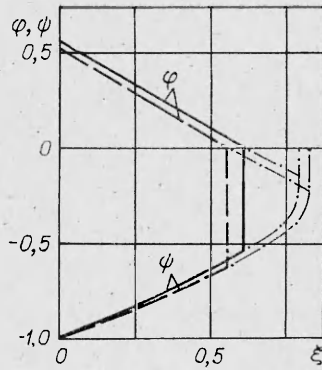
$$(2.18) \quad \beta \xi_* = |\varphi'(\xi_*)|^{(\mu-1)/2}.$$

При выполнении вычислений на ЭВМ одновременно с интегрированием уравнений (1.18), (1.19) рассчитывались уравнения характеристик и интегралы, входящие в (1.21) и (1.22), а также проверялось условие (2.18). Расчеты выполнялись для  $\mu = 3$ ,  $\lambda = 1$ . В первом варианте расчета было принято, что особая точка  $\xi_1$  уравнения (1.18), определяемая равенством (2.16), является в то же время точкой расположения фронта ударной волны. Поэтому условие равенства нулю перемещения (2.17) в этой точке принято за основу при выполнении числовых прогонов. Полученные результаты показывают, что теорема об изменении энергий выполняется с некоторой погрешностью (8,5%), а теорема об изменении количества движения и условие (2.18) не удовлетворяются. Более того, приобретенное стержнем количество движения оказывается больше, чем импульс приложенного к торцу давления, что противоречит физическому смыслу. Заметим, что равенство (2.18), сформулированное для фронта разрыва, вообще не может быть выполнено в особой точке  $\xi_1$ , положение которой определяется выражением (2.16), поскольку эти формулы отличаются множителем  $\sqrt{\mu}$ , делающим их несовместимыми в одной точке. Характеристики положительного направления для рассмотренного случая немного искривлены в плоскости переменных  $x_*$  и  $t$ . Таким образом, данный вариант решения нельзя считать физически допустимым.

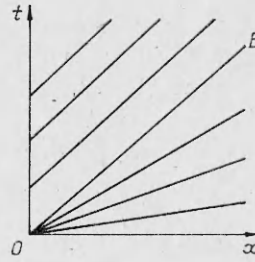
Во втором варианте положение фронта  $\xi_*$  не связывалось с особой точкой  $\xi_1$ , а определялось из условия, чтобы перемещение на фронте обратилось в нуль одновременно с выполнением теоремы об изменении количества движения (1.21). Расчеты показали, что фронт волны находится ближе к левому концу стержня, чем особая точка. Условие на фронте (2.18) при этом выполняется. Происходит потеря энергии, что отмечалось в [2,3]. Результаты расчетов величин  $\varphi(\xi)$  и  $\psi(\xi)$  представлены сплошными линиями на фиг. 4. Нереализуемая часть решения, лежащая между фронтом волны и особой точкой  $\xi_1$ , показана штрихпунктирными линиями. Фиг. 3 дает картину характеристик второго варианта расчета ( $\mu = 3$ ,  $\lambda = 1$ ). На ней штрихпунктирная линия при  $\xi = 0,612$  определяет положение фронта волны. Огибающая характеристик соответствует значению  $\xi = 0,79$ . Характеристики положительного наклона очень близки к прямым линиям. Полученное решение следует считать допустимым.

Рассмотрим вопрос о возможности построения решения для  $\mu > 1$  в предположении, что характеристики положительного направления являются прямыми линиями. Решение имеет такой же вид, как и при  $\mu < 1$  (2.11), (2.12), (2.15). Особая точка уравнения (1.18) в этом случае имеет значение  $\xi_1 = \sqrt{\mu}(\beta - 1)^{\beta-1}\beta^{-\beta}$ . Расчеты, произведенные для  $\mu = 3$ ,  $\lambda = 1$ , показывают, что условия (1.21), (2.17), (2.18) удовлетворяются при  $\xi = 0,687$ ;  $0,555$ ;  $0,621$ . Это означает, что они не могут быть выполнены одновременно при некотором фиксированном значении  $\xi_*$ , определяющем положение фронта разрыва. Поэтому решение, основанное на предположении о прямолинейности характеристик, может рассматриваться лишь как приближенное. На фиг. 4 штриховыми линиями показаны функции  $\varphi(\xi)$  и  $\psi(\xi)$  этого решения. Положение ударной волны условно отнесено к точке, где обращается в нуль перемещение (2.17). Перед фронтом волны до особой точки  $\xi_1$  лежит нереализуемая часть этого решения. Она приведена штрихпунктирными линиями. Результаты приближенного и точного решения оказываются близкими. Достаточно хорошее совпадение получено также для другого расчетного случая  $\mu = 3$ ,  $\lambda = 1,5$ .





Фиг. 4



Фиг. 5

3. Получим решение для мгновенно приложенного постоянного напряжения (1.12)  $\lambda = 0$ , исследованного в [1, 3, 5] для произвольной зависимости (1.1). При  $\lambda = 0$  формулы (2.1) теряют смысл, поэтому при рассмотрении характеристик используются исходные переменные  $x$  и  $t$ . Уравнения характеристик и условия на них, аналогичные (2.6), (2.7), запишутся в виде

$$(3.1) \quad dt/dx = \pm 1/a(\varepsilon), \quad v = \pm \int_0^{\varepsilon} a(\varepsilon) d\varepsilon + C_{1,2}.$$

Значению  $\lambda = 0$  соответствуют величины (1.14)  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\delta = 0$ , для которых (1.18) распадается на два уравнения:

$$\varphi'' = 0, \quad \xi^2 - \mu|\varphi'|^{\mu-1} = 0.$$

Их интегралы имеют вид

$$(3.2) \quad \varphi = A_1 + A_2\xi, \quad \varphi = +(\mu - 1)(\mu + 1)^{-1}\mu^{1/(1-\mu)}\xi^{(\mu+1)/(\mu-1)} + A_3,$$

где  $A_1, A_2, A_3$  — произвольные постоянные интегрирования.

Рассмотрим случай  $\mu < 1$ . Воспользуемся методом характеристик. Используя прием, аналогичный примененному в предыдущем разделе при  $\mu < 1$ , можно показать, что характеристики положительного наклона являются прямыми линиями, а деформации и скорости на них есть постоянные величины [1, 4, 5] и что во всей области переменных  $x$  и  $t$  вторые уравнения (3.1) преобразуются к виду

$$(3.3) \quad v = - \int_0^{\varepsilon} a(\varepsilon) d\varepsilon = -\sqrt{E/\rho} 2\sqrt{\mu}(\mu + 1)^{-1}|\varepsilon|^{(\mu+1)/2} \text{sign } \varepsilon.$$

При  $x = 0$  в силу граничного условия (1.12) для  $\lambda = 0$  и равенства (1.8) деформация равна постоянной величине

$$(3.4) \quad \varepsilon = \varepsilon_0 = -(p_0/E)^{1/\mu}.$$

Интегрируем уравнение характеристик положительного наклона (3.1), учитывая, что деформация на них постоянна и равна (3.4):

$$(3.5) \quad t - t_0 = x/a(\varepsilon_0).$$

Здесь  $t_0$  — значение времени, отнесенное к оси  $Ot$  плоскости  $xOt$  (фиг. 5). Характеристики параллельны друг другу, а в области, лежащей выше характеристики  $OB$ , повсюду деформации и напряжения одинаковы, т. е.  $p = -p_0 = \text{const}$ . Отсюда, используя (1.4) при  $\delta = 0$ , (1.17) и (1.19), имеем

$$(3.6) \quad \psi(\xi) = \varphi'(\xi) = -1.$$

В этой же области на основании (3.3), (3.4) и (1.16) можно получить

$$v = 2\sqrt{\mu}(\mu + 1)^{-1}\sqrt{E/\rho}(p_0/E)^{(\mu+1)/(2\mu)} = 2\sqrt{\mu}(\mu + 1)^{-1}u_* = \text{const}.$$

Приравняем этому значению производную от (1.3) ( $\alpha = \dot{\rho} = 1$ )

$$v = \partial u / \partial t = u_* [\varphi(\xi) - \xi \varphi'(\xi)].$$

С учетом (3.6) получается

$$(3.7) \quad \varphi(\xi) = 2\sqrt{\mu}(\mu + 1)^{-1} - \xi.$$

Предел применимости формул (3.6), (3.7) определяется положением характеристики  $OB$ . Ее уравнение следует из (3.5) при  $t_0 = 0$  и имеет вид  $x/t = a(\varepsilon_0)$ . С помощью (1.5) при  $\beta = 1$ , второй формулы (1.2) и (3.4) это выражение приводится к равенству  $\xi = \sqrt{\mu}$ , определяющему область действия упомянутых формул. В области, лежащей ниже прямой  $OB$ , характеристики выходят из начала координат в виде расходящихся линий [1, 4, 5]. На каждой характеристике деформация постоянна, однако меняется от одной характеристики к другой. Интегрируя первое уравнение (3.1) для этого случая, получаем

$$x/t = a(\varepsilon) = \sqrt{\mu} \sqrt{E/\rho} |\varepsilon|^{(\mu-1)/2}.$$

При дальнейших преобразованиях левая часть этого равенства выражается через  $\xi$  (1.5), а правая посредством формул (1.8), (1.4) — через  $\psi(\xi)$ . Решая получающееся равенство относительно  $\psi(\xi)$ , найдем

$$(3.8) \quad \psi(\xi) = -(\sqrt{\mu}/\xi)^{2\mu/(1-\mu)}, \quad \psi' = -(\sqrt{\mu}/\xi)^{2/(1-\mu)}.$$

Интегрируя второе равенство, имеем

$$(3.9) \quad \varphi(\xi) = (1 - \mu)(1 + \mu)^{-1} \mu^{1/(1-\mu)} \xi^{-(1+\mu)/(1-\mu)}.$$

Появляющаяся при интегрировании произвольная постоянная обращается в нуль, в чем можно убедиться, пользуясь свойством непрерывности функций (3.7) и (3.9) при переходе через точку  $\xi = \sqrt{\mu}$ , определяющую две области.

Таким образом, для  $\mu < 1$  решение определяется формулами (3.6), (3.7) при  $\xi \leq \sqrt{\mu}$  и (3.8), (3.9) при  $\xi \geq \sqrt{\mu}$ . Полученные выражения соответствуют формулам (3.2). Бесконечно малые возмущения распространяются мгновенно по длине стержня. Объяснение этого явления приведено выше.

При  $\mu > 1$  ( $\lambda = 0$ ) по стержню распространяется волна напряжений постоянной интенсивности [3], которой соответствует первая формула (3.2). Согласно (1.20),  $A_2 = -1$ , что дает  $\varphi'(\xi) = \psi(\xi) = -1$ . Для перемещения (1.3) имеем

$$(3.10) \quad u = u_* t (A_1 - \xi) = u_* b^{-1} (D_* t - x) \quad \text{при } x \leq D_* t, \quad u = 0 \quad \text{при } x > D_* t,$$

где  $D_* = A_1 b$  — скорость распространения фронта волны. Она не может быть определена из дифференциального уравнения, а находится на основании теоремы об изменении количества движения. Соответствующая формула, записанная для фронта волны [4]  $p_0 = \rho D_* v$ , после подстановки в нее значения  $v = \partial u / \partial t$ , вычисляемого по (3.10), дает  $D_* = \sqrt{E/\rho} \times (p_0/E)^{(\mu-1)/(2\mu)}$ . Пользуясь случаем, укажем на опisku, допущенную автором в [13]: в выражении для  $\tau_1$ , стоящем после формулы (4.3), вместо  $\sqrt{D_* t}$  должно быть  $\sqrt{D_* m}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматуллин Х. А., Демьянов Ю. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М.: Физматгиз, 1961.
2. Рахматуллин Х. А. О распространении плоских волн в упругой среде при нелинейной зависимости напряжения от деформации. — Учен. зап. МГУ, 1951, т. 3, вып. 152.
3. Баренблатт Г. И. О распространении мгновенных возмущений в среде с нелинейной зависимостью напряжений от деформаций. — ПММ, 1953, т. 17, вып. 4.

4. Повацкий В. К. Волновые задачи теории пластичности. М.: Мир, 1978.
5. Сагомонян А. Я. Волны напряжений в сплошных средах.— В кн.: Курс лекций. Ч. 2. М.: Изд-во МГУ, 1979.
6. Seshadri R., Singh M. C. Similarity analysis of wave propagation problems in non-linear rods.— *Archiwum mechaniki stosowanej*, 1980, v. 32, N 6.
7. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1972.
8. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
9. Баренблатт Г. И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеоиздат, 1978.
10. Ястребов В. П. Автомодельные задачи динамического изгиба балок.— ПМТФ, 1981, № 1.
11. Яблонский А. А. Курс теоретической механики. Ч. 2. М.: Высш. шк., 1977.
12. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
13. Ястребов В. П. Автомодельные задачи динамического изгиба бесконечных нелинейно-упругих балок.— ПМТФ, 1981, № 4.

Поступила 23/IV 1984 г.

УДК 539.3

## МОДУЛИ УПРУГОСТИ МАТЕРИАЛОВ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

А. М. Жуков

(Москва)

В последние годы усиленно развивается разномодульная теория упругости. Она предполагает материал однородным, но обладающим разными модулями упругости при чистом растяжении и сжатии в фиксированном направлении.

В [1] собраны значения модулей упругости на растяжение  $E_p$  и сжатие  $E_c$ , полученные экспериментально. Достоверность некоторых из них вызвала сомнения.

Для стеклопластиков КС-30 и АС-30, изготовленных на основе капроновой и андидной смол соответственно, различие в модулях при комнатной температуре достигает около 700% по отношению к наименьшему значению. В [2] (откуда взято это) описана методика и средства испытаний.

На растяжение испытаны образцы в виде двойной лопатки. Приборы для измерения деформаций не указаны. На сжатие испытаны образцы размером  $10 \times 10 \times 15$  мм при скорости взаимного смещения опорных плит 10 мм/мин, которую авторы [2] ошибочно называют скоростью деформирования.

Образцы на растяжение имеют переменное поперечное сечение. В них возникают не только переменные по длине растягивающие напряжения, но также поперечные и касательные напряжения. Все это, конечно, не учитывалось при обработке результатов испытаний.

За счет трения по торцам и обмятия опорных плит в образцах при сжатии возникло сложное напряженное состояние, неоднородное по объему. Определение этого состояния расчетным путем затруднительно, а пренебрегать им нельзя.

Рассматриваемые испытания и обработка их результатов выполнены некорректно, и, следовательно, получены недостоверные данные. Кстати, представленные на фиг. 1 в [2] кривые не имеют начальных линейных участков. Поэтому остается неясным, каким образом определялись модули упругости.

В [1] приведены модули упругости  $E_p$  и  $E_c$  полиметилметакрилата, заимствованные из [3]. Различие в модулях достигает 100% по отношению к наименьшему значению.

Усилия, действующие на образец, измерялись фотоэлектрооптическим динамометром, описанным в [4], где также отмечены его недостатки: нелинейность связи между фототоком и силой и необходимость частых градуировок для учета процессов утомляемости и старения фотоэлементов и изменений интенсивности источника света от опыта к опыту.

В [5] описана установка, на которой проводили испытания полиметилметакрилата. Согласно описанию, деформации измеряли по перемещению захватов как при сжатии, так и при растяжении. На сжатие испытаны образцы высотой 5 мм и диаметром 2,5 мм, а на растяжение — образцы, рабочая часть которых имела длину 15 мм и диаметр 2 мм. По поводу образцов на растяжение в [3] сделана оговорка: «...при таких размерах деформация рабочей части составляла 80% от деформаций всего образца».

Из-за того что деформации образцов измеряли по перемещению захватов, а усилия — по динамометру с нестабильными характеристиками, получены значения модулей упругости полиметилметакрилата, которые нельзя считать достоверными.

В [6] приведены данные испытаний капрона и фторопласта-4. Испытания проведены на прессе Гагарина. Деформации измерялись по перемещению захватов, т. е. некорректно. В результате получены неверные значения  $E_p$  и  $E_c$ .