УДК 517.958+532.51
DOI: 10.15372/PMTF202415472

ИМПУЛЬСНЫЕ УРАВНЕНИЯ КЕЛЬВИНА — ФОЙГТА ДИНАМИКИ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ

С. Н. Антонцев*, И. В. Кузнецов*,**, С. А. Саженков*,**

* Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия
** Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия
E-mails: antontsevsn@mail.ru, kuznetsov_i@hydro.nsc.ru, sazhenkovs@yandex.ru

Изучается многомерная начально-краевая задача для системы уравнений Кельвина — Фойгта для вязкоупругой жидкости с нелинейным конвективным слагаемым и линейным импульсным слагаемым — регулярным младшим членом, описывающим импульсные явления. Импульсное слагаемое зависит от целого положительного параметра n и при $n \to +\infty$ слабо сходится к выражению, включающему дельта-функцию Дирака, моделирующую импульсные явления в начальный момент времени. Доказывается, что при $n \to +\infty$ формируется ассоциированный с дельта-функцией Дирака инфинитезимальный начальный слой и семейство регулярных слабых решений начально-краевой задачи сходится к сильному решению двухмасштабной микро- и макроскопической модели.

Ключевые слова: импульсные уравнения в частных производных, жидкость Кельвина — Фойгта, конвекция, начальный слой

1. Постановка задачи. Изучается начально-краевая задача для системы уравнений Кельвина — Фойгта динамики несжимаемой однородной вязкоупругой жидкости при наличии импульсных явлений:

$$\begin{gathered}
\partial_t \boldsymbol{v}_n + \operatorname{div}_x(\boldsymbol{v}_n \otimes \boldsymbol{v}_n) = \operatorname{div}_x(\mu\,\nabla_x \boldsymbol{v}_n + \varkappa\,\nabla_x\,\partial_t \boldsymbol{v}_n) + a\varphi_n \boldsymbol{v}_n - \nabla_x \pi_n \quad \text{в} \quad Q_T,\\
\operatorname{div}_x \boldsymbol{v}_n = 0 \quad \text{в} \quad Q_T,\\
\boldsymbol{v}_n(\,\cdot\,, 0) = \boldsymbol{v}_0 \quad \text{на} \quad \Omega,\\
\boldsymbol{v}_n = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0, T).
\end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^d_x$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^2$; $d = 2;\ 3$ — размерность пространства положений материальных точек $\boldsymbol{x}$; t — время; $T = \mathrm{const} > 0$ — заданный фиксированный момент времени; $Q_T = \Omega \times (0, T)$ — пространственно-временной цилиндр; $\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{v}_n(\boldsymbol{x}, t)$ — искомое поле скоростей; $\pi_n = \pi_n(\boldsymbol{x}, t)$ — искомое распределение давления; μ, $\varkappa$ — заданные положительные коэффициенты кинематической вязкости и ретардации соответственно; a — коэффициент интенсивности импульса, который может быть как положительным, так и отрицательным. Начальное распределение поля скоростей $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x})$ и профиль импульсного воздействия $\varphi_n = \varphi_n(t)$ также являются заданными и удовлетворяют следующим условиям:

$$\boldsymbol{v}_0 \in W^{2,2}_0(\Omega)^d, \qquad \operatorname{div}_x \boldsymbol{v}_0 = 0 \quad \text{на} \quad \Omega, \tag{1.2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках проектов FWGG-2021-0010 и FZMW-2024-0003.

функция $\varphi_n = \varphi_n(t)$ определяется для каждого натурального $n \geqslant n_0 = [1/T] + 2$ формулой

$$\varphi_n(t) = n\Phi(nt), \quad t \in [0, T], \tag{1.3}$$

где $\Phi = \Phi(\vartheta)$ — заданная неотрицательная гладкая функция с носителем на отрезке $0 \leqslant \vartheta \leqslant 1$ и средним значением, равным единице:

$$\int\limits_0^1 \Phi(\vartheta)\, d\vartheta = 1. \tag{1.4}$$

Требования, наложенные на последовательность $\{\varphi_n\}|_{n\geqslant n_0}$, означают, что она аппроксимирует сосредоточенную в начальный момент времени дельта-функцию Дирака $\delta|_{t=0}$ в том смысле, что $\varphi_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \delta|_{t=0}$ слабо* в $\mathcal{M}(0,T)$. Здесь через $\mathcal{M}(0,T)$ обозначается пространство мер Радона, сопряженное с пространством $C[0,T]$. Справедливы соотношения

$$\int\limits_0^t \varphi_n(s)\, ds \leqslant 1 \quad \forall\, t \in [0,T], \qquad \int\limits_0^T \varphi_n(s)\, ds = 1. \tag{1.5}$$

Примером функции Φ является классическое сглаживающее ядро Фридрихса — так называемая функция-шапочка.

С математической точки зрения представляет интерес изучение поведения вязкоупругой жидкости Кельвина — Фойгта при наличии линейного импульсного источника $a\varphi_n\boldsymbol{v}_n$. Влияние наличия импульсного источника можно показать на двух примерах задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Задача Коши для линейного неоднородного уравнения, в котором импульсное слагаемое $a\varphi_n(t)$ не зависит от решения:

$$\frac{dg_n(t)}{dt} = a\varphi_n(t), \quad t > 0, \qquad g_n(0) = g^0. \tag{1.6}$$

Здесь $a \neq 0$, $g^0 \neq 0$ — заданные постоянные; функция $\varphi_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ имеет вид (1.3). Решением данной задачи является функция

$$g_n(t) = g^0 + a\int\limits_0^t \varphi_n(s)\, ds.$$

Переходя в последовательности $\{g_n\}$ к пределу при $n \to +\infty$, получаем

$$\lim_{n\to+\infty} g_n(t) = g(t) = g^0 + a, \qquad t > 0.$$

Очевидно, предельная функция g является решением задачи Коши

$$\frac{dg(t)}{dt} = 0, \quad t > 0, \qquad g(0) = g^0 + a. \tag{1.7}$$

Заметим, что наличие в правой части уравнения (1.6) функции φ_n в пределе при $n \to +\infty$ привело к возникновению в начальных данных дополнительного слагаемого (корректора), равного a, т. е. равного интенсивности мгновенного импульса, соответствующего мере $a\delta|_{t=0}$. Вводя обозначение $g(0-) = g^0$, формально это замечание можно записать в виде импульсного условия

$$g(0+) = g(0-) + a. \tag{1.8}$$

Заметим также, что предельную задачу (1.7) можно записать в эквивалентном (в смысле теории распределений) виде

$$\frac{dg(t)}{dt} = a\delta\big|_{t=0+}, \quad t > 0, \qquad g(0-) = g^0, \tag{1.9}$$

т. е. предельная задача совпадает с задачей (1.6), в которой выполнена замена g на g_n и последовательность $\{\varphi_n\}$ заменена на предельную меру $\delta|_{t=0+}$.

2. Задача Коши для линейного однородного уравнения, в правой части которого в качестве множителя содержится само неизвестное решение:

$$\frac{dh_n(t)}{dt} = a\varphi_n(t)h_n(t), \quad t > 0, \qquad h_n(0) = h^0 \tag{1.10}$$

($a \neq 0$, $h^0 \neq 0$ — заданные постоянные). Задача легко интегрируется, ее решение имеет вид

$$h_n(t) = h^0 \exp\Big(a\int\limits_0^t \varphi_n(s)\,ds\Big). \tag{1.11}$$

Проводя рассуждения, аналогичные использованным для первой задачи, выводим предельное соотношение $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n(t) = h(t) = h^0\,\mathrm{e}^a$ (при $t > 0$) и затем импульсное условие

$$h(0+) = h(0-) + (\mathrm{e}^a - 1)h^0. \tag{1.12}$$

Заметим, что предельная функция $h(t)$ служит решением задачи

$$\frac{dh(t)}{dt} = (\mathrm{e}^a - 1)h^0\delta\big|_{t=0+}, \quad t > 0, \qquad h(0-) = h^0, \tag{1.13}$$

которую следует понимать в смысле теории распределений.

Следует отметить два существенных различия предельных постановок первой и второй задач: 1) вторая задача (задача (1.10)) не сводится к предельной задаче (1.13) путем замены h_n на h и $\varphi_n(t)$ на $\delta_{t=0+}$; 2) во второй задаче корректор $(\mathrm{e}^a - 1)h^0$ в импульсном условии (1.12) зависит от интенсивности мгновенного импульса a нелинейно, несмотря на то что в уравнение (1.10) интенсивность a входит линейно.

Таким образом, во второй задаче в случае, когда импульсный источник зависит от решения, корректная аппроксимация немгновенного импульсного эффекта мгновенным импульсом не сводится к механической замене гладкой функции $\varphi_n(t)$ на дельта-функцию Дирака и линейная зависимость от интенсивности импульса a может порождать в пределе при $n \to +\infty$ нелинейные эффекты.

Импульсный член $a\varphi_n\boldsymbol{v}_n$ в первом уравнении (1.1) связан с дилатантными и псевдопластическими жидкостями [1–3]. Так как первые два уравнения системы (1.1) описывают только несжимаемые жидкости, то дилатантные и псевдопластические жидкости являются жидкостями, у которых при импульсных нагрузках существенно меняются вязкость и скорость. Ввиду этого в дилатантных жидкостях возникает абсорбция (гашение скорости), что соответствует отрицательному значению коэффициента a. В свою очередь, в псевдопластических жидкостях происходит резкое увеличение скорости, т. е. коэффициент a положителен. Импульсная модель (первые два уравнения (1.1)) может быть применена, например, к рыхлым средам, так как известно, что под действием импульсного нагружения проявляются гидродинамические свойства рыхлой среды. Действительно, при воздействии сейсмических ударных волн происходит разжижение некоторых грунтов, что приводит к обрушению зданий. Наконец, заметим, что наряду с псевдопластическими существуют дилатантные жидкости, вязкость которых возрастает при динамических нагрузках. К таким веществам относятся соединения на основе кевлара, которые используются, например, в бронежилетах и в сейсмостойких фундаментах [4]. Заметим, что уравнения Кельвина — Фойгта с нелинейным источником или абсорбцией, но без импульсного множителя φ_n были рассмотрены в работах [5, 6].

В данной работе результаты асимптотического анализа импульсных псевдопараболических уравнений [7, 8] применяются при решении задачи для системы импульсных уравнений Кельвина — Фойгта.

2. Разрешимость задачи (1.1) **при фиксированных** n**.** Решение задачи (1.1) понимается в слабом обобщенном смысле. Для того чтобы сформулировать соответствующее определение, введем следующие функциональные пространства, широко используемые в математической теории жидкости:

1) $\mathcal{V}(\Omega) = \{\boldsymbol{v} \in C_0^\infty(\Omega)^d\colon \operatorname{div}_x \boldsymbol{v} = 0\}$;

2) $\mathcal{H}(\Omega)$ — замыкание $\mathcal{V}(\Omega)$ по норме пространства $L^2(\Omega)^d$;

3) $\mathcal{V}^l(\Omega)$ — замыкание $\mathcal{V}(\Omega)$ по норме пространства $W^{l,2}(\Omega)^d$, $l = 1, 2$.

Заметим, что условие (1.2) можно записать в эквивалентном виде $\boldsymbol{v}_0 \in \mathcal{V}^2(\Omega)$.

Для каждого $n \geqslant n_0$ ($n \in \mathbb{N}$) определяем слабое решение задачи (1.1) следующим образом.

Определение 1. Вектор-функция $\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{v}_n(\boldsymbol{x}, t)$ называется регулярным слабым обобщенным решением задачи (1.1), если выполняются следующие условия:

1) условия регулярности

$$\boldsymbol{v}_n \in L^\infty(0, T; \mathcal{V}^2(\Omega)), \qquad \partial_t \boldsymbol{v}_n \in L^2(0, T; \mathcal{V}^1(\Omega));$$

2) интегральное равенство

$$\int\limits_{Q_T} (\partial_t \boldsymbol{v}_n \cdot \varphi + \operatorname{div}_x(\boldsymbol{v}_n \otimes \boldsymbol{v}_n) \cdot \varphi + \mu \nabla_x \boldsymbol{v}_n : \nabla_x \varphi + \varkappa \nabla_x \partial_t \boldsymbol{v}_n : \nabla_x \varphi)\, d\boldsymbol{x}\, dt =$$

$$= a \int\limits_0^T \varphi_n(t) \int\limits_\Omega \boldsymbol{v}_n \cdot \varphi \, d\boldsymbol{x}\, dt \qquad (2.1)$$

для всех возможных пробных вектор-функций $\varphi \in L^\infty(0, T; \mathcal{V}^2(\Omega))$, удовлетворяющих условию $\partial_t \varphi \in L^2(0, T; \mathcal{V}^1(\Omega))$;

3) начальное условие (третье уравнение (1.1)) в смысле сильного следа в $\mathcal{H}(\Omega)$, т. е.

$$\|\boldsymbol{v}_n(\,\cdot\,, t) - \boldsymbol{v}_0(\,\cdot\,)\|_{\mathcal{H}(\Omega)} \underset{t \to 0+}{\longrightarrow} 0. \qquad (2.2)$$

В случае $a = 0$, т. е. без учета импульсных явлений, задача (1.1) ранее исследовалась в работах [9–11]. Заметим, что полученный в [9] результат (однозначная глобальная (по времени) разрешимость) обобщается при каждом фиксированном $n \geqslant n_0$ ($n \in \mathbb{N}$) на случай $a \neq 0$. Сформулируем следующее предложение.

Предложение 1. При наложенных в п. **1** условиях на входные данные при каждом фиксированном n задача (1.1) имеет единственное регулярное слабое решение $\boldsymbol{v}_n$ в смысле определения 1.

Следует отметить, что регулярное слабое решение в смысле определения 1 в работе [9] называется сильным решением.

Доказательство существования решения проведено в [9] с помощью метода Галеркина. При этом построено множество энергетических оценок регулярного слабого решения (см. [9]).

Предложение 2. Семейство $\{\boldsymbol{v}_n\}|_{n=1,2,\ldots}$ регулярных слабых решений задачи (1.1) удовлетворяет оценкам

$$\|\boldsymbol{v}_n\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{V}^2(\Omega))} \leqslant C_0; \tag{2.3}$$

$$\|\partial_t \boldsymbol{v}_n\|_{L^1(0,T;\mathcal{H}(\Omega))} + \|\nabla_x \partial_t \boldsymbol{v}_n\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega)^{d\times d})} \leqslant C_1; \tag{2.4}$$

$$\|\partial_t \boldsymbol{v}_n\|^2_{L^2(0,T;\mathcal{H}(\Omega))} + \|\nabla_x \partial_t \boldsymbol{v}_n\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^{d\times d})} \leqslant C_2 T + C_3 \int\limits_0^T \varphi_n^2(t)\,dt, \tag{2.5}$$

в которых постоянные $C_0, \ldots, C_3$ не зависят от n.

Заметим, что оценки (2.3), (2.4) являются равномерными по n, а оценка (2.5) не является, поскольку $\displaystyle\int\limits_0^T \varphi_n^2(t)\,dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ в силу (1.3), (1.4).

3. Результаты исследования. Основные результаты исследования получены при предельном переходе $n \to +\infty$ в семействе регулярных слабых решений задачи (1.1) и формулируются в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполнены начальные и граничные условия задачи* (1.1) *и* $\{\boldsymbol{v}_n\}|_{n\geqslant n_0}$ *— семейство регулярных слабых решений задачи* (1.1) *в смысле определения* 1. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Семейство $\{\boldsymbol{v}_n\}|_{n\geqslant n_0}$ относительно компактно в $L^2(0,T;\mathcal{V}^1(\Omega))$ и относительно слабо* компактно в $L^\infty(0,T;\mathcal{V}^2(\Omega))$ при $n\to+\infty$: существуют подпоследовательность из $\{\boldsymbol{v}_n\}|_{n\geqslant n_0}$, обозначаемая через n, и предельная вектор-функция $\boldsymbol{v}\in L^\infty(0,T;\mathcal{V}^2(\Omega))$, такие что*

$$\boldsymbol{v}_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \boldsymbol{v} \quad \textit{сильно в } L^2(0,T;\mathcal{V}^1(\Omega)) \textit{ и слабо}^* \textit{ в } L^\infty(0,T;\mathcal{V}^2(\Omega)). \tag{3.1}$$

2. *Семейство ремасштабированных решений $\{\bar{\boldsymbol{v}}_n\}|_{n\geqslant n_0}$, $\bar{\boldsymbol{v}}_n$: $\Omega\times[0,1]\mapsto\mathbb{R}^d$, определяемых формулой*

$$\bar{\boldsymbol{v}}_n(\boldsymbol{x},\vartheta) \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{v}_n\Big(\boldsymbol{x},\frac{\vartheta}{n}\Big), \qquad \vartheta\in[0,1], \tag{3.2}$$

относительно компактно в $L^2(0,1;\mathcal{V}^1(\Omega))$ и относительно слабо* компактно в $L^\infty(0,1;\mathcal{V}^2(\Omega))$: существуют подпоследовательность из $\{\bar{\boldsymbol{v}}_n\}|_{n\geqslant n_0}$, обозначаемая через n, и предельная функция $\bar{\boldsymbol{v}}\in L^\infty(0,1;\mathcal{V}^2(\Omega))$, такие что

$$\bar{\boldsymbol{v}}_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \bar{\boldsymbol{v}} \quad \textit{сильно в } L^2(0,1;\mathcal{V}^1(\Omega)) \textit{ и слабо}^* \textit{ в } L^\infty(0,1;\mathcal{V}^2(\Omega)). \tag{3.3}$$

3. *Существует пара скалярных функций $\bar{\pi}$ и π, таких что пара предельных вектор-функций $\bar{\boldsymbol{v}}$ и $\boldsymbol{v}$ наряду с $\bar{\pi}$ и π является сильным решением двух следующих задач, решаемых последовательно.*

3.1. *Требуется найти пару функций $(\bar{\boldsymbol{v}},\bar{\pi})$, удовлетворяющих системе уравнений*

$$\partial_\vartheta\bar{\boldsymbol{v}} = \varkappa\,\Delta_x\partial_\vartheta\bar{\boldsymbol{v}} + a\Phi(\vartheta)\bar{\boldsymbol{v}} - \nabla_x\bar{\pi} \quad \textit{в} \quad \Omega\times(0,1); \tag{3.4}$$

$$\operatorname{div}_x\bar{\boldsymbol{v}} = 0 \quad \textit{в} \quad \Omega\times(0,1); \tag{3.5}$$

$$\bar{\boldsymbol{v}}(\,\cdot\,,0) = \boldsymbol{v}_0 \quad \textit{в} \quad \Omega; \tag{3.6}$$

$$\bar{\boldsymbol{v}} = 0 \quad \textit{на} \quad \partial\Omega\times(0,1). \tag{3.7}$$

3.2. *Требуется найти пару функций $(\boldsymbol{v}, \pi)$, удовлетворяющих системе уравнений*

$$\partial_t \boldsymbol{v} + \operatorname{div}_x(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}) = \mu\, \Delta_x \boldsymbol{v} + \varkappa\, \Delta_x \partial_t \boldsymbol{v} - \nabla_x \pi \quad \text{в} \quad Q_T; \tag{3.8}$$

$$\operatorname{div}_x \boldsymbol{v} = 0 \quad \text{в} \quad Q_T; \tag{3.9}$$

$$\boldsymbol{v}(\,\cdot\,, 0) = \bar{\boldsymbol{v}}(\,\cdot\,, 1) \quad \text{в} \quad \Omega; \tag{3.10}$$

$$\boldsymbol{v} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0, T), \tag{3.11}$$

где начальная вектор-функция $\boldsymbol{v}(\,\cdot\,, 0)$ *определяется из решения системы* (3.4)–(3.7) *в момент* $\vartheta = 1$.

Уравнения (3.4), (3.5) будем называть уравнениями инфинитезимального начального слоя. Уравнение (3.4) содержит функцию $\Phi(\vartheta)$ и поэтому включает полную информацию о профиле мгновенного импульсного воздействия. В силу рескейлинга $t = \vartheta/n$ (см. (3.2)) независимую переменную ϑ можно считать быстрой переменной времени, а пару $(\bar{\boldsymbol{v}}, \bar{\pi})$ — решением микроскопического (инфинитезимального) начального слоя, в то время как t — медленная переменная времени, а пара $(\boldsymbol{v}, \pi)$ — макроскопическое внешнее решение. Таким образом, уравнения (3.4)–(3.11) представляют собой двухмасштабную микро- и макроскопическую задачу. При этом условие (3.10) справедливо интерпретировать как межфазное условие для микроскопического начального слоя и макроскопического внешнего течения.

Следует отметить, что предельная постановка (3.4)–(3.11) имеет преимущество по сравнению с исходной с точки зрения построения аналитических (точных) решений и проведения численных экспериментов, а именно: уравнения (3.4), (3.8) имеют более простой вид по сравнению с первым уравнением в (1.1), что позволяет применять известные методики получения точных решений [12, 13]. В свою очередь, отсутствие в предельной постановке малого начального слоя $0 < t < 1/n$ позволяет избежать в численных расчетах применения тонких сеток и существенно уменьшить вычислительные затраты (см., например, [14, 15]).

Сильное решение задачи (3.4)–(3.11) понимается в следующем смысле.

Определение 2. Совокупность функций $(\bar{\boldsymbol{v}}, \bar{\pi}, \boldsymbol{v}, \pi)$ называется сильным решением задачи (3.4)–(3.11), если:

1) пара функций $(\bar{\boldsymbol{v}}, \bar{\pi})$ удовлетворяет следующим требованиям:

а) выполняются условия регулярности

$$\bar{\boldsymbol{v}} \in C([0,1]; \mathcal{H}(\Omega)) \cap L^\infty(0,1; \mathcal{V}^2(\Omega)),$$

$$\partial_\vartheta \bar{\boldsymbol{v}},\ \Delta_x \partial_\vartheta \bar{\boldsymbol{v}} \in L^\infty(0,1; \mathcal{H}(\Omega)), \qquad \nabla_x \bar{\pi} \in L^2(\Omega \times (0,1))^d;$$

б) уравнения (3.4), (3.5) выполняются почти всюду в $\Omega \times (0,1)$;

в) начальное условие (3.6) выполняется в смысле сильного следа в $\mathcal{H}(\Omega)$, т. е.

$$\|\bar{\boldsymbol{v}}(\,\cdot\,, \vartheta) - \boldsymbol{v}_0(\,\cdot\,)\|_{\mathcal{H}(\Omega)} \underset{\vartheta \to 0+}{\longrightarrow} 0;$$

2) пара функций $(\boldsymbol{v}, \pi)$ удовлетворяет следующим требованиям:

а) выполняются условия регулярности

$$\begin{gathered} \boldsymbol{v} \in C([0,T]; \mathcal{H}(\Omega)) \cap L^\infty(0,T; \mathcal{V}^2(\Omega)), \\ \partial_t \boldsymbol{v},\ \Delta_x \partial_t \boldsymbol{v} \in L^\infty(0,T; \mathcal{H}(\Omega)), \quad \nabla_x \pi \in L^2(Q_T)^d; \end{gathered} \tag{3.12}$$

б) уравнения (3.8), (3.9) выполняются почти всюду в Q_T;

в) начальное условие (3.10) выполняется в смысле сильного следа в $\mathcal{H}(\Omega)$, т. е.

$$\|\boldsymbol{v}(\,\cdot\,, t) - \bar{\boldsymbol{v}}(\,\cdot\,, 1)\|_{\mathcal{H}(\Omega)} \underset{t \to 0+}{\longrightarrow} 0.$$

4. Доказательство предложения 2. Докажем приведенное выше предложение 2.

4.1. *Приближения Галеркина.* Следуя [9, 16], введем полную в $\mathcal{V}^2(\Omega)$ линейно независимую систему $\{\boldsymbol{\psi}_i\}|_{i=1,2,\ldots}$, ортонормированную в $\mathcal{H}(\Omega)$ и состоящую из решений спектральной задачи

$$\int\limits_{\Omega} \nabla_x \boldsymbol{\psi}_i : \nabla_x \boldsymbol{\Phi}\, d\boldsymbol{x} = \lambda_i \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{\psi}_i \cdot \boldsymbol{\Phi}\, d\boldsymbol{x} \quad \forall\, \boldsymbol{\Phi} \in \mathcal{V}^2(\Omega), \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{4.1}$$

Регулярное слабое решение $\boldsymbol{v}_n$ задачи (1.1) строится как предел последовательности конечномерных приближений Галеркина

$$\boldsymbol{v}_n = \lim_{m\to+\infty} \boldsymbol{v}_n^{(m)},$$

где

$$\boldsymbol{v}_n^{(m)}(\,\cdot\,, t) = \sum_{i=1}^{m} v_{i,mn}(t) \boldsymbol{\psi}_i(\,\cdot\,), \qquad t \in [0, T].$$

Неизвестные коэффициенты $v_{i,mn}(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ находятся как решения системы Галеркина — задачи Коши для системы m нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(1 + \varkappa\lambda_i)\, \frac{dv_{i,mn}(t)}{dt} = -\int\limits_{\Omega} \operatorname{div}_x(\boldsymbol{v}_n^{(m)} \otimes \boldsymbol{v}_n^{(m)}) \cdot \boldsymbol{\psi}_i\, d\boldsymbol{x} -$$

$$- \int\limits_{\Omega} (\mu\, \nabla_x \boldsymbol{v}_n^{(m)} : \nabla_x \boldsymbol{\psi}_i - a\varphi_n(t) \boldsymbol{v}_n^{(m)} \cdot \boldsymbol{\psi}_i)\, d\boldsymbol{x}, \tag{4.2}$$

$$v_{i,mn}(0) = v_{0,i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

где постоянные $v_{0,i}$ — коэффициенты Фурье вектор-функции $\boldsymbol{v}_0$ по базису $\{\boldsymbol{\psi}_i\}|_{i=1,2,\ldots}$. Имеем

$$v_{0,i} = \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{\psi}_i\, d\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{v}_0^{(m)} = \sum_{i=1}^{m} v_{0,i} \boldsymbol{\psi}_i \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \boldsymbol{v}_0 \quad \text{сильно в} \quad \mathcal{V}^2(\Omega).$$

Следует отметить, что коэффициенты $v_{0,i}$ и приближенная начальная вектор-функция $\boldsymbol{v}_0^{(m)}$ не зависят от n.

Так как $1 + \varkappa\lambda_i \geqslant 1$ $(i = 1, \ldots, m)$, то согласно теореме Пеано система (4.2) имеет решение $(v_{1,mn}(t), \ldots, v_{m,mn}(t))$ для каждого $m \in \mathbb{N}$ на некотором интервале $(0, T_{mn})$. Соответственно, приближенное решение $\boldsymbol{v}_n^{(m)}$ существует в пространственно-временном цилиндре $\Omega \times (0, T_{mn})$.

4.2. *Продолжение $\boldsymbol{v}_n^{(m)}$ на весь интервал $(0, T)$. Энергетические оценки.* Докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть выполнены наложенные в п.* **1** *условия на входные данные задачи (1.1) и значение $n \geqslant n_0$ $(n \in \mathbb{N})$ фиксировано. Тогда каждая вектор-функция в последовательности $\{\boldsymbol{v}_n^{(m)}\}|_{m=1,2,\ldots}$ имеет продолжение с $(0, T_{mn})$ на весь интервал $(0, T]$ и удовлетворяет первой энергетической оценке*

$$\sup_{t\in[0,T]} \big(\|\boldsymbol{v}_n^{(m)}(\,\cdot\,, t)\|^2_{\mathcal{H}(\Omega)} + \varkappa\, \|\nabla_x \boldsymbol{v}_n^{(m)}(\,\cdot\,, t)\|^2_{L^2(\Omega)^{d\times d}}\big) + \mu\, \|\nabla_x \boldsymbol{v}_n^{(m)}\|^2_{L^2(Q_T)^{d\times d}} \leqslant$$

$$\leqslant M_0 \big(\|\boldsymbol{v}_0\|^2_{\mathcal{H}(\Omega)} + \varkappa \|\nabla_x \boldsymbol{v}_0\|^2_{L^2(\Omega)^{d\times d}}\big), \tag{4.3}$$

где $M_0 = 2$ при $a \leqslant 0$ и $M_0 = \mathrm{e}^{2a}$ при $a > 0$.

Доказательство основано на умножении i-го уравнения в системе (4.2) на $v_{i,mn}$ с последующим суммированием по i от 1 до m и учетом соотношений (1.5), (4.1) и проводится аналогично выводу первой энергетической оценки и обоснованию продолжения решения [9].

Лемма 2. *Пусть выполнены наложенные в п.* **1** *условия на входные данные задачи* (1.1) *и значение $n \geqslant n_0$ ($n \in \mathbb{N}$) фиксировано. Тогда семейство приближений Галеркина $\{\boldsymbol{v}_n^{(m)}\}|_{m=1,2,\dots}$ удовлетворяет второй энергетической оценке*

$$\sup_{t\in[0,T]} (\|\nabla_x \boldsymbol{v}_n^{(m)}(\,\cdot\,,t)\|^2_{L^2(\Omega)^{d\times d}} + \|\Delta_x \boldsymbol{v}_n^{(m)}(\,\cdot\,,t)\|^2_{\mathcal{H}(\Omega)}) \leqslant$$
$$\leqslant M_1(\|\boldsymbol{v}_0\|^2_{\mathcal{H}(\Omega)} + \|\nabla_x \boldsymbol{v}_0\|^2_{L^2(\Omega)^{d\times d}} + \|\Delta_x \boldsymbol{v}_0\|^2_{\mathcal{H}(\Omega)} + 1), \tag{4.4}$$

где положительная постоянная M_1 зависит от T, Ω, d, μ, $\varkappa$, a и не зависит от m, n.

Доказательство. Умножая i-е уравнение в системе (4.2) на $\lambda_i v_{i,mn}$, проводя суммирование по i от 1 до m, применяя формулу Грина по x_j ($1 \leqslant j \leqslant d$) и учитывая (4.1), получаем равенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\nabla_x \boldsymbol{v}_n^{(m)}(\,\cdot\,,t)\|^2_{L^2(\Omega)^{d\times d}} + \varkappa\|\Delta_x \boldsymbol{v}_n^{(m)}(\,\cdot\,,t)\|^2_{\mathcal{H}(\Omega)}) + \mu\|\Delta_x \boldsymbol{v}_n^{(m)}(\,\cdot\,,t)\|^2_{\mathcal{H}(\Omega)} =$$
$$= \int_\Omega \operatorname{div}_x(\boldsymbol{v}_n^{(m)}(\boldsymbol{x},t)\otimes \boldsymbol{v}_n^{(m)}(\boldsymbol{x},t))\cdot \Delta_x \boldsymbol{v}_n^{(m)}(\boldsymbol{x},t)\,d\boldsymbol{x} + a\varphi_n(t)\|\nabla_x \boldsymbol{v}_n^{(m)}(\,\cdot\,,t)\|^2_{L^2(\Omega)^{d\times d}}. \tag{4.5}$$

Оценим сверху интеграл в правой части (4.5). Для этого используем два известных неравенства вложения. Первое неравенство следует из неравенства Пуанкаре — Фридрихса и теоремы вложения Соболева [17] и имеет вид

$$\|\boldsymbol{v}_n^{(m)}(\,\cdot\,,t)\|_{L^4(\Omega)^d} \leqslant M_2(d,\Omega)\|\nabla_x \boldsymbol{v}_n^{(m)}(\,\cdot\,,t)\|_{L^2(\Omega)^{d\times d}}, \tag{4.6}$$

где постоянная $M_2(d,\Omega)$ не зависит от n и m. Второе неравенство позволяет оценить норму вектор-функции в $\mathcal{V}^2(\Omega)$ через норму ее лапласиана в $\mathcal{H}(\Omega)$ [16] и имеет вид

$$\|\boldsymbol{v}_n^{(m)}(\,\cdot\,,t)\|_{\mathcal{V}^2(\Omega)} \leqslant M_3(d,\Omega)\|\Delta_x \boldsymbol{v}_n^{(m)}(\,\cdot\,,t)\|_{\mathcal{H}(\Omega)}, \tag{4.7}$$

где постоянная $M_3(d,\Omega)$ не зависит от n, m.

Применяя последовательно неравенство Коши, оценим неравенство Коши — Буняковского, неравенства (4.6), (4.7) и первую энергетическую оценку (4.3):

$$\int_\Omega \operatorname{div}_x(\boldsymbol{v}_n^{(m)}(\boldsymbol{x},t)\otimes \boldsymbol{v}_n^{(m)}(\boldsymbol{x},t))\cdot \Delta_x \boldsymbol{v}_n^{(m)}(\boldsymbol{x},t)\,d\boldsymbol{x} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\|\operatorname{div}_x(\boldsymbol{v}_n^{(m)}(\,\cdot\,,t)\otimes \boldsymbol{v}_n^{(m)}(\,\cdot\,,t))\|^2_{\mathcal{H}(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\Delta_x \boldsymbol{v}_n^{(m)}(\,\cdot\,,t)\|^2_{\mathcal{H}(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M_4(d)}{2}\|\boldsymbol{v}_n^{(m)}(\,\cdot\,,t)\|^2_{L^4(\Omega)^d}\|\nabla_x \boldsymbol{v}_n^{(m)}(\,\cdot\,,t)\|^2_{L^4(\Omega)^{d\times d}} + \frac{1}{2}\|\Delta_x \boldsymbol{v}_n^{(m)}(\,\cdot\,,t)\|^2_{\mathcal{H}(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M_2^2(d,\Omega)M_3^2(d,\Omega)M_4(d)}{2}\|\nabla_x \boldsymbol{v}_n^{(m)}(\,\cdot\,,t)\|^2_{L^2(\Omega)^{d\times d}}\|\Delta_x \boldsymbol{v}_n^{(m)}(\,\cdot\,,t)\|^2_{\mathcal{H}(\Omega)} +$$
$$+ \frac{1}{2}\|\Delta_x \boldsymbol{v}_n^{(m)}(\,\cdot\,,t)\|^2_{\mathcal{H}(\Omega)} \leqslant \frac{1}{2}(M_0 M_2^2(d,\Omega)M_3^2(d,\Omega)M_4(d)(\|\boldsymbol{v}_0\|^2_{\mathcal{H}(\Omega)} +$$
$$+ \varkappa\|\nabla_x \boldsymbol{v}_0\|^2_{L^2(\Omega)^{d\times d}}) + 1)\|\Delta_x \boldsymbol{v}_n^{(m)}(\,\cdot\,,t)\|^2_{\mathcal{H}(\Omega)}. \tag{4.8}$$

Введем следующие обозначения:

$$Z^{(m)}(t) = \|\nabla_x \boldsymbol{v}_n^{(m)}(\,\cdot\,,t)\|^2_{L^2(\Omega)^{d\times d}} + \varkappa\,\|\Delta_x \boldsymbol{v}_n^{(m)}(\,\cdot\,,t)\|^2_{\mathcal{H}(\Omega)},$$

$$M_5 = \frac{1}{2\varkappa}\,(M_0 M_2^2(d,\Omega) M_3^2(d,\Omega) M_4(d)(\|\boldsymbol{v}_0\|^2_{\mathcal{H}(\Omega)} + \varkappa\|\nabla_x \boldsymbol{v}_0\|^2_{L^2(\Omega)^{d\times d}}) + 1).$$

С учетом этих обозначений, комбинируя (4.5) и (4.8) и добавляя в правую часть полученного неравенства неотрицательные слагаемые, находим неравенство

$$\frac{1}{2}\,\frac{dZ^{(m)}(t)}{dt} + \mu\|\Delta_x \boldsymbol{v}_n^{(m)}(\,\cdot\,,t)\|^2_{\mathcal{H}(\Omega)} \leqslant (M_5 + |a|\varphi_n(t))Z^{(m)}(t), \qquad t\in[0,T],$$

из которого следует вторая энергетическая оценка (4.4) в силу леммы Гронуолла и соотношений (1.5).

Следствие 1. *Имеет место равномерная по m и n оценка*

$$\|\boldsymbol{v}_n^{(m)}\|^2_{L^\infty(0,T;\mathcal{V}^2(\Omega))} \leqslant M_1 M_3^2(d,\Omega)(\|\boldsymbol{v}_0\|^2_{\mathcal{H}(\Omega)} + \|\nabla_x \boldsymbol{v}_0\|^2_{L^2(\Omega)^{d\times d}} + \|\Delta_x \boldsymbol{v}_0\|^2_{\mathcal{H}(\Omega)} + 1). \tag{4.9}$$

Лемма 3. *Пусть выполнены наложенные в п.* **1** *условия на входные данные задачи* (1.1) *и значение $n \geqslant n_0$ ($n\in\mathbb{N}$) фиксировано. Тогда семейство приближений Галеркина $\{\boldsymbol{v}_n^{(m)}\}|_{m=1,2,\dots}$ удовлетворяет оценкам*

$$\|\partial_t \boldsymbol{v}_n^{(m)}(\,\cdot\,,t)\|^2_{\mathcal{H}(\Omega)} + \|\nabla_x\partial_t \boldsymbol{v}_n^{(m)}(\,\cdot\,,t)\|^2_{L^2(\Omega)^{d\times d}} \leqslant M_6 + M_7\,a^2\varphi_n^2(t) \quad \forall t\in[0,T]; \tag{4.10}$$

$$\|\partial_t \boldsymbol{v}_n^{(m)}(\,\cdot\,,t)\|_{\mathcal{H}(\Omega)} + \|\nabla_x\partial_t \boldsymbol{v}_n^{(m)}(\,\cdot\,,t)\|_{L^2(\Omega)^{d\times d}} \leqslant \sqrt{2M_6} + \sqrt{2M_7}\,|a|\varphi_n(t) \quad \forall t\in[0,T], \tag{4.11}$$

где положительные постоянные M_6, M_7 не зависят от m, n.

Построение оценки (4.10) основано на умножении i-го уравнения системы (4.2) на $2\,dv_{i,mn}/dt$ с последующим суммированием по i от 1 до m и учетом соотношения (4.1) и проводится аналогично выводу оценки (3.3) (в случае $d=3$) и оценки (3.3$'$) (в случае $d=2$) в работе [9]. Оценка (4.11) следует из оценки (4.10) в силу неравенства $A+B\leqslant \sqrt{2(A^2+B^2)}$ $\forall A,B\in\mathbb{R}$.

4.3. *Предельный переход при $m\to+\infty$.* В силу следствия 1 согласно теореме Алаоглу

$$\text{семейство } \{\boldsymbol{v}_n^{(m)}\}|_{m=1,2,\dots} \text{ относительно слабо}^* \text{ компактно в } L^\infty(0,T;\mathcal{V}^2(\Omega)) \tag{4.12}$$

при любом фиксированном $n\geqslant n_0$ ($n\in\mathbb{N}$). В силу леммы 3 согласно теореме Алаоглу

$$\text{семейство } \{\partial_t\boldsymbol{v}_n^{(m)}\}|_{m=1,2,\dots} \text{ относительно слабо}^* \text{ компактно в } L^\infty(0,T;\mathcal{V}^1(\Omega)) \tag{4.13}$$

при любом фиксированном $n\geqslant n_0$ ($n\in\mathbb{N}$).

Переходя к пределу при $m\to+\infty$ в оценках (4.9)–(4.11) с учетом свойств компактности (4.12), (4.13) и известного свойства слабой полунепрерывности снизу для норм [18] и дополнительно интегрируя оценки для $\partial_t\boldsymbol{v}_n$ и $\nabla_x\partial_t\boldsymbol{v}_n$ по t на $(0,T)$, получаем оценки (2.3)–(2.5), в которых

$$C_0^2 = M_1 M_3^2(d,\Omega)(\|\boldsymbol{v}_0\|^2_{\mathcal{H}(\Omega)} + \|\nabla_x \boldsymbol{v}_0\|^2_{L^2(\Omega)^{d\times d}} + \|\Delta_x \boldsymbol{v}_0\|^2_{\mathcal{H}(\Omega)} + 1),$$

$$C_1 = \sqrt{2M_6} + |a|\sqrt{2M_7}, \quad C_2 = M_6, \quad C_3 = M_7 a^2.$$

Предложение 2 доказано.

5. Доказательство теоремы 1. Ниже приводится доказательство теоремы 1.

5.1. *Предельный переход при $n\to+\infty$ в последовательности $\{\boldsymbol{v}_n\}$. Доказательство утверждения* 1 *теоремы* 1. В силу равномерных по n оценок в предложении 2 утверждение 1 теоремы 1 следует из леммы Обена — Лионса — Симона о компактности [19] и теоремы Алаоглу.

5.2. *Рескейлинг и сдвиг в последовательности* $\{\boldsymbol{v}_n\}$. Ниже выполняется предельный переход при $n \to +\infty$ в интегральном равенстве (2.1).

Полагая, что пробная вектор-функция φ в интегральном равенстве (2.1) обращается в нуль в окрестности сечения $t = T$, проинтегрируем первое и четвертое слагаемые в левой части (2.1) по t по частям, применим формулу Грина по $\boldsymbol{x}$ в интеграле, содержащем конвективное слагаемое, и запишем результирующее равенство в развернутом виде, отделив интегралы по сегментам $(0, 1/n)$ и $(1/n, T)$ друг от друга. В результате получаем

$$\int\limits_0^{1/n}\int\limits_\Omega \left(-\boldsymbol{v}_n\cdot\partial_t\varphi-(\boldsymbol{v}_n\otimes\boldsymbol{v}_n):\nabla_x\varphi+\mu\,\nabla_x\boldsymbol{v}_n:\nabla_x\varphi-\varkappa\,\nabla_x\boldsymbol{v}_n:\nabla_x\partial_t\varphi-an\Phi(nt)\boldsymbol{v}_n\cdot\varphi\right)d\boldsymbol{x}\,dt-$$

$$-\int\limits_\Omega \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x})\cdot\varphi(\boldsymbol{x},0)\,d\boldsymbol{x}-\varkappa\int\limits_\Omega \nabla_x\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x}):\nabla_x\varphi(\boldsymbol{x},0)\,d\boldsymbol{x}+$$

$$+\int\limits_{1/n}^{T}\int\limits_\Omega \left(-\boldsymbol{v}_n\cdot\partial_t\varphi-(\boldsymbol{v}_n\otimes\boldsymbol{v}_n):\nabla_x\varphi+\mu\nabla_x\boldsymbol{v}_n:\nabla_x\varphi-\varkappa\,\nabla_x\boldsymbol{v}_n:\nabla_x\partial_t\varphi\right)d\boldsymbol{x}\,dt=0, \tag{5.1}$$

где учтено, что носитель функции $t \mapsto n\Phi(nt)$ лежит на отрезке $[0, 1/n]$. В (5.1) на интервалах $0 < t < 1/n$ и $1/n < t \leqslant T$ выполним следующие замены независимой переменной t и искомой функции $\boldsymbol{v}_n$. На интервале $(1/n, T]$ сдвигаем шкалу времени и полагаем

$$\tilde{t} = t - 1/n, \quad \tilde{\boldsymbol{v}}_n(\boldsymbol{x},\tilde{t}) = \boldsymbol{v}_n(\boldsymbol{x},t) \equiv \boldsymbol{v}_n(\boldsymbol{x},\tilde{t}+1/n), \qquad t \in (1/n, T]. \tag{5.2}$$

Заметим, что $\tilde{t} \in (0, T - 1/n]$, $dt = d\tilde{t}$, $\partial_t = \partial_{\tilde{t}}$, $t = \tilde{t} + 1/n$. Далее, следуя [20], полагаем

$$\vartheta = nt, \quad \bar{\boldsymbol{v}}_n(\boldsymbol{x},\vartheta) = \boldsymbol{v}_n(\boldsymbol{x},t) \equiv \boldsymbol{v}_n(\boldsymbol{x},n^{-1}\vartheta), \qquad t \in [0, 1/n]. \tag{5.3}$$

Заметим также, что $\vartheta \in [0, 1]$, $dt = n^{-1}\,d\vartheta$, $\partial_t = n\partial_\vartheta$, $t = n^{-1}\vartheta$. Таким образом, (5.1) принимает вид

$$\int\limits_0^{1}\int\limits_\Omega \Big(-\bar{\boldsymbol{v}}_n(\boldsymbol{x},\vartheta)\cdot\partial_\vartheta\varphi(\boldsymbol{x},n^{-1}\vartheta)-n^{-1}(\bar{\boldsymbol{v}}_n(\boldsymbol{x},\vartheta)\otimes\bar{\boldsymbol{v}}_n(\boldsymbol{x},\vartheta)):\nabla_x\varphi(\boldsymbol{x},n^{-1}\vartheta)+$$

$$+n^{-1}\mu\,\nabla_x\bar{\boldsymbol{v}}_n(\boldsymbol{x},\vartheta):\nabla_x\varphi(\boldsymbol{x},n^{-1}\vartheta)-\varkappa\,\nabla_x\bar{\boldsymbol{v}}_n(\boldsymbol{x},\vartheta):\nabla_x\partial_\vartheta\varphi(\boldsymbol{x},n^{-1}\vartheta)-$$

$$-a\Phi(\vartheta)\bar{\boldsymbol{v}}_n(\boldsymbol{x},\vartheta)\varphi(\boldsymbol{x},n^{-1}\vartheta)\Big)\,d\boldsymbol{x}\,d\vartheta-$$

$$-\int\limits_\Omega \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x})\cdot\varphi(\boldsymbol{x},0)\,d\boldsymbol{x}-\varkappa\int\limits_\Omega \nabla_x\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x}):\nabla_x\varphi(\boldsymbol{x},0)\,d\boldsymbol{x}+$$

$$+\int\limits_0^{T-1/n}\int\limits_\Omega \Big(-\tilde{\boldsymbol{v}}_n(\boldsymbol{x},\tilde{t})\cdot\partial_{\tilde{t}}\varphi(\boldsymbol{x},\tilde{t}+1/n)-(\tilde{\boldsymbol{v}}_n(\boldsymbol{x},\tilde{t})\otimes\tilde{\boldsymbol{v}}_n(\boldsymbol{x},\tilde{t})):\nabla_x\varphi(\boldsymbol{x},\tilde{t}+1/n)+$$

$$+\mu\,\nabla_x\tilde{\boldsymbol{v}}_n(\boldsymbol{x},\tilde{t}):\nabla_x\varphi(\boldsymbol{x},\tilde{t}+1/n)-\varkappa\nabla_x\tilde{\boldsymbol{v}}_n(\boldsymbol{x},\tilde{t}):\nabla_x\partial_{\tilde{t}}\varphi(\boldsymbol{x},\tilde{t}+1/n)\Big)\,d\boldsymbol{x}\,d\tilde{t}=0. \tag{5.4}$$

Для выполнения предельного перехода при $n \to +\infty$ в (5.4) выберем пробную вектор-функцию $\varphi = \varphi_n(\boldsymbol{x}, t)$, зависящую от n, в виде

$$\varphi_n(\boldsymbol{x},t)=\begin{cases} \bar{\varphi}(\boldsymbol{x},\vartheta)\equiv\bar{\varphi}(\boldsymbol{x},nt), & t\in[0,1/n],\ \vartheta\in[0,1],\\ \tilde{\varphi}(\boldsymbol{x},\tilde{t})\equiv\tilde{\varphi}(\boldsymbol{x},t-1/n), & t\in(1/n,T],\ \tilde{t}\in(0,T-1/n], \end{cases} \tag{5.5}$$

где $\bar\varphi = \bar\varphi(\boldsymbol{x},\vartheta)$, $\tilde\varphi = \tilde\varphi(\boldsymbol{x},\tilde t)$ — произвольные гладкие пробные вектор-функции, определенные на $\bar\Omega\times[0,1]$ и $\bar\Omega\times(0,T]$ соответственно, такие что $\bar\varphi=\tilde\varphi\equiv 0$ в окрестности $\partial\Omega$, $\tilde\varphi\equiv 0$ в окрестности сечения $\tilde t = T$ и выполняется условие согласования

$$\bar\varphi(\boldsymbol{x},1-0)=\tilde\varphi(\boldsymbol{x},0+). \tag{5.6}$$

Заметим, что в силу условия (5.6) обобщенные производные $\partial_t\varphi_n$ и $\nabla_x\partial_t\varphi_n$ существенно ограничены в Q_T, откуда следует $\varphi_n\in L^2(0,T;\mathcal{V}^1(\Omega))$, $\partial_t\varphi_n\in L^2(0,T;\mathcal{V}^1(\Omega))$, поэтому φ_n является допустимой пробной вектор-функцией для интегрального равенства (5.1) и для (5.4). Подставляя (5.5) в (5.4), получаем

$$\begin{gathered}\int\limits_0^1\int\limits_\Omega\big(-\bar{\boldsymbol{v}}_n(\boldsymbol{x},\vartheta)\cdot\partial_\vartheta\bar\varphi(\boldsymbol{x},\vartheta)-n^{-1}(\bar{\boldsymbol{v}}_n(\boldsymbol{x},\vartheta)\otimes\bar{\boldsymbol{v}}_n(\boldsymbol{x},\vartheta)):\nabla_x\bar\varphi(\boldsymbol{x},\vartheta)+\\ +n^{-1}\mu\,\nabla_x\bar{\boldsymbol{v}}_n(\boldsymbol{x},\vartheta):\nabla_x\bar\varphi(\boldsymbol{x},\vartheta)-\varkappa\,\nabla_x\bar{\boldsymbol{v}}_n(\boldsymbol{x},\vartheta):\nabla_x\partial_\vartheta\bar\varphi(\boldsymbol{x},\vartheta)-\\ -a\Phi(\vartheta)\bar{\boldsymbol{v}}_n(x,\vartheta)\bar\varphi(\boldsymbol{x},\vartheta)\big)\,d\boldsymbol{x}\,d\vartheta-\\ -\int\limits_\Omega\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x})\cdot\bar\varphi(\boldsymbol{x},0)\,d\boldsymbol{x}-\varkappa\int\limits_\Omega\nabla_x\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x}):\nabla_x\bar\varphi(\boldsymbol{x},0)\,d\boldsymbol{x}+\\ +\int\limits_0^{T-1/n}\int\limits_\Omega\big(-\tilde{\boldsymbol{v}}_n(\boldsymbol{x},\tilde t)\cdot\partial_{\tilde t}\tilde\varphi(\boldsymbol{x},\tilde t)-(\tilde{\boldsymbol{v}}_n(\boldsymbol{x},\tilde t)\otimes\tilde{\boldsymbol{v}}_n(\boldsymbol{x},\tilde t)):\nabla_x\tilde\varphi(\boldsymbol{x},\tilde t)+\\ +\mu\,\nabla_x\tilde{\boldsymbol{v}}_n(\boldsymbol{x},\tilde t):\nabla_x\tilde\varphi(\boldsymbol{x},\tilde t)-\varkappa\nabla_x\tilde{\boldsymbol{v}}_n(\boldsymbol{x},\tilde t):\nabla_x\partial_{\tilde t}\tilde\varphi(\boldsymbol{x},\tilde t)\big)\,d\boldsymbol{x}\,d\tilde t=0.\end{gathered}\tag{5.7}$$

Заметим также, что

$$\bar{\boldsymbol{v}}_n(\boldsymbol{x},1-0)=\tilde{\boldsymbol{v}}_n(\boldsymbol{x},0+)\quad\text{в}\quad\bar\Omega \tag{5.8}$$

в силу (5.2), (5.3) и свойств регулярности решения $\boldsymbol{v}_n$ (см. определение 1). Дальнейшее обоснование теоремы 1 базируется на использовании семейств $\{\bar{\boldsymbol{v}}_n\}$ и $\{\tilde{\boldsymbol{v}}_n\}$ и интегрального равенства (5.7) с учетом соотношения (5.8).

5.3. *Предельный переход при $n\to+\infty$ в последовательности $\{\bar{\boldsymbol{v}}_n\}$. Доказательство утверждения* 2 *теоремы* 1. Применяя сдвиг и рескейлинг (преобразования (5.2) и (5.3)) в оценках (2.3), (2.4) и отбрасывая неотрицательные выражения, содержащие $\tilde{\boldsymbol{v}}_n$, получаем равномерные оценки для семейства $\{\bar{\boldsymbol{v}}_n\}|_{n\geqslant n_0}$

$$\|\bar{\boldsymbol{v}}_n\|_{L^\infty(0,1;\mathcal{V}^2(\Omega))}\leqslant\|\boldsymbol{v}_n\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{V}^2(\Omega))}\leqslant C_0; \tag{5.9}$$

$$\begin{gathered}\|\partial_\vartheta\bar{\boldsymbol{v}}_n\|_{L^1(0,1;\mathcal{H}(\Omega))}+\|\nabla_x\partial_\vartheta\bar{\boldsymbol{v}}_n\|_{L^1(0,1;L^2(\Omega)^{d\times d})}\leqslant\\ \leqslant\|\partial_t\boldsymbol{v}_n\|_{L^1(0,T;\mathcal{H}(\Omega))}+\|\nabla_x\partial_t\boldsymbol{v}_n\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega)^{d\times d})}\leqslant C_1,\end{gathered}\tag{5.10}$$

где постоянные C_0, C_1 те же, что и в оценках (2.3), (2.4). В силу этих оценок утверждение 2 теоремы 1 следует из леммы Обена — Лионса — Симона о компактности и теоремы Алаоглу.

5.4. *Предельный переход в* $\Omega\times\{0<\vartheta<1\}$. *Уравнения начального слоя.* Полагая $\tilde{\varphi}\equiv 0$ в (5.7), получаем интегральное равенство

$$\int_0^1\int_\Omega \big(-\bar{\boldsymbol{v}}_n(\boldsymbol{x},\vartheta)\cdot\partial_\vartheta\bar{\varphi}(\boldsymbol{x},\vartheta)-n^{-1}(\bar{\boldsymbol{v}}_n(\boldsymbol{x},\vartheta)\otimes\bar{\boldsymbol{v}}_n(\boldsymbol{x},\vartheta)):\nabla_x\bar{\varphi}(\boldsymbol{x},\vartheta)+$$
$$+n^{-1}\mu\nabla_x\bar{\boldsymbol{v}}_n(\boldsymbol{x},\vartheta):\nabla_x\bar{\varphi}(\boldsymbol{x},\vartheta)-\varkappa\nabla_x\bar{\boldsymbol{v}}_n(\boldsymbol{x},\vartheta):\nabla_x\partial_\vartheta\bar{\varphi}(\boldsymbol{x},\vartheta)-$$
$$-a\Phi(\vartheta)\bar{\boldsymbol{v}}_n(x,\vartheta)\cdot\bar{\varphi}(\boldsymbol{x},\vartheta)\big)\,d\boldsymbol{x}\,d\vartheta-$$
$$-\int_\Omega \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x})\cdot\bar{\varphi}(\boldsymbol{x},0)\,d\boldsymbol{x}-\varkappa\int_\Omega\nabla_x\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x}):\nabla_x\bar{\varphi}(\boldsymbol{x},0)\,d\boldsymbol{x}=0 \qquad (5.11)$$

для любых пробных вектор-функций $\bar{\varphi}$, удовлетворяющих условиям (5.5) и обращающихся в нуль в окрестности сечения $\vartheta=1$.

В силу неравенства $AB\leqslant(A^2+B^2)/2$ ($\forall\ A,B\in\mathbb{R}$) и оценки (5.9) имеем

$$\Big|\int_0^1\int_\Omega n^{-1}(\bar{\boldsymbol{v}}_n(\boldsymbol{x},\vartheta)\otimes\bar{\boldsymbol{v}}_n(\boldsymbol{x},\vartheta)):\nabla_x\bar{\varphi}(\boldsymbol{x},\vartheta)\,d\boldsymbol{x}\,d\vartheta\Big|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{d}{2n}\,\|\bar{\boldsymbol{v}}_n\|^2_{L^\infty(0,1;\mathcal{H}(\Omega))}\,\|\nabla_x\bar{\varphi}\|_{C(\bar{\Omega}\times[0,T])}\leqslant\frac{d}{2n}\,C_0^2\|\nabla_x\bar{\varphi}\|_{C(\bar{\Omega}\times[0,T])}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0,$$

т. е. конвективное слагаемое в интегральном равенстве (5.11) обращается в нуль при $n\to+\infty$. Остальные слагаемые в первом интеграле в (5.11) являются линейными по $\bar{\boldsymbol{v}}_n$, предельный переход в них основан на предельном соотношении (3.3). В результате при $n\to+\infty$ из (5.11) получаем интегральное равенство

$$\int_0^1\int_\Omega\big(-\bar{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x},\vartheta)\cdot\partial_\vartheta\bar{\varphi}(\boldsymbol{x},\vartheta)-\varkappa\,\nabla_x\bar{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x},\vartheta):\nabla_x\partial_\vartheta\bar{\varphi}(\boldsymbol{x},\vartheta)-a\Phi(\vartheta)\bar{\boldsymbol{v}}(x,\vartheta)\cdot\bar{\varphi}(\boldsymbol{x},\vartheta)\big)\,d\boldsymbol{x}\,d\vartheta-$$
$$-\int_\Omega \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x})\cdot\bar{\varphi}(\boldsymbol{x},0)\,d\boldsymbol{x}-\varkappa\int_\Omega\nabla_x\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x}):\nabla_x\bar{\varphi}(\boldsymbol{x},0)\,d\boldsymbol{x}=0 \qquad (5.12)$$

для любых пробных вектор-функций $\bar{\varphi}$, удовлетворяющих условиям (5.5).

Следует отметить, что интегральное равенство (5.12) является линейным по $\bar{\boldsymbol{v}}$ и хорошо изучено с использованием классических методов теории обобщенных решений уравнений математической физики. На основе теоремы 2.1 из работы [9] можно сделать вывод, что равенство (5.12) с включением $\bar{\boldsymbol{v}}\in L^\infty(0,1;\mathcal{V}^2(\Omega))$ эквивалентно системе (3.4)–(3.7), в которой градиент давления $\nabla_x\bar{\pi}\in L^2(\Omega\times(0,1))^d$ восстанавливается по полю скоростей $\bar{\boldsymbol{v}}$ в силу разложения Вейля, и пара функций $(\bar{\boldsymbol{v}},\bar{\pi})$ является сильным решением системы (3.4)–(3.7) в соответствии с п. 1 определения 2.

5.5. *Предельный переход в* $\Omega\times\{0<\tilde{t}<T\}$. *Уравнения внешнего течения.* Полагая $\bar{\varphi}\equiv 0$ в (5.7), получаем интегральное равенство

$$\int_0^T\int_\Omega\theta|_{0<\tilde{t}<T-1/n}\big(-\tilde{\boldsymbol{v}}_n(\boldsymbol{x},\tilde{t})\cdot\partial_{\tilde{t}}\tilde{\varphi}(\boldsymbol{x},\tilde{t})-(\tilde{\boldsymbol{v}}_n(\boldsymbol{x},\tilde{t})\otimes\tilde{\boldsymbol{v}}_n(\boldsymbol{x},\tilde{t})):\nabla_x\tilde{\varphi}(\boldsymbol{x},\tilde{t})+$$
$$+\mu\nabla_x\tilde{\boldsymbol{v}}_n(\boldsymbol{x},\tilde{t}):\nabla_x\tilde{\varphi}(\boldsymbol{x},\tilde{t})-\varkappa\nabla_x\tilde{\boldsymbol{v}}_n(\boldsymbol{x},\tilde{t}):\nabla_x\partial_{\tilde{t}}\tilde{\varphi}(\boldsymbol{x},\tilde{t})\big)\,d\boldsymbol{x}\,d\tilde{t}=0 \qquad (5.13)$$

для любых пробных вектор-функций $\tilde{\varphi}$, удовлетворяющих условиям (5.5) и обращающихся в нуль в окрестности сечения $\tilde{t} = 0$. Здесь

$$\theta|_{0<\tilde{t}<T-1/n} = \begin{cases} 1, & 0 < \tilde{t} < T - 1/n, \\ 0, & \tilde{t} \notin (0, T - 1/n). \end{cases}$$

Аналогично оценкам (5.9), (5.10) для $\bar{\boldsymbol{v}}_n$ выводим равномерные оценки для семейства $\{\tilde{\boldsymbol{v}}_n\}|_{n\geqslant n_0}$:

$$\|\tilde{\boldsymbol{v}}_n\|_{L^\infty(0,T-1/n;\mathcal{V}^2(\Omega))} \leqslant C_0; \tag{5.14}$$

$$\|\partial_{\tilde{t}}\tilde{\boldsymbol{v}}_n\|_{L^1(0,T-1/n;\mathcal{H}(\Omega))} + \|\nabla_x\partial_{\tilde{t}}\tilde{\boldsymbol{v}}_n\|_{L^1(0,T-1/n;L^2(\Omega)^{d\times d})} \leqslant C_1, \tag{5.15}$$

где постоянные C_0, C_1 те же, что и в оценках (2.3), (2.4), (5.9), (5.10). В силу (5.14), (5.15), леммы Обена — Лионса — Симона о компактности и соотношения

$$\theta|_{0<\tilde{t}<T-1/n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \text{сильно в } L^r(0,T) \quad \forall\, r \in [1, +\infty) \tag{5.16}$$

существуют подпоследовательность $\{\tilde{\boldsymbol{v}}_n\}$ и предельная вектор-функция $\tilde{\boldsymbol{v}} \in L^\infty(0,T; \mathcal{V}^2(\Omega))$, такие что

$$\begin{gathered} \theta\big|_{0<\tilde{t}<T-1/n}\tilde{\boldsymbol{v}}_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{\boldsymbol{v}} \quad \text{сильно в } L^{2-\nu}(0,T;\mathcal{V}^1(\Omega)), \text{ слабо в } L^r(0,T;\,\mathcal{V}^2(\Omega)) \\ \forall \nu \in (0,1], \quad \forall\, r \in [1, +\infty). \end{gathered} \tag{5.17}$$

Напомним, что согласно теореме вложения Соболева $\mathcal{V}^1(\Omega)$ компактно вложено в $L^4(\Omega)^d$ при $d = 2$; 3. Отсюда и из (5.17) следует

$$\theta\big|_{0<\tilde{t}<T-1/n}\tilde{\boldsymbol{v}}_n \otimes \tilde{\boldsymbol{v}}_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{\boldsymbol{v}} \otimes \tilde{\boldsymbol{v}} \quad \text{сильно в } L^{2-\nu}(0,T;L^2(\Omega)^{d\times d}). \tag{5.18}$$

Далее, в силу представлений (5.2), оценки (2.4) и формулы для конечных приращений (см., например, лемму 4 в [19]) имеем

$$\int\limits_0^{T-1/n} \|\tilde{\boldsymbol{v}}_n(\cdot,\tilde{t}) - \boldsymbol{v}_n(\,\cdot\,,\tilde{t})\|_{\mathcal{H}(\Omega)}\,d\tilde{t} = \int\limits_0^{T-1/n} \|\boldsymbol{v}_n(\,\cdot\,,\tilde{t}+1/n) - \boldsymbol{v}_n(\,\cdot\,,\tilde{t})\|_{\mathcal{H}(\Omega)}\,d\tilde{t} \leqslant$$

$$\leqslant n^{-1}\int\limits_0^T \|\partial_{\tilde{t}}\boldsymbol{v}_n(\,\cdot\,,\tilde{t})\|_{\mathcal{H}(\Omega)}\,d\tilde{t} \leqslant n^{-1}C_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Отсюда, из (3.1) и (5.17) следует

$$\tilde{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x},\tilde{t}) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\tilde{t}) \quad \text{при почти всех} \quad (\boldsymbol{x},\tilde{t}) \in Q_T. \tag{5.19}$$

Перейдем к пределу при $n \to +\infty$ в (5.13), используя соотношения (5.16)–(5.19) и обозначая $t = \tilde{t}$. Таким образом, получаем интегральное равенство

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega (-\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\cdot\partial_t\tilde{\varphi}(\boldsymbol{x},t) - (\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\otimes\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)) : \nabla_x\tilde{\varphi}(\boldsymbol{x},t) +$$

$$+ \mu\nabla_x\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) : \nabla_x\tilde{\varphi}(\boldsymbol{x},t) - \varkappa\nabla_x\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) : \nabla_x\partial_t\tilde{\varphi}(\boldsymbol{x},t))\,d\boldsymbol{x}\,dt = 0. \tag{5.20}$$

В силу произвольности пробной вектор-функции $\tilde{\varphi}$ интегральное равенство (5.20) с включением $\boldsymbol{v} \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}^2(\Omega))$ эквивалентно системе (3.8), (3.9), (3.11) в смысле теории распределений. При этом градиент давления $\nabla_x \pi \in L^2(Q_T)^d$ стандартно восстанавливается по полю скоростей $\boldsymbol{v}$ в силу разложения Вейля, а уравнение неразрывности (3.9) выполняется почти всюду в Q_T. Далее, аналогично [7, 8] на основе (5.20) получаем $\partial_t \boldsymbol{v} \in L^\infty(0,T;\mathcal{H}(\Omega))$, откуда следует $\boldsymbol{v} \in C([0,T];\mathcal{H}(\Omega))$. Таким образом, $\boldsymbol{v}(\,\cdot\,,0+) \in \mathcal{H}(\Omega)$, иными словами, вектор-функция $\boldsymbol{v}$ имеет сильный след из $\mathcal{H}(\Omega)$ в сечении $t=0$ справа. На основе (5.20) и включений $\partial_t \boldsymbol{v} \in L^\infty(0,T;\mathcal{H}(\Omega))$ и $\boldsymbol{v} \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}^2(\Omega))$ по определению обобщенной производной (в смысле Соболева) получаем $\Delta_x \partial_t \boldsymbol{v} \in L^\infty(0,T;\mathcal{H}(\Omega))$. Таким образом, уравнение (3.8) выполняется почти всюду в Q_T и предельная вектор-функция $\boldsymbol{v}$ удовлетворяет всем условиям регулярности в (3.12).

5.6. *Условия согласования при $\vartheta = 1-0$. Завершение доказательства утверждения 3 теоремы 1.* Обоснование условия (3.10) проводится с учетом работы [8]. Заметим, что в силу оценки (5.10), полученной с использованием формулы конечных приращений [19], семейство отображений $\bar{\boldsymbol{v}}_n$: $[0,1] \mapsto \mathcal{H}(\Omega)$ является равностепенно-непрерывным. В то же время в силу оценки (5.9) значения функций $\vartheta \mapsto \bar{\boldsymbol{v}}_n(\,\cdot\,,\vartheta)$ принадлежат интервалу $\|\bar{\boldsymbol{v}}_n(\,\cdot\,,\vartheta)\|_{\mathcal{V}^1(\Omega)} \leqslant C_0$. Согласно теореме Реллиха этот интервал является компактным множеством в $\mathcal{H}(\Omega)$, поэтому в соответствии с теоремой Арцела — Асколи множество $\{\bar{\boldsymbol{v}}_n\}|_{n\geqslant n_0}$ относительно компактно в $C([0,1];\mathcal{H}(\Omega))$. Следовательно, существует подпоследовательность, обозначаемая через n, такая что $\bar{\boldsymbol{v}}_n(\,\cdot\,,\vartheta) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \bar{\boldsymbol{v}}(\,\cdot\,,\vartheta)$ в $\mathcal{H}(\Omega)$ равномерно на $0 \leqslant \vartheta \leqslant 1$. Аналогично из (5.14), (5.15) следует, что $\tilde{\boldsymbol{v}}_n(\,\cdot\,,\tilde{t}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{\boldsymbol{v}}(\,\cdot\,,\tilde{t})$ сильно в $\mathcal{H}(\Omega)$ равномерно на $0 \leqslant \tilde{t} \leqslant T - 1/n_0$. Из этих двух предельных соотношений, равенств (5.8), (5.19) и включений $\bar{\boldsymbol{v}}(\,\cdot\,,1-0) \in \mathcal{H}(\Omega)$ и $\tilde{\boldsymbol{v}}(\,\cdot\,,0+) = \boldsymbol{v}(\,\cdot\,,0+) \in \mathcal{H}(\Omega)$ следует выполнение начального условия (3.10) — условия согласования при $\vartheta = 1-0$ — в смысле сильного следа в $\mathcal{H}(\Omega)$. Теорема 1 доказана.

5.7. *Замечание о единственности решения задачи* (3.4)–(3.11). Из [21] следует, что слабое решение, а значит, и сильное решение задачи (3.4)–(3.11) в смысле определения 1 единственно. (При этом функции давления $\bar{\pi}$ и π определяются единственным образом с точностью до постоянного значения.) В свою очередь, поскольку решение единственно, все семейство $\{\boldsymbol{v}_n\}|_{n\geqslant n_0}$ решений задачи (1.1) сходится к $(\bar{\boldsymbol{v}},\boldsymbol{v})$ при $n \to +\infty$ в смысле соотношений (3.1), (3.3), поэтому отсутствует необходимость извлекать какую-либо подпоследовательность из $\{\boldsymbol{v}_n\}|_{n\to+\infty}$.

Авторы выражают благодарность В. В. Пухначеву и Е. В. Ерманюку за внимание к исследованию и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Barnes H. A.** An introduction to rheology / H. A. Barnes, J. F. Hutton, K. Walters. Amsterdam: Elsevier, 1993.
2. **Gürgen S.** Shear thickening fluid: Theory and applications. Cham: Springer, 2023.
3. **Soutrenon M., Michaud V.** Impact properties of shear thickening fluid impregnated foams // Smart Materials Structures. 2014. V. 23. 035022.
4. **Liu H., Fu K., Cui X., et al.** Shear thickening fluid and its application in impact protection: A review // Polymers. 2023. V. 15, iss. 2238. P. 1–22.
5. **Antontsev S. N., de Oliveira H. B., Khompysh Kh.** The classical Kelvin — Voigt problem for incompressible fluids with unknown non-constant density: existence, uniqueness and regularity // Nonlinearity. 2021. V. 34. P. 3083–3111.
6. **Antontsev S. N., de Oliveira H. B., Khompysh Kh.** Kelvin — Voigt equations for incompressible and nonhomogeneous fluids with anisotropic viscosity, relaxation and damping // Nonlinear Different. Equat. Appl. 2022. V. 29. 60.

7. **Antontsev S., Kuznetsov I., Sazhenkov S., Shmarev S.** Strong solutions of a semilinear impulsive pseudoparabolic equation with an infinitesimal initial layer // J. Math. Anal. Appl. 2024. V. 530, iss. 1. 127751.
8. **Kuznetsov I., Sazhenkov S.** Weak solutions of impulsive pseudoparabolic equations with an infinitesimal transition layer // Nonlinear Anal. TMA. 2023. V. 228. 113190.
9. **Осколков А. П.** О некоторых нестационарных линейных и квазилинейных системах, встречающихся при изучении движения вязких жидкостей // Зап. науч. семинаров Ленингр. отд-ния Мат. ин-та. 1976. Т. 59. С. 133–177.
10. **Осколков А. П.** Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина — Фойгта и жидкостей Олдройда // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1988. Т. 179. С. 126–164.
11. **Ладыженская О. А.** О некоторых нелинейных задачах теории сплошных сред // Тр. международного конгресса математиков, Москва (Россия), 1966. Б. м., 1968. С. 561–673.
12. **Семисалов Б. В.** О точных решениях пуазейлевского типа для течений вязкоупругой полимерной жидкости в цилиндрическом канале // ПМТФ. 2023. Т. 64, № 4. С. 139–151.
13. **Севастьянов Г. М., Бормотин К. С.** Релаксация напряжений в изогнутой вязкоупругой пластине с различными свойствами при сжатии и растяжении // ПМТФ. 2023. Т. 64, № 4. С. 152–160.
14. **Журавлева Е. Н., Пухначев В. В.** О вращении жидкого слоя // ПМТФ. 2022. Т. 63, № 6. С. 96–103.
15. **Маматюков М. Ю., Хе А. К., Паршин Д. В., Чупахин А. П.** Энергетический подход к решению гидроупругой задачи о росте дивертикула фузиформной аневризмы // ПМТФ. 2020. Т. 61, № 5. С. 211–223.
16. **Ладыженская О. А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
17. **Соболев С. Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. 3-е изд. М.: Наука, 1988.
18. **Adams D. R.** Function spaces and potential theory / D. R. Adams, L. I. Hedberg. N. Y. etc.: Springer-Verlag, 1996. (Comprehensive studies in mathematics; V. 314).
19. **Simon J.** Compact sets in the space $L_p(0,T;B)$ // Ann. Mat. Pura Appl. 1987. V. 146. P. 65–96.
20. **Vasseur A.** Well-posedness of scalar conservation laws with singular sources // Methods Appl. Anal. 2002. V. 9, iss. 2. P. 291–312.
21. **Звягин В. Г., Турбин М. В.** Исследование начально-краевых задач для математических моделей движения жидкостей Кельвина — Фойгта // Соврем. математика. Фундам. направления. 2009. Т. 31. С. 3–144.

Поступила в редакцию 11/III 2024 г.,
после доработки — 27/III 2024 г.
Принята к публикации 27/IV 2024 г.