

УДК 539.3:534.26

ПРОХОЖДЕНИЕ ЗВУКА ЧЕРЕЗ ТЕРМОУПРУГИЙ ДИСКРЕТНО-НЕОДНОРОДНЫЙ ПЛОСКИЙ СЛОЙ, ГРАНИЧАЩИЙ С ТЕПЛОПРОВОДНЫМИ ЖИДКОСТЯМИ

Л. А. Толоконников, Н. В. Ларин

Тульский государственный университет, 300012 Тула, Россия
E-mails: tolokonnikovla@mail.ru, larinaelen@mail.ru

Получено аналитическое решение задачи о прохождении плоской звуковой волны через термоупругий дискретно-неоднородный слой, граничащий с невязкими теплопроводными жидкостями. Приведены результаты расчетов зависимостей коэффициента прозрачности от угла падения волны и частоты для дискретно-неоднородного и непрерывно-неоднородного термоупругих слоев. Показано, что непрерывно-неоднородный по толщине термоупругий слой можно моделировать системой однородных термоупругих слоев.

Ключевые слова: отражение и прохождение звука, неоднородный термоупругий слой, теплопроводная жидкость.

DOI: 10.15372/PMTF20170111

С помощью покрытия в виде непрерывно-неоднородного по толщине слоя можно изменять звукоотражающие характеристики тела в заданных направлениях, определив соответствующие законы неоднородности материала покрытия. Такое покрытие можно создать с помощью системы однородных слоев материалов с различными физико-механическими параметрами. Слоистые структуры являются наиболее простыми в изготовлении. С математической точки зрения многослойная структура эквивалентна аппроксимации непрерывных функций, характеризующих переменные параметры непрерывно-неоднородного слоя, кусочно-постоянными функциями.

Исследованию прохождения звука через систему однородных упругих плоских слоев посвящено большое количество работ (см., например, [1, 2]). При этом тепловые процессы в упругих слоях не учитывались. Прохождение звуковых волн через плоский неоднородный изотропный упругий слой рассматривалось в работе [3]. Работа [4] посвящена изучению прохождения звука через трансверсально-изотропный неоднородный упругий слой. В [5] рассматривалась задача об отражении и преломлении плоской звуковой волны неоднородным упругим слоем, материал которого обладает анизотропией общего вида. Прохождение звука через неоднородный анизотропный слой, граничащий с вязкими жидкостями, исследовалось в [6]. В [7] изучалось прохождение плоской звуковой волны через неоднородный термоупругий слой. Показано, что термоупругость материала слоя существенно влияет на характер отражения и прохождения звука, причем степень этого влияния зависит от

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16-41-710083) и Правительства Тульской области.

© Толоконников Л. А., Ларин Н. В., 2017

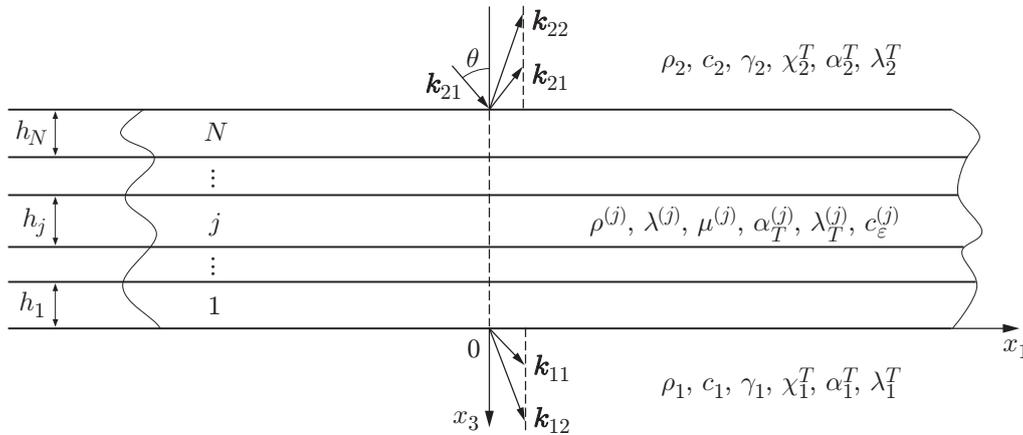


Рис. 1. Схема задачи

физико-механических характеристик материала. В [8] определены законы неоднородности плоского упругого слоя с заданными звукоотражающими свойствами.

В данной работе решается задача о прохождении плоской монохроматической звуковой волны через термоупругий дискретно-неоднородный плоский слой, граничащий с невязкими теплопроводными жидкостями. Обсуждается возможность моделирования непрерывно-неоднородного термоупругого слоя системой термоупругих однородных слоев, имеющих разные физико-механические параметры.

1. Постановка задачи. Рассмотрим граничащую с жидкими полупространствами термоупругую дискретно-слоистую среду, состоящую из N ($N \geq 2$) однородных изотропных термоупругих плоских слоев (рис. 1). Каждый j -й слой ($j = 1, 2, \dots, N$) имеет толщину h_j . Материал j -го слоя имеет плотность $\rho^{(j)}$, упругие постоянные Ламе $\lambda^{(j)}$ и $\mu^{(j)}$, температурный коэффициент линейного расширения $\alpha_T^{(j)}$, теплопроводность $\lambda_T^{(j)}$, объемную теплоемкость $c_\varepsilon^{(j)}$. Источники тепла в термоупругой слоистой среде отсутствуют.

Система декартовых координат (x_1, x_2, x_3) выбрана таким образом, что ось x_1 лежит на границе раздела первого слоя и жидкости, ось x_3 направлена вниз по нормали к поверхностям слоев.

Нижнее ($r = 1$) и верхнее ($r = 2$) полупространства заполнены невязкими теплопроводными однородными сжимаемыми жидкостями, имеющими плотность ρ_r , скорость звука c_r , отношение удельных теплоемкостей при постоянных давлении и объеме γ_r , температуропроводность χ_r^T , коэффициент температурного расширения α_r^T , теплопроводность λ_r^T . Считаем, что в невозмущенном состоянии твердая и жидкие среды имеют одну и ту же постоянную температуру T_0 .

Пусть из верхнего полупространства на границу раздела N -го слоя и жидкости падает плоская звуковая волна, потенциал скоростей которой равен

$$\Psi = A \exp \{i[k_{21}^1 x_1 + k_{21}^3 (x_3 + H_N) - \omega t]\}.$$

Здесь A — амплитуда волны; $k_{21}^1 = k_{21} \sin \theta$, $k_{21}^3 = k_{21} \cos \theta$ — проекции волнового вектора падающей волны \mathbf{k}_{21} на оси координат x_1 и x_3 соответственно; k_{21} — волновое число в верхнем полупространстве; θ — угол падения волны; ω — круговая частота;

$H_N = \sum_{j=1}^N h_j$ — толщина многослойной системы. Временной множитель $\exp(-i\omega t)$ далее опускается.

Определим характеристики отраженных и прошедших через систему слоев акустических волн.

2. Уравнения волновых полей. Полагается, что волновой вектор падающей волны находится в плоскости (x_1, x_3) и, следовательно, возбуждающее поле не зависит от координаты x_2 , а составляющие систему термоупругие слои являются изотропными однородными. Тогда отраженные от системы слоев, прошедшие через нее и возбужденные в слоях волны не зависят от координаты x_2 . Кроме того, в каждом слое системы отсутствует смещение частиц термоупругой среды вдоль оси x_2 .

Выражение для скорости частиц жидкости в нижнем ($r = 1$) и верхнем ($r = 2$) полупространствах представим в виде

$$\mathbf{v}_r = \text{grad}(\Psi_{r1} + \Psi_{r2}), \quad r = 1, 2.$$

Потенциалы скоростей звуковых Ψ_{r1} и тепловых Ψ_{r2} волн являются решениями уравнений Гельмгольца

$$\Delta \Psi_{rs} + k_{rs}^2 \Psi_{rs} = 0, \quad r = 1, 2, \quad s = 1, 2,$$

где $\Psi_{21} = \Psi + \Psi'_{21}$; Ψ'_{21} — потенциал скоростей отраженной звуковой волны; k_{r1}, k_{r2} — волновые числа звуковых и тепловых волн в r -м полупространстве соответственно. При этом в предположении малости температуропроводности жидкостей ($\omega \chi_r^T / c_r^2 \ll 1$) справедливы соотношения

$$k_{r1} = \frac{\omega}{c_r}, \quad k_{r2} = \eta_r(1 + i), \quad \eta_r = \left(\frac{\omega \gamma_r}{2 \chi_r^T} \right)^{1/2}, \quad r = 1, 2.$$

Потенциалы скоростей отраженных и прошедших через систему слоев звуковых и тепловых волн будем искать в виде

$$\begin{aligned} \Psi'_{21} &= V_1 \exp \{i[k_{21}^1 x_1 - k_{21}^3(x_3 + H_N)]\}, & \Psi_{22} &= V_2 \exp \{i[k_{22}^1 x_1 - k_{22}^3(x_3 + H_N)]\}, \\ \Psi_{1s} &= W_s \exp [i(k_{1s}^1 x_1 + k_{1s}^3 x_3)], & & s = 1, 2, \end{aligned} \quad (1)$$

где V_s, W_s ($s = 1, 2$) — коэффициенты отражения и прохождения (прозрачности) соответственно; k_{rs}^m ($m = 1, 3$) — проекция волнового вектора \mathbf{k}_{rs} на ось x_m , причем $(k_{rs}^1)^2 + (k_{rs}^3)^2 = k_{rs}^2$. Согласно закону Снеллиуса $k_{11}^1 = k_{12}^1 = k_{22}^1 = k_{21}^1$ [1].

Определим волновые поля в однородном изотропном термоупругом j -м ($j = 1, 2, \dots, N$) слое системы на основе линейной связанной динамической задачи термоупругости [9]. Смещение частиц в j -м слое представим в виде

$$\mathbf{u}^{(j)} = \text{grad}(\Phi_1^{(j)} + \Phi_2^{(j)}) + \text{rot} \Phi_3^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

где потенциалы $\Phi_1^{(j)}, \Phi_2^{(j)}, \Phi_3^{(j)}$ являются решениями уравнений

$$\Delta \Phi_s^{(j)} + \varkappa_s^{(j)2} \Phi_s^{(j)} = 0, \quad \Delta \Phi_3^{(j)} + \varkappa_3^{(j)2} \Phi_3^{(j)} = 0, \quad s = 1, 2, \quad (3)$$

$\varkappa_s^{(j)}, \varkappa_3^{(j)}$ — волновые числа продольных термоупругих и поперечных упругих волн соответственно. При этом

$$\begin{aligned} \varkappa_s^{(j)2} &= \frac{k_l^{(j)2}}{2} \left[1 + \delta^{(j)}(1 + \varepsilon^{(j)}) - (-1)^s \sqrt{1 - 2\delta^{(j)}(1 - \varepsilon^{(j)}) + (\delta^{(j)}(1 + \varepsilon^{(j)}))^2} \right], \\ \varkappa_3^{(j)} &= \frac{\omega}{c_r^{(j)}}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad s = 1, 2, \end{aligned}$$

где

$$\delta^{(j)} = \left(\frac{k_T^{(j)}}{k_l^{(j)}} \right)^2, \quad k_T^{(j)} = \eta_T^{(j)}(1 + i), \quad k_l^{(j)} = \frac{\omega}{c_l^{(j)}}, \quad \eta_T^{(j)} = \left(\frac{\omega}{2\chi_T^{(j)}} \right)^{1/2},$$

$$c_l^{(j)} = \left(\frac{\lambda^{(j)} + 2\mu^{(j)}}{\rho^{(j)}} \right)^{1/2}, \quad c_\tau^{(j)} = \left(\frac{\mu^{(j)}}{\rho^{(j)}} \right)^{1/2}, \quad \chi_T^{(j)} = \frac{\lambda_T^{(j)}}{c_\varepsilon^{(j)}}, \quad \varepsilon^{(j)} = \frac{(3\lambda^{(j)} + 2\mu^{(j)})^2 \alpha_T^{(j)2} T_0}{(\lambda^{(j)} + 2\mu^{(j)}) c_\varepsilon^{(j)}},$$

$k_T^{(j)}, k_l^{(j)}$ — волновые числа продольных тепловых и упругих волн соответственно; $c_l^{(j)}, c_\tau^{(j)}$ — скорости продольных и поперечных упругих волн соответственно; $\chi_T^{(j)}$ — температуропроводность; $\varepsilon^{(j)}$ — параметр связанности.

Так как рассматриваемая дифракционная задача является двумерной, то $\Phi_3^{(j)} = \Phi_3^{(j)}(x_1, x_3) \mathbf{e}_2$, где \mathbf{e}_2 — орт оси x_2 . Тогда векторное уравнение (3) сводится к одному скалярному уравнению Гельмгольца.

Решения уравнений (3) будем искать в виде

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(j)} &= B_1^{(j)} \exp [i(\kappa_{11}^{(j)} x_1 + \kappa_{13}^{(j)} x_3)] + B_2^{(j)} \exp [i(\kappa_{11}^{(j)} x_1 - \kappa_{13}^{(j)} x_3)], \\ \Phi_2^{(j)} &= C_1^{(j)} \exp [i(\kappa_{21}^{(j)} x_1 + \kappa_{23}^{(j)} x_3)] + C_2^{(j)} \exp [i(\kappa_{21}^{(j)} x_1 - \kappa_{23}^{(j)} x_3)], \\ \Phi_3^{(j)} &= D_1^{(j)} \exp [i(\kappa_{31}^{(j)} x_1 + \kappa_{33}^{(j)} x_3)] + D_2^{(j)} \exp [i(\kappa_{31}^{(j)} x_1 - \kappa_{33}^{(j)} x_3)], \end{aligned} \quad (4)$$

где $\kappa_{\nu m}^{(j)}$ ($\nu = 1, 2, 3, m = 1, 3$) — проекция волнового вектора $\boldsymbol{\kappa}_\nu^{(j)}$ на ось x_m , причем $\kappa_{\nu 1}^{(j)2} + \kappa_{\nu 3}^{(j)2} = \kappa_\nu^{(j)2}$. Согласно закону Снеллиуса $\kappa_{11}^{(j)} = \kappa_{21}^{(j)} = \kappa_{31}^{(j)} = k_1^{(j)}$.

Коэффициенты $V_s, W_s, B_s^{(j)}, C_s^{(j)}, D_s^{(j)}$ ($s = 1, 2$) в выражениях (1), (4) должны быть определены из граничных условий.

На соприкасающихся с жидкостями поверхностях первого и N -го термоупругих слоев граничные условия включают равенство нормальных скоростей частиц термоупругой среды и жидкости, условие отсутствия касательных напряжений, равенство нормального напряжения и акустического давления, условие непрерывности акустической температуры и теплового потока:

$$\begin{aligned} x_3 = 0: \quad & -i\omega u_3^{(1)} = v_{1n}, \quad \sigma_{13}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{33}^{(1)} = -p_1, \\ & T^{(1)} = T_1, \quad \lambda_T^{(1)} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial x_3} = \lambda_1^T \frac{\partial T_1}{\partial x_3}, \\ x_3 = -H_N: \quad & -i\omega u_3^{(N)} = v_{2n}, \quad \sigma_{13}^{(N)} = 0, \quad \sigma_{33}^{(N)} = -p_2, \\ & T^{(N)} = T_2, \quad \lambda_T^{(N)} \frac{\partial T^{(N)}}{\partial x_3} = \lambda_2^T \frac{\partial T_2}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (5)$$

На поверхностях, разделяющих термоупругие слои, должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц термоупругих сред, тангенциальные и нормальные напряжения, температура и тепловой поток:

$$\begin{aligned} x_3 = -H_{\alpha-1}: \quad & u_1^{(\alpha-1)} = u_1^{(\alpha)}, \quad u_3^{(\alpha-1)} = u_3^{(\alpha)}, \quad \sigma_{13}^{(\alpha-1)} = \sigma_{13}^{(\alpha)}, \quad \sigma_{33}^{(\alpha-1)} = \sigma_{33}^{(\alpha)}, \\ & T^{(\alpha-1)} = T^{(\alpha)}, \quad \lambda_T^{(\alpha-1)} \frac{\partial T^{(\alpha-1)}}{\partial x_3} = \lambda_T^{(\alpha)} \frac{\partial T^{(\alpha)}}{\partial x_3}, \quad \alpha = 2, 3, \dots, N. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $H_{\alpha-1} = \sum_{\gamma=1}^{\alpha-1} h_\gamma$.

Нормальные компоненты скоростей частиц жидкости v_{rn} , акустические давления p_r и акустические температуры T_r определяются выражениями

$$v_{rn} = \frac{\partial (\Psi_{r1} + \Psi_{r2})}{\partial x_3}, \quad p_r = i\omega \rho_r (\Psi_{r1} + \Psi_{r2}),$$

$$T_r = \frac{i}{\alpha_r^T} \left(\frac{\omega \gamma_r}{c_r^2} (\Psi_{r1} + \Psi_{r2}) + \frac{1}{\omega} \Delta (\Psi_{r1} + \Psi_{r2}) \right), \quad r = 1, 2,$$

компоненты тензора напряжений $\sigma_{m3}^{(j)}$ связаны с компонентами тензора деформаций $\varepsilon_{m3}^{(j)}$ и возмущенной температурой j -го слоя $T^{(j)}$ соотношениями Дюгамеля — Неймана [9]

$$\sigma_{m3}^{(j)} = 2\mu^{(j)} \varepsilon_{m3}^{(j)} + [\lambda^{(j)} \operatorname{div} \mathbf{u}^{(j)} - (3\lambda^{(j)} + 2\mu^{(j)}) \alpha_T^{(j)} T^{(j)}] \delta_{m3}, \quad m = 1, 3, \quad (7)$$

где

$$\varepsilon_{m3}^{(j)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m^{(j)}}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial x_m} \right), \quad \operatorname{div} \mathbf{u}^{(j)} = \frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3^{(j)}}{\partial x_3},$$

$$T^{(j)} = \frac{\lambda^{(j)} + 2\mu^{(j)}}{(3\lambda^{(j)} + 2\mu^{(j)}) \alpha_T^{(j)}} [k_l^{(j)2} (\Phi_1^{(j)} + \Phi_2^{(j)}) + \Delta (\Phi_1^{(j)} + \Phi_2^{(j)})], \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

δ_{m3} — символ Кронекера. При этом на основе представления (2) составляющие вектора смещения $\mathbf{u}^{(j)}$ принимают вид

$$u_1^{(j)} = \frac{\partial (\Phi_1^{(j)} + \Phi_2^{(j)})}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_3^{(j)}}{\partial x_3}, \quad u_3^{(j)} = \frac{\partial (\Phi_1^{(j)} + \Phi_2^{(j)})}{\partial x_3} + \frac{\partial \Phi_3^{(j)}}{\partial x_1}. \quad (8)$$

Для того чтобы решить данную задачу, необходимо построить с помощью всех граничных условий систему $6N + 4$ линейных алгебраических уравнений относительно такого же числа неизвестных коэффициентов в выражениях (1), (4), а затем решить эту систему. Однако более целесообразно использовать для решения рассматриваемой задачи матричный метод [10, 11].

Составляющие вектора смещения $u_1^{(j)}$, $u_3^{(j)}$, компоненты тензора напряжений $\sigma_{13}^{(j)}$, $\sigma_{33}^{(j)}$, изменение температуры $T^{(j)}$ и тепловой поток $\lambda_T^{(j)} \partial T^{(j)} / \partial x_3$ будем искать в виде

$$\left(u_1^{(j)}, u_3^{(j)}, \sigma_{13}^{(j)}, \sigma_{33}^{(j)}, T^{(j)}, \lambda_T^{(j)} \frac{\partial T^{(j)}}{\partial x_3} \right)^T (x_1, x_3) = \mathbf{S}^{(j)}(x_3) \exp(ik_{21}^1 x_1), \quad (9)$$

где

$$\mathbf{S}^{(j)}(x_3) = (s_1^{(j)}(x_3), s_2^{(j)}(x_3), s_3^{(j)}(x_3), s_4^{(j)}(x_3), s_5^{(j)}(x_3), s_6^{(j)}(x_3))^T, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Введем вектор коэффициентов

$$\mathbf{K}^{(j)} = (B_1^{(j)}, B_2^{(j)}, C_1^{(j)}, C_2^{(j)}, D_1^{(j)}, D_2^{(j)})^T.$$

Связь между векторами $\mathbf{S}^{(j)}(x_3)$ и $\mathbf{K}^{(j)}$ определяется формулой

$$\mathbf{S}^{(j)}(x_3) = M^{(j)}(x_3) \mathbf{K}^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (10)$$

где $M^{(j)}(x_3)$ — матрица шестого порядка с элементами, которые являются функциями координаты x_3 ($-H_j \leq x_3 \leq -H_{j-1}$, $H_0 = 0$). С учетом выражений (7)–(9) получаем

$$M_{1s}^{(j)} = ik_{21}^1 \exp[(-1)^{s+1} i\chi_{13}^{(j)} x_3], \quad M_{1,s+2}^{(j)} = ik_{21}^1 \exp[(-1)^{s+1} i\chi_{23}^{(j)} x_3],$$

$$M_{1,s+4}^{(j)} = (-1)^s i\chi_{33}^{(j)} \exp[(-1)^{s+1} i\chi_{33}^{(j)} x_3], \quad M_{2s}^{(j)} = (-1)^{s+1} i\chi_{13}^{(j)} \exp[(-1)^{s+1} i\chi_{13}^{(j)} x_3],$$

$$M_{2,s+2}^{(j)} = (-1)^{s+1} i\chi_{23}^{(j)} \exp[(-1)^{s+1} i\chi_{23}^{(j)} x_3], \quad M_{2,s+4}^{(j)} = ik_{21}^1 \exp[(-1)^{s+1} i\chi_{33}^{(j)} x_3],$$

$$M_{3s}^{(j)} = (-1)^s 2\mu^{(j)} k_{21}^1 \chi_{13}^{(j)} \exp[(-1)^{s+1} i\chi_{13}^{(j)} x_3],$$

$$\begin{aligned}
M_{3,s+2}^{(j)} &= (-1)^s 2\mu^{(j)} k_{21}^1 \varkappa_{23}^{(j)} \exp [(-1)^{s+1} i \varkappa_{23}^{(j)} x_3], \\
M_{3,s+4}^{(j)} &= \mu^{(j)} [\varkappa_{33}^{(j)2} - (k_{21}^1)^2] \exp [(-1)^{s+1} i \varkappa_{33}^{(j)} x_3], \\
M_{4s}^{(j)} &= f^{(j)} \exp [(-1)^{s+1} i \varkappa_{13}^{(j)} x_3], \quad M_{4,s+2}^{(j)} = f^{(j)} \exp [(-1)^{s+1} i \varkappa_{23}^{(j)} x_3], \\
M_{4,s+4}^{(j)} &= (-1)^s 2\mu^{(j)} k_{21}^1 \varkappa_{33}^{(j)} \exp [(-1)^{s+1} i \varkappa_{33}^{(j)} x_3], \\
M_{5s}^{(j)} &= \beta^{(j)} [k_l^{(j)2} - \varkappa_1^{(j)2}] \exp [(-1)^{s+1} i \varkappa_{13}^{(j)} x_3], \\
M_{5,s+2}^{(j)} &= \beta^{(j)} [k_l^{(j)2} - \varkappa_2^{(j)2}] \exp [(-1)^{s+1} i \varkappa_{23}^{(j)} x_3], \quad M_{5,s+4}^{(j)} = M_{6,s+4}^{(j)} = 0, \\
M_{6s}^{(j)} &= (-1)^{s+1} i \varkappa_{13}^{(j)} \lambda_T^{(j)} M_{5s}^{(j)}, \quad M_{6,s+2}^{(j)} = (-1)^{s+1} i \varkappa_{23}^{(j)} \lambda_T^{(j)} M_{5,s+2}^{(j)}, \quad s = 1, 2,
\end{aligned}$$

где

$$f^{(j)} = 2\mu^{(j)} (k_{21}^1)^2 - (\lambda^{(j)} + 2\mu^{(j)}) k_l^{(j)2}, \quad \beta^{(j)} = \frac{\lambda^{(j)} + 2\mu^{(j)}}{(3\lambda^{(j)} + 2\mu^{(j)}) \alpha_T^{(j)}}, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Рассмотрим произвольный j -й слой ($j = 1, 2, \dots, N$). На границах этого слоя $x_3 = -H_{j-1}$ и $x_3 = -H_j$ из равенств (10) получаем соотношения

$$\mathbf{S}^{(j)}(-H_{j-1}) = M^{(j)}(-H_{j-1}) \mathbf{K}^{(j)}, \quad \mathbf{S}^{(j)}(-H_j) = M^{(j)}(-H_j) \mathbf{K}^{(j)}.$$

Так как внутри j -го слоя вектор $\mathbf{K}^{(j)}$ не меняется, то имеем

$$\mathbf{S}^{(j)}(-H_j) = M^{(j)}(-H_j) [M^{(j)}(-H_{j-1})]^{-1} \mathbf{S}^{(j)}(-H_{j-1}), \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (11)$$

Подставляя выражения (9) в граничные условия (6), при $x_3 = -H_{\alpha-1}$ находим

$$\mathbf{S}^{(\alpha)}(-H_{\alpha-1}) = \mathbf{S}^{(\alpha-1)}(-H_{\alpha-1}), \quad \alpha = 2, 3, \dots, N.$$

Тогда соотношение (11) записывается в виде

$$\mathbf{S}^{(\alpha)}(-H_{\alpha}) = P^{(\alpha)} \mathbf{S}^{(\alpha-1)}(-H_{\alpha-1}), \quad \alpha = 2, 3, \dots, N, \quad \mathbf{S}^{(1)}(-H_1) = P^{(1)} \mathbf{S}^{(1)}(0), \quad (12)$$

где $P^{(\alpha)} = M^{(\alpha)}(-H_{\alpha}) [M^{(\alpha)}(-H_{\alpha-1})]^{-1}$.

Используя формулы (12) для каждого слоя, получаем соотношение

$$\mathbf{S}^{(N)}(-H_N) = P \mathbf{S}^{(1)}(0), \quad P = P^{(N)} P^{(N-1)} \dots P^{(1)}, \quad (13)$$

из которого следует

$$s_l^{(N)}(-H_N) = \sum_{k=1}^6 p_{lk} s_k^{(1)}(0), \quad l = 2, 3, \dots, 6 \quad (14)$$

(p_{lk} — элементы матрицы P).

Равенство первых компонент векторов в левой и правой частях равенства (13) не учитывается, так как на границе раздела термоупругой среды и жидкости условие непрерывности тангенциальной компоненты вектора смещения не выполняется.

Подставляя выражения (9) в граничные условия (5), находим

$$\begin{aligned}
s_2^{(1)}(0) &= -\frac{1}{\omega} (k_{11}^3 W_1 + k_{12}^3 W_2), \quad s_3^{(1)}(0) = 0, \\
s_4^{(1)}(0) &= -i\omega \rho_1 (W_1 + W_2), \quad s_5^{(1)}(0) = \xi_{11} W_1 + \xi_{12} W_2, \\
s_6^{(1)}(0) &= ik_{11}^3 \lambda_1^T \xi_{11} W_1 + ik_{12}^3 \lambda_1^T \xi_{12} W_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_2^{(N)}(-H_N) &= -\frac{1}{\omega} (k_{21}^3 A - k_{21}^3 V_1 - k_{22}^3 V_2), & s_3^{(N)}(-H_N) &= 0, \\
s_4^{(N)}(-H_N) &= -i\omega\rho_2(A + V_1 + V_2), & s_5^{(N)}(-H_N) &= \xi_{21}A + \xi_{21}V_1 + \xi_{22}V_2, \\
s_6^{(N)}(-H_N) &= ik_{21}^3\lambda_2^T\xi_{21}A - ik_{21}^3\lambda_2^T\xi_{21}V_1 - ik_{22}^3\lambda_2^T\xi_{22}V_2.
\end{aligned} \tag{15}$$

Подставляя выражения (15) в равенства (14), получаем систему пяти линейных алгебраических уравнений с неизвестными $V_1, V_2, W_1, W_2, s_1^{(1)}(0)$. Определив эти коэффициенты, можно аналитически описать волновые поля в верхнем и нижнем полупространствах, а также в термоупругих слоях.

3. Результаты расчетов. На основе полученного решения задачи показана возможность моделирования непрерывно-неоднородного материала термоупругой пластины толщиной H_N системой плоских слоев из однородных термоупругих материалов.

Проведены расчеты коэффициента прозрачности I по формуле

$$I = \frac{\rho_1 c_2}{\rho_2 c_1} \left| \frac{W_1}{A} \right|^2$$

для термоупругих пластин толщиной $H_N = 0,005$ м, находящихся в воде ($\rho_1 = \rho_2 = 1000$ кг/м³, $c_1 = c_2 = 1485$ м/с, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1,006$, $\alpha_1^T = \alpha_2^T = 2,1 \cdot 10^{-4}$ К⁻¹, $\lambda_1^T = \lambda_2^T = 0,59$ Вт/(м·К), $\chi_1^T = \chi_2^T = 1,43 \cdot 10^{-7}$ м²/с, $T_0 = 293$ К). Амплитуда падающей волны полагалась равной единице, а материал пластин (поливинилбутираль) имел следующие физико-механические характеристики: плотность $\rho_0 = 1070$ кг/м³, упругие постоянные Ламе $\lambda_0 = 3,9 \cdot 10^9$ Н/м² и $\mu_0 = 9,8 \cdot 10^8$ Н/м², температурный коэффициент линейного расширения $\alpha_T^0 = 2,3 \cdot 10^{-4}$ К⁻¹, теплопроводность $\lambda_T^0 = 0,2$ Вт/(м·К), объемная теплоемкость $c_\varepsilon^0 = 1,2 \cdot 10^6$ Дж/(м³·К).

Вычислительный эксперимент проводился как для пластины из непрерывно-неоднородного материала, так и для многослойной пластины. В случае непрерывно-неоднородного материала расчеты выполнялись с использованием полученных ранее результатов [7]. При этом неоднородность материала задавалась зависимостями

$$\begin{aligned}
\rho(x_3) &= \rho_0 f_1(x_3), & \lambda(x_3) &= \lambda_0 f_2(x_3), & \mu(x_3) &= \mu_0 f_3(x_3), \\
\alpha_T(x_3) &= \alpha_T^0 f_4(x_3), & \lambda_T(x_3) &= \lambda_T^0 f_5(x_3), & c_\varepsilon(x_3) &= c_\varepsilon^0 f_6(x_3), & -H_N \leq x_3 \leq 0,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
f_k(x_3) &= A_k x_3^2 + B_k x_3 + C_k, & k &= 1, 2, \dots, 6, \\
A_1 &= A_2 = A_3 = A_6 = 0, & A_4 &= -2,5/H_N^2, & A_5 &= 2/H_N^2, \\
B_1 &= B_2 = 0,5/H_N, & B_3 &= 0,4/H_N, & B_4 &= -2,75/H_N, & B_5 &= 2,2/H_N, & B_6 &= 0,2/H_N, \\
C_1 &= 1,25, & C_2 &= 1,3, & C_3 &= C_6 = 1,1, & C_4 &= 0,5, & C_5 &= 1,3.
\end{aligned}$$

Для многослойной пластины коэффициент прозрачности был рассчитан для одинаковых по толщине однородных термоупругих слоев для $N = 2, 4, 10$. При этом распределения физико-механических характеристик по толщине дискретно-слоистого материала пластины определялись на основе кусочно-постоянной аппроксимации функций $f_k(x_3)$ ($k = 1, 2, \dots, 6$) на интервале $[-H_N, 0]$:

$$\begin{aligned}
\varphi^{(1)} &= \varphi(-H_1/2), & -H_1 &\leq x_3 \leq 0, \\
\varphi^{(\alpha)} &= \varphi(-(H_{\alpha-1} + H_\alpha)/2), & -H_\alpha &\leq x_3 < -H_{\alpha-1}, & \alpha &= 2, 3, \dots, N.
\end{aligned}$$

Здесь $\varphi = \rho, \lambda, \mu, \alpha_T, \lambda_T, c_\varepsilon$.

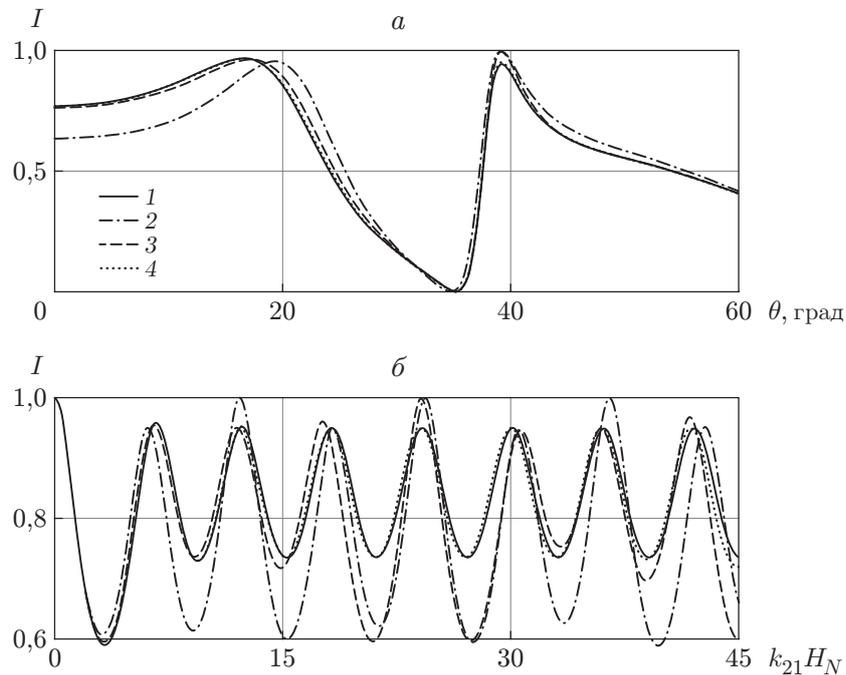


Рис. 2. Зависимости коэффициента прозрачности от угла падения волны (а) и волнового числа (б) для различных материалов:

1 — непрерывно-слоистый термоупругий материал, 2–4 — дискретно-слоистый материал с однородными термоупругими слоями (2 — $N = 2$, 3 — $N = 4$, 4 — $N = 10$)

На рис. 2 представлены зависимости коэффициента прозрачности I от угла падения звуковой волны в интервале $0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$ при значении волнового числа пластины $k_{21}H_N = 8,5$ и от волнового числа, изменяющегося в интервале $0 < k_{21}H_N \leq 45$, при падении волны по нормали к поверхности. На рис. 2, а видно, что линии 1, 4 практически совпадают. Из рис. 2 следует, что с увеличением количества однородных слоев в многослойной пластине кривые зависимостей коэффициента прозрачности от угла падения волны и волнового числа для непрерывно-слоистого и дискретно-слоистого материалов сближаются. Это свидетельствует о возможности моделирования непрерывно-неоднородной термоупругой пластины пластиной, состоящей из системы однородных термоупругих плоских слоев.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
2. Шендеров Е. А. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972.
3. Приходько В. Ю., Тютюкин В. В. Расчет коэффициента отражения звуковых волн от твердых слоисто-неоднородных сред // Акуст. журн. 1986. Т. 32, вып. 2. С. 212–218.
4. Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Прохождение звуковых волн через трансверсально-изотропный неоднородный плоский слой // Акуст. журн. 1990. Т. 36, вып. 4. С. 740–744.
5. Толоконников Л. А. Отражение и преломление плоской звуковой волны анизотропным неоднородным слоем // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 5. С. 179–184.
6. Толоконников Л. А. Прохождение звука через неоднородный анизотропный слой, граничащий с вязкими жидкостями // Прикл. математика и механика. 1998. Т. 62, вып. 6. С. 1029–1035.

7. **Ларин Н. В., Толоконников Л. А.** Прохождение плоской звуковой волны через неоднородный термоупругий слой // Прикл. математика и механика. 2006. Т. 70, вып. 4. С. 650–659.
8. **Ларин Н. В., Скобельцын С. А., Толоконников Л. А.** Определение законов неоднородности плоского упругого слоя с заданными звукоотражающими свойствами // Акуст. журн. 2015. Т. 61, № 5. С. 552–558.
9. **Коваленко А. Д.** Основы термоупругости. Киев: Наук. думка, 1970.
10. **Молотков Л. А.** Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах. Л.: Наука. Ленингр. отд-ние, 1984.
11. **Бреховских Л. М.** Акустика слоистых сред / Л. М. Бреховских, О. А. Годин. М.: Наука, 1989.

Поступила в редакцию 25/XII 2015 г.
