

УДК 533.951+517.948

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В КВАЗИНЕЙТРАЛЬНОЙ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЕ

А. К. Хе, А. А. Чесноков

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск
E-mail: chesnokov@hydro.nsc.ru

Для нелинейного кинетического уравнения, описывающего одномерное движение квазинейтральной бесстолкновительной плазмы, определены скорости распространения возмущений и сформулированы условия обобщенной гиперболичности. В классе бегущих волн построены и физически интерпретированы точные (в том числе периодические) решения модели. Предложены дифференциальные законы сохранения, аппроксимирующие исходное интегродифференциальное уравнение. На основе этих законов выполнены численные расчеты распространения волн, показывающие возможность кинетического опрокидывания функции распределения.

Ключевые слова: квазинейтральная плазма, интегродифференциальные уравнения, гиперболичность, нелинейные волны, законы сохранения.

1. Математическая модель. При моделировании течений плазмы квазинейтральное приближение является аналогом теории длинных волн. Такое приближение применяется при рассмотрении движений с характерными размерами, существенно превышающими дебаевский радиус R_D . Параметр R_D определяет максимальный масштаб разделения зарядов в плазме: при больших по сравнению с величиной R_D смещениях электронов движение частиц под действием электрического поля приводит к быстрому восстановлению нейтральности. В одномерном случае в отсутствие магнитного поля уравнение движения квазинейтральной бесстолкновительной плазмы имеет вид [1]

$$\frac{\partial f^1}{\partial t} + u \frac{\partial f^1}{\partial x} - \frac{e}{M_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f^1}{\partial u} = 0, \quad \varphi = \frac{T_e}{e} \ln \left(\frac{1}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} f^1 du \right). \quad (1)$$

Здесь $f^1(t, x, u)$ — функция распределения ионов; x, t — пространственная координата и время; $\varphi(t, x)$ — потенциал электрического поля; u, M_i — скорость и масса ионов; e, T_e — заряд и температура электронов; N_0 — плотность невозмущенной плазмы. Функция распределения электронов считается равновесной функцией Максвелла — Больцмана. Величины M_i, e, T_e, N_0 — заданные положительные постоянные.

В работе [1] исследованы автомодельные движения квазинейтральной разреженной плазмы, изучено явление ускорения ионов при свободном расширении плазмы и установле-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10-01-00338) и Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых (грант № МК-4417.2009.1), а также в рамках Федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (контракт № 02.740.11.0617) и Интеграционного проекта СО РАН № 65.

на возможность кинетического опрокидывания функции распределения для решений типа простых волн и волн гидродинамического типа.

Далее рассматриваются решения уравнения (1) в классе кусочно-непрерывных по переменной u функций с ограниченным носителем

$$f^1(t, x, u) = f(t, x, u)[\theta(u - v_0(t, x)) - \theta(u - v_1(t, x))], \quad (2)$$

где θ — функция Хевисайда; $v_0(t, x)$, $v_1(t, x)$ — границы интервала по переменной u , вне которого функция распределения $f^1(t, x, u)$ тождественно равна нулю; $f(t, x, u)$ — положительная непрерывно дифференцируемая на множестве $\{(t, x, u): t \geq 0, x \in \mathbb{R}, u \in [v_0, v_1]\}$ функция. Подставляя представление решения (2) в кинетическое уравнение (1), получаем интегродифференциальную систему уравнений для определения величин $f(t, x, u)$, $v_0(t, x)$ и $v_1(t, x)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{b}{n} \frac{\partial n}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} = 0, \quad n = \int_{v_0}^{v_1} f du \quad \left(b = \frac{T_e}{M_i}\right), \\ \frac{\partial v_0}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{b}{n} \frac{\partial n}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{b}{n} \frac{\partial n}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Для исследования свойств кинетической модели (3) целесообразно использовать полулагранжевы переменные x , λ , переход к которым осуществляется с помощью замены переменных [2, 3]

$$u = u(t, x, \lambda), \quad \bar{f}(t, x, \lambda) = f(t, x, u(t, x, \lambda)), \quad \lambda \in [0, 1],$$

где функция $u(t, x, \lambda)$ — решение задачи Коши

$$u_t + uu_x = -bn^{-1}n_x, \quad u|_{t=0} = u^0(x, \lambda).$$

Предполагается выполненным неравенство $u_\lambda > 0$, обеспечивающее обратимость замены переменных. При $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ функция $u(t, x, \lambda)$ принимает значения $v_0(t, x)$ и $v_1(t, x)$ соответственно. В результате для определения новых искомым функций $u(t, x, \lambda)$ и $H(t, x, \lambda) = u_\lambda \bar{f}$ получаем интегродифференциальную систему уравнений

$$u_t + uu_x + \frac{b}{n} \int_0^1 H_x d\lambda = 0, \quad H_t + (uH)_x = 0, \quad n = \int_0^1 H d\lambda. \quad (4)$$

Ниже на основе предложенного в [4] подхода найдены обобщенные характеристики уравнений (4) и сформулированы условия их гиперболичности.

Следует отметить еще одну возможную интерпретацию модели (3). Как известно, между кинетическим уравнением Власова и уравнениями Бенни [5], описывающими распространение длинных волн на мелкой воде, имеется аналогия [2]. В работе [6] выведена и исследована приближенная гидродинамическая модель плоскопараллельного сдвигового течения идеальной жидкости в канале большой протяженности с упругой стенкой

$$u_t + uu_x + vu_y + (p(h))_x = 0, \quad h_t + \left(\int_0^h u dy\right)_x = 0, \quad v = -\int_0^y u_x dy. \quad (5)$$

Здесь $u(t, x, y)$, $v(t, x, y)$ — горизонтальная и вертикальная компоненты вектора скорости; уравнениями $y = 0$ и $y = h(t, x)$ задаются стенки канала; замыкающее соотношение $p = p(h)$ определяет упругие свойства верхней стенки. Используются различные варианты

задания функции $p(h)$, в частности $p(h) = b \ln h + p_0$ (b, p_0 — постоянные). В этом случае уравнения длинных волн (5) (для течений с монотонным по глубине профилем скорости $u_y > 0$) преобразуются в уравнения кинетической модели квазинейтральной бесстолкновительной плазмы (3) путем введения новых зависимых переменных $f = 1/u_y$, $v_0 = u(t, x, 0)$, $v_1 = u(t, x, h)$ и независимых переменных t, x, u .

2. Обобщенные характеристики. Интегродифференциальные уравнения (4) относятся к классу систем с операторными коэффициентами, для которых в [3, 4] предложено обобщение понятий характеристик и гиперболичности. Систему (4) можно представить в виде

$$\mathbf{U}_t + A\langle \mathbf{U}_x \rangle = 0, \quad (6)$$

где $\mathbf{U} = (u, H)^T$ — вектор искомых величин; $A\langle \mathbf{U}_x \rangle$ — результат действия оператора A на вектор-функцию \mathbf{U}_x :

$$A\langle \mathbf{U}_x \rangle = \left(uu_x + \frac{b}{n} \int_0^1 H_x d\lambda, Hu_x + uH_x \right)^T,$$

верхний индекс t означает транспонирование.

Характеристика системы (6) задается уравнением $x'(t) = k(t, x)$, где k — собственное значение задачи

$$(\mathbf{F}, (A - kI)\langle \varphi \rangle) = 0, \quad (7)$$

нетривиальное решение которой относительно функционала $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ определяется в классе локально интегрируемых либо обобщенных функций. Функционал \mathbf{F} действует по переменной λ ; переменные t и x рассматриваются как параметры; I — тождественное отображение; φ — пробная гладкая вектор-функция с компонентами $\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda)$. В результате действия функционала \mathbf{F} на уравнение (6) получаем соотношение на характеристике $(\mathbf{F}, \mathbf{U}_t + k\mathbf{U}_x) = 0$. Система (6) является гиперболической, если все собственные значения k вещественные и соотношения на характеристиках эквивалентны исходным уравнениям (6).

Характеристические свойства интегродифференциальных моделей, аналогичных уравнениям (4), исследованы в работах [3, 7] и др., поэтому ниже приводится краткое решение задачи на собственные значения и формулируются (без доказательства) условия гиперболичности уравнений (4).

2.1. *Собственные функционалы и соотношения на характеристиках.* Из уравнений (7) с учетом независимости компонент вектор-функции φ получаем равенства

$$(F_1, (u - k)\varphi_1) + (F_2, H\varphi_1) = 0, \quad (F_1, 1) \frac{b}{n} \int_0^1 \varphi_2 d\lambda + (F_2, (u - k)\varphi_2) = 0. \quad (8)$$

Нетрудно убедиться в том, что при $k \neq u$ однородная система уравнений (8) имеет нетривиальные решения

$$(F_1^i, \psi) = \int_0^1 \frac{H\psi d\lambda}{(u - k^i)^2}, \quad (F_2^i, \psi) = - \int_0^1 \frac{\psi d\lambda}{u - k^i},$$

если $k = k^i$ является корнем характеристического уравнения

$$\chi(k) = 1 - \frac{b}{n} \int_0^1 \frac{H d\lambda}{(u - k)^2} = 0. \quad (9)$$

На рассматриваемом классе решений $H = u_\lambda \bar{f} > 0$, $u_\lambda > 0$ при $\lambda \in [0, 1]$. Поэтому характеристическое уравнение (9) имеет два вещественных корня $k = k^1$ и $k = k^2$, причем $k^1 < v_0 = u(t, x, 0)$, $k^2 > v_1 = u(t, x, 1)$.

Кроме того, спектральная задача (8) имеет непрерывный характеристический спектр $k = k^\nu = u(t, x, \nu)$, которому соответствуют собственные функционалы из класса обобщенных функций:

$$(F_1^{1\nu}, \psi(\lambda)) = -\psi'(\nu), \quad (F_2^{1\nu}, \psi(\lambda)) = \frac{u_\lambda}{H} \psi(\lambda)|_{\lambda=\nu},$$

$$(F_1^{2\nu}, \psi(\lambda)) = \psi(\nu) + \frac{b}{n} \int_0^1 \frac{H(\lambda)(\psi(\lambda) - \psi(\nu)) d\lambda}{(u(\lambda) - u(\nu))^2}, \quad (F_2^{2\nu}, \psi(\lambda)) = -\frac{b}{n} \int_0^1 \frac{\psi(\lambda) d\lambda}{u(\lambda) - u(\nu)}.$$

Здесь интегралы вычисляются в смысле главного значения; для упрощения записи зависимость функций от переменных t и x опущена. Данные функционалы являются обобщенными функциями, в частности $F_1^{1\nu} = \delta'(\lambda - \nu)$, $F_2^{1\nu} = u_\nu H^{-1} \delta(\lambda - \nu)$, где $\delta(\lambda - \nu)$, $\delta'(\lambda - \nu)$ — дельта-функция Дирака и ее производная.

В результате действия собственных функционалов \mathbf{F}^i , $\mathbf{F}^{i\nu}$ ($i = 1, 2$) на систему уравнений (6) получаем соотношения на характеристиках (характеристическую форму уравнений (4))

$$\frac{n(t, x)}{b} Du(t, x, \lambda) - D \int_0^1 \frac{H(t, x, \nu) d\nu}{u(t, x, \nu) - u(t, x, \lambda)} = 0, \quad D\bar{f}(t, x, \lambda) = 0,$$

$$\frac{n(t, x)}{b} D_i k^i(t, x) - D_i \int_0^1 \frac{H(t, x, \lambda) d\lambda}{u(t, x, \lambda) - k^i(t, x)} = 0 \quad (i = 1, 2),$$

где $D = \partial_t + u(t, x, \lambda) \partial_x$; $D_i = \partial_t + k^i(t, x) \partial_x$. Отметим, что в отличие от уравнений вихревой мелкой воды [4, 8] рассматриваемая модель (4) не приводится к интегральным инвариантам Римана, сохраняющимся вдоль характеристик.

2.2. Условия гиперболичности уравнений движения. Помимо вещественных корней $k^1 < v_0$ и $k^2 > v_1$ характеристическое уравнение (9) может иметь комплексные корни. По аналогии с [9] можно показать, что если на рассматриваемом решении интегродифференциальной системы (4) имеется комплексный корень $k = k_1 + ik_2$ ($k_2 \neq 0$) характеристического уравнения (9), то этот корень принадлежит подобласти круга $|k - (v_1 + v_0)/2| \leq (v_1 - v_0)/2$, т. е. справедлив аналог теоремы Ховарда о полукруге [10].

Согласно [4] уравнения движения (4) являются гиперболическими на рассматриваемом решении, если отсутствуют комплексные корни уравнения (9) и собственные функционалы \mathbf{F}^i , $\mathbf{F}^{i\nu}$ образуют полную систему (соотношения на характеристиках эквивалентны исходным уравнениям). Условия отсутствия комплексных корней характеристического уравнения (9) формулируются в терминах аналитической функции $\chi(z)$, а точнее, ее предельных значений $\chi^+(u)$ из верхней и $\chi^-(u)$ из нижней комплексных полуплоскостей на отрезке $[v_0, v_1]$:

$$\chi^\pm(u(\lambda)) = 1 + \frac{b}{n} \left(\frac{\bar{f}_1}{v_1 - u(\lambda)} - \frac{\bar{f}_0}{v_0 - u(\lambda)} - \int_0^1 \frac{\bar{f}_\nu d\nu}{u(\nu) - u(\lambda)} \mp \pi i \frac{\bar{f}_\lambda}{u_\lambda} \right). \quad (10)$$

Здесь i — мнимая единица; индексы 0 и 1 соответствуют положительным значениям функции $\bar{f}(t, x, \lambda)$ при $\lambda = +0$ и $\lambda = 1 - 0$. При вычислении предельных значений функции $\chi(z)$ в случае $z \rightarrow u \pm 0i$ использованы формулы Сохоцкого — Племеля.

Условия гиперболичности уравнений (4) формулируются в следующей теореме, доказательство которой опущено, поскольку совпадает с приведенными в [3, 7].

Теорема. *Условия*

$$\chi^+(u) \neq 0, \quad \Delta \arg \frac{\chi^+(u)}{\chi^-(u)} = 0 \quad (11)$$

($\Delta \arg \chi^\pm(u)$ — приращение аргумента комплексной функции $\chi^\pm(u)$ при изменении λ от 0 до 1 при фиксированных t, x) являются необходимыми и достаточными для гиперболичности уравнений (4), если функции $u(t, x, \lambda)$, $\bar{f}(t, x, \lambda) > 0$ дифференцируемы, а функции $u_\lambda > 0$, \bar{f}_λ удовлетворяют условию Гельдера по переменной $\lambda \in [0, 1]$.

Как отмечено выше, для характеристического уравнения (9) имеет место аналог теоремы Ховарда. Поэтому если в процессе эволюции течения впервые появляются комплексные корни уравнения $\chi(z) = 0$, то они ответвляются от тех точек отрезка $[v_0, v_1]$ непрерывного характеристического спектра, в которых выполнено равенство $\chi^\pm = 0$. Условие $\chi^+ \neq 0$ в (11) исключает этот случай и обеспечивает отсутствие корней уравнения (9) с ненулевой мнимой частью не только на заданном решении, но и на его достаточно малых гладких возмущениях.

2.3. *Пример проверки условий гиперболичности.* Условия (11) позволяют проверять, являются ли уравнения движения (4) гиперболическими на заданном решении $u(t, x, \lambda)$, $H(t, x, \lambda)$. Следуя [3], в плоскости (Z^1, Z^2) построим замкнутый контур C , состоящий из контуров C^+ и C^- . Контур C^+ параметрически задается уравнениями

$$Z^1 = m(u) \operatorname{Re} \{\chi^+(u)\}, \quad Z^2 = m(u) \operatorname{Im} \{\chi^+(u)\}.$$

Симметричный этому контуру относительно оси Z^1 контур C^- задается такими же уравнениями с функцией $\chi^-(u)$. В этих уравнениях комплексные функции $\chi^\pm(u)$ определены формулой (10); $m(u) = (v_1 - u)(u - v_0)$, $u \in [v_0, v_1]$. Если точка $Z^1 = 0$, $Z^2 = 0$ лежит внутри области, ограниченной контуром C , то характеристическое уравнение (9) имеет комплексные корни. В противном случае имеются только вещественные характеристические корни и уравнения движения на соответствующем решении являются гиперболическими.

Дисперсионные соотношения, аналогичные уравнению (9), возникают при исследовании распространения малых возмущений в плазме. В [11] с использованием диаграмм Найквиста показано, что решения, описываемые функциями распределения с одним максимумом, являются устойчивыми. Очевидно, что для функций распределения $f(u)$ с одним максимумом выполняется неравенство

$$(u_c - u)f'(u) \geq 0, \quad (12)$$

где $u = u_c$ — точка экстремума. Как отмечено в п. 1, рассматриваемая кинетическая модель имеет гидродинамическую интерпретацию и описывает сдвиговое движение жидкости в упругом канале. При этом распределение скорости по глубине $u = u(y)$ связано с функцией распределения $f = f(u)$ соотношением $u_y = 1/f$. Если условие (12) записать в терминах функции $u(y)$, то получим известный критерий устойчивости Фьертфта [10] для сдвиговых течений $u''(y)(u(y) - u_c) \geq 0$.

Условия гиперболичности (11) хорошо согласуются с известными критериями устойчивости, выведенными в рамках линейной теории. Нетрудно показать, что для функций распределения с одним локальным максимумом условия (11) выполнены. Действительно, условия (11) нарушаются, если точка $Z^1 = 0$, $Z^2 = 0$ находится в области, ограниченной контуром C . Поскольку

$$Z^1(v_0) = (v_1 - v_0)f_0 > 0, \quad Z^1(v_1) = (v_1 - v_0)f_1 > 0,$$

это возможно лишь в том случае, если в некоторой внутренней точке u_* , принадлежащей интервалу (v_0, v_1) , выполняются условия $Z^1(u_*) < 0$, $Z^2(u_*) = 0$. Равенство $Z^2(u) = 0$ выполняется только в одной внутренней точке $u = u_c$, в которой функция распределения достигает локального максимума. С использованием неравенства (12) получаем

$$Z^1(u_c) = m(u_c) + \frac{b}{n} \left((u_c - v_0)f_1 + (v_1 - u_c)f_0 + m(u_c) \int_{v_0}^{v_1} \frac{(u_c - v)f'(v) dv}{(u_c - v)^2} \right) > 0.$$

Следовательно, для функций распределения $f(u)$ с одним локальным максимумом условия гиперболичности (11) не могут быть нарушены.

Проверим выполнение условий (11) для функции распределения с двумя максимумами

$$f(u) = \frac{c_1}{9(u-d)^2 + 1} + \frac{c_2}{9(u+d)^2 + 1}, \quad u \in [-1, 1].$$

На рис. 1 показан график этой функции при $c_1 = c_2 = 0,6$, $d = 0,4$ (сплошная линия) и $c_1 = c_2 = d = 0,7$ (штриховая линия). На рис. 2 представлены соответствующие этим функциям контуры C^+ , обход по которым осуществляется в положительном направлении (против часовой стрелки). Параметр b , входящий в определение функций $\chi^\pm(u)$, выбран равным единице. Форма контуров C^- такая же, как у контуров C^+ (в силу симметрии функции f относительно оси $u = 0$), но обход по ним выполняется в отрицательном направлении. На рис. 2 видно, что условия гиперболичности (11) выполнены для функции распределения, максимумы которой расположены близко друг к другу (сплошная линия на рис. 1). Возникновение неустойчивости возможно в том случае, если максимумы находятся достаточно далеко друг от друга и имеют сравнительно большую амплитуду. Действительно, для распределения, показанного на рис. 1 штриховой линией, условия (11) нарушены. Аргумент функций $m(u)\chi^\pm(u)$ получает приращение (штриховая линия на рис. 2): $\Delta \arg \{m(u)\chi^+(u)\} = 2\pi$, $\Delta \arg \{m(u)\chi^-(u)\} = -2\pi$. Таким образом, $\Delta \arg \{\chi^+/\chi^-\} = 4\pi$, что означает наличие комплексного корня $k = k^3$ характеристического уравнения (9), а также комплексно-сопряженного корня $k = k^4$.

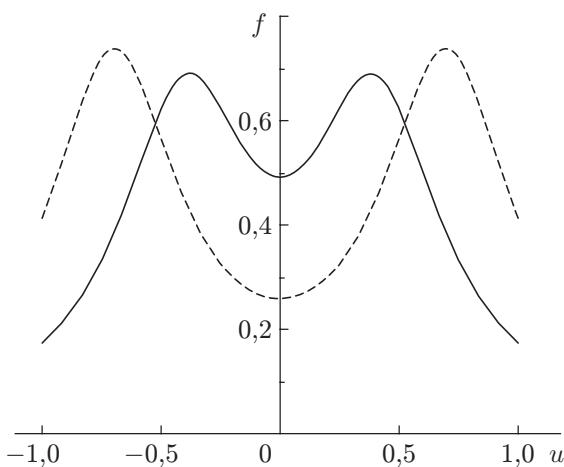


Рис. 1

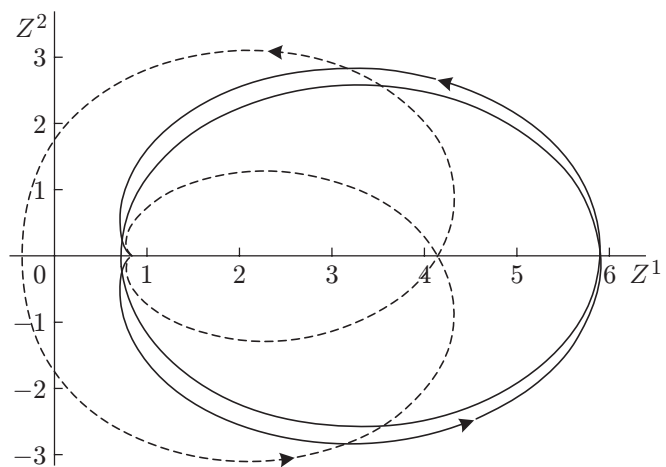


Рис. 2

Рис. 1. Функция распределения $f(u)$ с двумя максимумами:

сплошная линия — $c_1 = c_2 = 0,6$, $d = 0,4$; штриховая — $c_1 = c_2 = d = 0,7$

Рис. 2. Контур C^+ в плоскости (Z^1, Z^2) (обозначения те же, что на рис. 1)

3. Бегущие волны. Решение уравнений (3) вида $f = f(\zeta, u)$, $v_i = v_i(\zeta)$, $\zeta = x - Dt$ описывает бегущую волну, распространяющуюся с постоянной скоростью D . На этом классе решений система (3) принимает вид

$$(u - D)f_\zeta - \varphi_\zeta f_u = 0, \quad \varphi(\zeta) = b \ln \left(\int_{v_0}^{v_1} f du \right),$$

$$(v_i - D)v_{i\zeta} + \varphi_\zeta = 0 \quad (i = 0, 1).$$
(13)

Интегрируя первое уравнение в (13), получаем

$$f = \Psi(\eta), \quad \eta = (u - D)^2/2 + \varphi. \tag{14}$$

Решения вида (14), называемые волнами Бернштейна — Грина — Крускала (БГК-волнами) [12, 13], хорошо известны в теории бесстолкновительных кинетических уравнений самосогласованного типа. Однако в данном случае нулевой момент функции распределения f пропорционален потенциалу электрического поля φ (второе уравнение в (1)), а не лапласиану от него. При этом подстановка представления решения (14) во второе уравнение (13) приводит к интегральному уравнению для функции Ψ , тогда как в [12] для любой финитной или быстро убывающей на бесконечности функции Ψ построение решения завершалось интегрированием дифференциального уравнения вида $\varphi''(\zeta) = F(\varphi)$.

Ниже применяется предложенный в [14] подход к построению бегущей волны, непрерывно примыкающей к заданному фоновому значению $f = f_0(u)$ по характеристике $\zeta = \zeta_0$. Далее вместо независимой переменной ζ целесообразно использовать переменную φ , при этом зависимость $\varphi = \varphi(\zeta)$ может быть задана произвольно. Рассмотрим задачу Коши

$$f(\varphi_0, u) = f_0(u), \quad v_i(\varphi_0) = v_{0i} \quad \left(\exp \left(\frac{\varphi_0}{b} \right) = \int_{v_{00}}^{v_{10}} f_0(u) du \right) \tag{15}$$

для уравнений (13). Решение (14) принимает постоянные значения на характеристиках $\eta = \text{const}$. На рис. 3 показаны эти линии в плоскости переменных (u, φ) .

Условия (15) обеспечивают непрерывное примыкание бегущей волны к заданному стационарному однородному по пространству решению $f = f_0(u)$. На рис. 3 видно, что при $\varphi < \varphi_0$ решение задачи Коши однозначно определяется по начальным данным в областях Ω_1 и Ω_2 . В области Ω_3 (в которую не приходят характеристики, пересекающие прямую $\varphi = \varphi_0$), ограниченную кривой $\eta = \varphi_0$, решение находится из дополнительного интегрального уравнения. Заметим, что при $\varphi > \varphi_0$ задача Коши (15) некорректна, так как

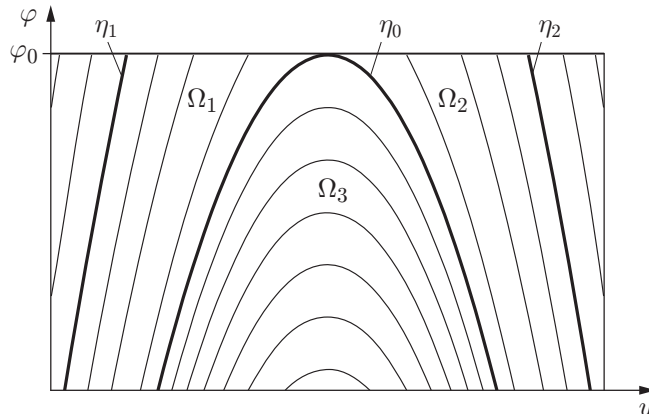


Рис. 3. Характеристики $\eta = \text{const}$ в плоскости (u, φ)

функция $f_0(u)$ не может быть задана произвольно (характеристики пересекают линию, на которой заданы условия Коши, в двух точках). Построим решение задачи (13), (15) в некотором интервале $\varphi_m \leq \varphi \leq \varphi_0$. В случаях $D < v_{00}$ и $D > v_{10}$ функции $f(\varphi, u)$ и $v_i(\varphi)$ определяются методом характеристик, но не удовлетворяют дополнительному интегральному условию (второе уравнение в (13)).

Рассмотрим случай $v_{00} < D < v_{10}$ и построим решение с функциональным произволом. Отметим, что этот случай соответствует течению в случае наличия критического слоя (на некоторой линии в области движения скорость волны совпадает со скоростью частиц).

Из уравнений $(v_{i0} - D)^2/2 + \varphi_0 = (v_i - D)^2/2 + \varphi$, задающих в плоскости (u, φ) линии $\eta = \eta_1$ и $\eta = \eta_2$ (см. рис. 3), получим выражения для скоростей v_0 и v_1 в области бегущей волны

$$v_0(\varphi) = D - \sqrt{2(\varphi_0 - \varphi) + (v_{00} - D)^2}, \quad v_1(\varphi) = D + \sqrt{2(\varphi_0 - \varphi) + (v_{10} - D)^2}. \quad (16)$$

Соотношения $v_*(\varphi) = D - \sqrt{2(\varphi_0 - \varphi)}$ и $v^*(\varphi) = D + \sqrt{2(\varphi_0 - \varphi)}$ определяют линию $\eta = \eta_0 = \varphi_0$ при $u < D$ и $u > D$ соответственно. В областях

$$\Omega_1 = \{(u, \varphi): \varphi_m < \varphi < \varphi_0, v_0(\varphi) < u < v_*(\varphi)\},$$

$$\Omega_2 = \{(u, \varphi): \varphi_m < \varphi < \varphi_0, v^*(\varphi) < u < v_1(\varphi)\}$$

решение строится методом характеристик. Определим функции

$$\Psi_1(\eta) = f_0(D - \sqrt{2(\eta - \eta_0)}), \quad \Psi_2(\eta) = f_0(D + \sqrt{2(\eta - \eta_0)}).$$

Тогда решение в областях Ω_1 и Ω_2 задается формулами

$$f(\varphi, u) = \Psi_1((u - D)^2/2 + \varphi), \quad f(\varphi, u) = \Psi_2((u - D)^2/2 + \varphi). \quad (17)$$

В область $\Omega_3 = \{(u, \varphi): \varphi_m < \varphi < \varphi_0, v_*(\varphi) < u < v^*(\varphi)\}$ не приходит ни одна характеристика, выходящая с линии $\varphi = \varphi_0$ (см. рис. 3). Для определения функции $f(\varphi, u) = \Psi_3(\eta)$ в этой области используем второе уравнение в (13), которое можно преобразовать к интегральному уравнению Абеля. Заменим переменную u на переменную интегрирования η . Тогда для функции $\Psi_3(\eta)$ получаем уравнение Абеля с известной правой частью

$$\int_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{\Psi_3(\eta) d\eta}{\sqrt{\eta - \varphi}} = F(\varphi) = \frac{\exp(\varphi/b)}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \left(\int_{\varphi_0}^{\eta_1} \frac{\Psi_1(\eta) d\eta}{\sqrt{\eta - \varphi}} + \int_{\varphi_0}^{\eta_2} \frac{\Psi_2(\eta) d\eta}{\sqrt{\eta - \varphi}} \right). \quad (18)$$

С учетом равенства $F(\varphi_0) = 0$ решение уравнения (18) имеет вид

$$f(\varphi, u) = \Psi_3(\eta) = -\frac{1}{\pi} \int_{\eta}^{\varphi_0} \frac{F'(\varphi) d\varphi}{\sqrt{\varphi - \eta}}. \quad (19)$$

Выражения (16), (17), (19) являются решением уравнений (3) в классе бегущих волн.

Траектории движения частиц в системе координат, движущейся вместе с волной, определяются уравнениями $d\zeta/dt = u - D$, $du/dt = -\varphi'(\zeta)$. Линии $\eta = \text{const}$ являются интегральными кривыми этой системы, что позволяет использовать рис. 3 для анализа картины движения. В областях Ω_1 и Ω_2 величина $u - D$ не меняет знак, вследствие чего частицы со скоростями $u < v_*$ и $u > v^*$ пересекают область бегущей волны в противоположных направлениях. В области Ω_3 частицы совершают поворот, поскольку эта область содержит критический слой, в котором $u = D$.

По приведенному выше алгоритму построим решение уравнений (3), выражающееся в элементарных функциях. Пусть начальное распределение имеет вид ступеньки $f_0 = \text{const}$

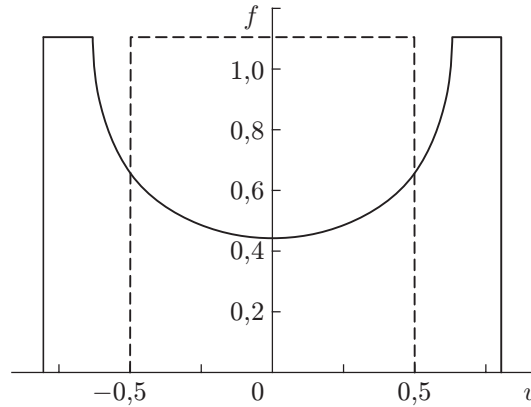


Рис. 4. Функция распределения в бегущей волне:
сплошная линия — $\varphi = \varphi_m$; штриховая — $\varphi = \varphi_0$

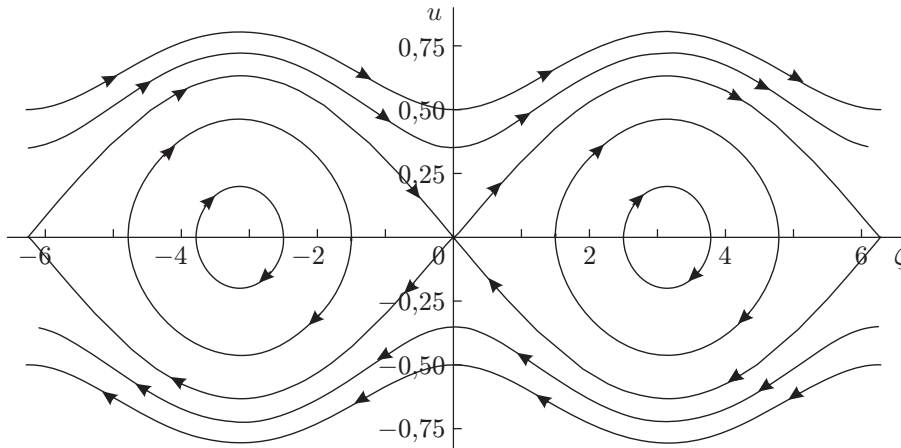


Рис. 5. Траектории движения частиц в фазовой плоскости (ζ, u)

(штриховая линия на рис. 4). В этом случае в областях Ω_1 и Ω_2 функция распределения сохраняет постоянное значение: $\Psi_1(\eta) = \Psi_2(\eta) = f_0$. Подставляя эти константы в правую часть (18), можно определить функцию $F(\varphi)$ и ее производную. Вычислив интеграл в (19), получаем

$$\Psi_3(\eta) = f_0 - \frac{f_0}{\pi} \left(\arcsin \sqrt{\frac{\varphi_0 - \eta}{\eta_{00} - \eta}} + \arcsin \sqrt{\frac{\varphi_0 - \eta}{\eta_{10} - \eta}} \right) - \frac{\exp(\eta/b)}{\sqrt{2\pi b}} \operatorname{erfi} \sqrt{\frac{\varphi_0 - \eta}{b}}$$

($\operatorname{erfi} z = -i \operatorname{erf} iz$). На рис. 4 показаны функции распределения $f = f(\varphi, u)$ при $\varphi = \varphi_0$ (штриховая линия) и $\varphi = \varphi_m$ (сплошная линия). Графики получены при следующих значениях параметров: $b = 1$, $D = 0$, $v_{10} = -v_{00} = 1/2$, $\varphi_0 = -\varphi_m = 0,1$, $f_0 = \exp(\varphi_0)/(v_{10} - v_{00}) \approx 1,1$. В построенном решении зависимость $\varphi = \varphi(\zeta)$ ($\varphi_m \leq \varphi \leq \varphi_0$) остается произвольной, что позволяет получать периодические по переменной $\zeta = x - Dt$ решения.

Для построенной бегущей волны с периодической функцией $\varphi(\zeta) = \varphi_0 \cos \zeta$ на рис. 5 показаны траектории движения частиц в фазовой плоскости (ζ, u) . Траектории имеют характерную для течений с критическим слоем форму “кошачий глаз” [10]. Отметим, что решение типа бегущей волны, непрерывно примыкающее к заданному фоновому значению $f_0(u)$, со временем может стать неустойчивым. В силу того что решение построено в области с критическим слоем Ω_3 , функция распределения убывает при $v_* < u < D$ и воз-

растает при $D < u < v^*$. Это приводит к образованию двух максимумов функции $f(\varphi, u)$, даже если начальное распределение $f_0(u)$ имело один максимум. В п. 2 показано, что распределения с двумя максимумами, расположенными на достаточно большом расстоянии друг от друга, в рамках линейного приближения являются неустойчивыми. Поэтому условия гиперболичности (11) уравнений движения (4) на решении из класса бегущих волн будут выполнены только при достаточно малом изменении потенциала электрического поля $\varphi(\zeta)$.

4. Приближенная дифференциальная модель. В процессе эволюции гладкого решения обобщенно-гиперболической системы интегродифференциальных уравнений может возникнуть градиентная катастрофа, поэтому дальнейшее описание решения возможно лишь в классе разрывных функций, что приводит к необходимости формулировки модели в виде законов сохранения. Аналогично [8] используем следующую консервативную формулировку уравнений (4):

$$\begin{aligned} u_{\lambda t} + (uu_{\lambda})_x &= 0, & H_t + (uH)_x &= 0, \\ A_{1t} + (A_2 + bn)_x &= 0, & A_l &= \int_0^1 u^l H d\lambda \quad (l = 1, 2). \end{aligned} \quad (20)$$

Нетрудно показать эквивалентность уравнений (4) и (20) на гладких решениях.

Для вывода дифференциальных законов сохранения, аппроксимирующих интегродифференциальную модель (20), выполним разбиение по переменной λ ($0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_M = 1$) и используем кусочно-постоянную аппроксимацию функции распределения

$$f(t, x, u) = f_{ci}(t, x), \quad u \in [u_{i-1}, u_i]$$

при осреднении уравнений (20) по λ . Здесь $u_i(t, x) = u(t, x, \lambda_i)$, $i = 1, \dots, M$. В силу выбранной аппроксимации функции распределения и с учетом того, что $H = u_{\lambda} \bar{f}(t, x, \lambda)$, $H d\lambda = f du$, имеют место равенства

$$\int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} H d\lambda = f_{ci} h_i, \quad \int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} uH d\lambda = u_{ci} f_{ci} h_i, \quad \int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} u^2 H d\lambda = u_{ci}^2 f_{ci} h_i + \frac{f_{ci} h_i^3}{12}, \quad (21)$$

где $h_i = u_i - u_{i-1}$; $u_{ci} = (u_i + u_{i-1})/2$. Проинтегрируем уравнения (20) по лагранжевой переменной λ от λ_{i-1} до λ_i . Используя формулы (21), получаем систему законов сохранения, состоящую из $2M + 1$ дифференциальных уравнений для определения искомых функций $h_i(t, x)$, $f_{ci}(t, x)$ и $A_1(t, x)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u_{ci} h_i) &= 0, & \frac{\partial}{\partial t} (f_{ci} h_i) + \frac{\partial}{\partial x} (u_{ci} f_{ci} h_i) &= 0, \\ \frac{\partial A_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{i=1}^M \left(u_{ci}^2 f_{ci} h_i + \frac{f_{ci} h_i^3}{12} + b f_{ci} h_i \right) \right) &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Входящие в (22) величины $u_{ci}(t, x)$ задаются формулами

$$u_{ci} = \frac{h_i}{2} + \sum_{k=1}^{i-1} h_k + u_0, \quad u_0 = \left(\sum_{i=1}^M f_{ci} h_i \right)^{-1} \left(A_1 - \sum_{i=1}^M \frac{f_{ci} h_i^2}{2} - \sum_{i=2}^M f_{ci} h_i \sum_{k=1}^{i-1} h_k \right).$$

Для численного решения гиперболической системы дифференциальных законов сохранения (22), в отличие от интегродифференциальных уравнений (20), применимы стандартные численные методы. В данном случае целесообразно использовать схемы сквозного

счета, поскольку система уравнений (22) содержит большое количество искомым величин и получение точного или приближенного решения задачи Римана затруднено. Расчеты выполняются на основе центральной схемы второго порядка [15].

4.1. *Гидродинамические пределы.* Предложенная для численного моделирования плазменных волн система дифференциальных законов сохранения (22) в ряде частных случаев сводится к известным гидродинамическим пределам кинетического уравнения (1). При $M = 1$ система (22) приводится к уравнениям газодинамического типа

$$\begin{aligned} (n/f)_t + (vn/f)_x &= 0, & n_t + (vn)_x &= 0, \\ (vn)_t + (v^2n + p)_x &= 0, & p(n, f) &= n^3/(12f^2) + bn, \end{aligned} \quad (23)$$

где $n = h_1 f_{c1}$; $v = u_{c1}$; $f = f_{c1}$. Известные гидродинамические пределы кинетического уравнения (1) получаются как частные случаи системы (23). При $f = f_0 = \text{const}$ уравнения (23) совпадают с исходной моделью (1) на классе решений типа ступеньки $f^1(t, x, u) = (\theta(u - v_0) - \theta(u - v_1))f_0$. Если в системе (23) принять $f = \text{const}$ и пренебречь первым слагаемым в уравнении состояния $p = p(n, f)$, то получим модель холодной плазмы [1]

$$n_t + (vn)_x = 0, \quad (vn)_t + (v^2n + bn)_x = 0, \quad (24)$$

которая следует из уравнения (1) в случае $f^1(t, x, u) = n(t, x)\delta(u - v(t, x))$.

Нетрудно заметить, что кинетической модели (1) соответствует следующая бесконечная цепочка уравнений для моментов функции распределения:

$$\frac{\partial A_k}{\partial t} + \frac{\partial A_{k+1}}{\partial x} + bk \frac{A_{k-1}}{A_0} \frac{\partial A_0}{\partial x} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (25)$$

Известная в физике плазмы концепция “waterbag” [13] позволяет получать частные решения (25), описываемые замкнутыми системами уравнений. Представим k -й момент в виде [16]

$$A_k = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^M \varepsilon_i u_i^{k+1}, \quad \sum_{i=0}^M \varepsilon_i = 0, \quad (26)$$

где ε_i — произвольные постоянные, сумма которых равна нулю. Подставляя моменты (26) в цепочку (25), получаем замкнутую систему $M + 1$ уравнений для определения искомым функций $u_i(t, x)$:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_i^2}{2} + b \ln \sum_{k=0}^M \varepsilon_k u_k \right) = 0. \quad (27)$$

Система уравнений (27) совпадает с полученной выше системой законов сохранения (22) на частном классе решений $f_{ci} = f_i = \text{const}$. Отметим, что, выбрав следующее представление решения (ступенчатая функция):

$$\begin{aligned} f^1 &= \sum_{i=1}^M f_i (\theta(u - u_{i-1}) - \theta(u - u_i)) = \sum_{i=0}^M \varepsilon_i \theta(u - u_i), \\ \sum_{i=0}^M \varepsilon_i &= 0, \quad f_{i+1} = \sum_{k=0}^i \varepsilon_k, \end{aligned}$$

систему (27) можно получить непосредственно из кинетической модели (1).

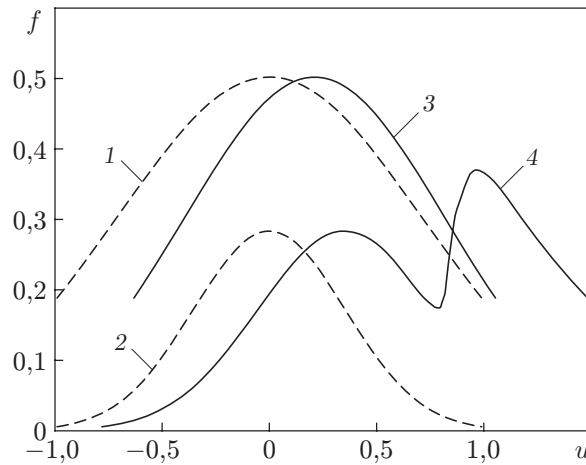


Рис. 6. Функция распределения ионов в плазме:

1, 2 — $t = 0$ (1 — $x < 0$; 2 — $x > 0$); 3, 4 — $t = 1$ (3 — $x = -1$; 4 — $x = 1,2$)

4.2. Численное моделирование втекания плазмы в плазму. Выполним тестовый расчет задачи о распаде начального разрыва на основе дифференциальной аппроксимации (22). Пусть при $t = 0$ свойства плазмы в полупространстве $x < 0$ определяются функцией распределения $f_1(u)$, а в полупространстве $x > 0$ — функцией распределения $f_2(u)$. Эта задача является автомодельной. В [1] теоретически показано, что в процессе эволюции решения возможно его кинетическое опрокидывание (формирование двух пиков функции распределения, изначально имевшей один пик).

На интервале $u \in (v_0, v_1)$ зададим функции f_1 и f_2 следующим образом:

$$f_1(u) = \frac{3 \exp(-u^2)}{4\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(1)}, \quad f_2(u) = \frac{\exp(-4u^2)}{2\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(2)} \quad (v_1 = -v_0 = 1)$$

(линии 1, 2 на рис. 6). Начальные данные соответствуют взаимодействию потоков плазмы, имеющих разные температуру и плотность [1].

Расчетный интервал по пространственной переменной $x \in [x_a, x_b]$ разбивается на N равных ячеек. В центральных точках ячеек x_j ($j = 1, \dots, N$) при $t = 0$ задаются начальные значения вектора искомых величин $(h_1, \dots, h_M; f_{c1}h_1, \dots, f_{cM}h_M; A_1)$. Здесь $h_i = (v_1 - v_0)/M$; f_{ci} — среднее значение функции $f_1(u)$ ($f_2(u)$) на промежутке (u_{i-1}, u_i) , где $u_i = v_0 + ih_i$; в силу выбора начальной функции распределения $A_1 = 0$. Кроме того, при всех значениях времени t дополнительно задаются граничные условия в точках x_{1-i} и x_{N+i} ($i = 1, 2$). При этом использованы граничные условия вида $u(x_{1-i}) = u(x_1)$, $u(x_{N+i}) = u(x_N)$, которые позволяют проводить вычисления до тех пор, пока начальные возмущения не достигнут границ расчетной области.

Вычисления проводятся с использованием центральной схемы второго порядка аппроксимации [15] типа предиктор-корректор с параметром Куранта — Фридрихса — Леви, равным 0,475; $b = 1$; границы расчетного интервала: $x_b = -x_a = -2$. Расчеты выполнены при $N = 200$, $M = 100$. Для нахождения максимальной скорости распространения возмущения, необходимой для формирования шага по времени, использован дискретный аналог уравнения (9)

$$\chi(k) = 1 - \frac{b}{n} \sum_{i=1}^M \frac{f_{ci}h_i}{(u_{ci} - k)^2 - h_i^2/4} = 0.$$

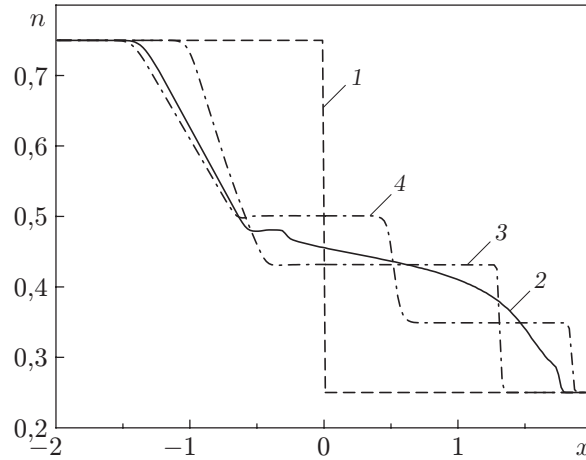


Рис. 7. Плотность плазмы n :
 1 — $t = 0$; 2-4 — $t = 1$ (2 — расчет по модели (22), 3 — расчет по модели (24), 4 — расчет по модели (23))

Корни уравнения вычисляются итерационным методом Ньютона с точностью до 10^{-8} . Для обеспечения TVD-свойства схемы применяется вычислительная технология “UNO slope limiter” [17].

На рис. 6 показаны начальные функции распределения при $x < 0$ и $x > 0$ (кривые 1, 2), а также функция $f(t, x, u)$ в момент времени $t = 1$ при $x = -1$ и $x = 1,2$ (кривые 3, 4). Видно, что функция распределения ионов для более “плотной” плазмы (линии 1, 3) изменилась несущественно. При этом функция распределения менее “плотной” плазмы (линии 2, 4) претерпела качественные изменения, обусловленные кинетическим опрокидыванием. На рис. 7 показано распределение плотности плазмы $n(t, x)$ при $t = 0$ и $t = 1$, полученное по модели (22) (кривая 1) и по более простым гидродинамическим уравнениям (24), (23) (кривые 2, 3 соответственно). Уравнения холодной плазмы (24) и газодинамический аналог (23) достаточно точно описывают рассматриваемый процесс, но для более детального моделирования волн необходимо использовать полную систему уравнений (22).

Заключение. Проведен анализ нелинейного кинетического уравнения (3) квазинейтральной плазмы в классе решений с ограниченным носителем. Установлена аналогия с уравнениями сдвигового течения жидкости в протяженном упругом канале (5). На основе обобщения теории характеристик для систем с операторными коэффициентами определены непрерывные и дискретные спектры скоростей распространения возмущений в плазме, сформулированы условия гиперболичности (11) уравнений движения (4). Приведен пример проверки условий гиперболичности и указана аналогия с известным критерием устойчивости сдвиговых течений. В классе бегущих волн построены решения кинетической модели (13) при наличии критического слоя, при этом установлено, что потенциал электрического поля можно задавать произвольно. Обнаружено, что в фазовой плоскости траектории движения частиц имеют характерную для таких решений форму “кошачий глаз”. Показано, что бегущие волны являются устойчивыми по линейному приближению лишь в случае незначительного изменения потенциала электрического поля. Предложены дифференциальные законы сохранения (22), аппроксимирующие исходную интегродифференциальную модель. Ряд известных гидродинамических пределов (уравнения холодной плазмы (24), “waterbag” (27)) являются частными случаями этой системы уравнений. На основе уравнений (22) выполнен численный расчет распространения волн в плазме, возникающих в результате распада начального разрыва. При этом показан эффект кинетического опрокидывания функции распределения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гуревич А. В., Питаевский Л. П.** Нелинейная динамика разреженной плазмы и ионосферная аэродинамика // Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат, 1980. Вып. 10. С. 3–87.
2. **Захаров В. Е.** Уравнения Бенни и квазиклассическое приближение в методе обратной задачи // Функцион. анализ и его прил. 1980. Т. 14, вып. 2. С. 15–24.
3. **Ляпидевский В. Ю.** Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости / В. Ю. Ляпидевский, В. М. Тешуков. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
4. **Тешуков В. М.** О гиперболичности уравнений длинных волн // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284, вып. 3. С. 555–559.
5. **Benney D. J.** Some properties of long nonlinear waves // Stud. Appl. Math. 1973. V. 52. P. 45–50.
6. **Чесноков А. А.** Осесимметричные вихревые движения жидкости в длинной эластичной трубке // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 4. С. 76–87.
7. **Тешуков В. М.** Длинные волны в завихренной баротропной жидкости // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 6. С. 17–26.
8. **Teshukov V., Russo G., Chesnokov A.** Analytical and numerical solutions of the shallow water equations for 2-D rotational flows // Math. Models Methods Appl. Sci. 2004. V. 14. P. 1451–1481.
9. **Чесноков А. А., Ляпидевский В. Ю.** Волновые движения идеальной жидкости в узком открытом канале // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 2. С. 61–71.
10. **Дразин Ф.** Введение в теорию гидродинамической устойчивости. М.: Физматлит, 2005.
11. **Стикс Т.** Теория плазменных волн. М.: Атомиздат, 1965.
12. **Bernstein I. B., Greene J. M., Kruskal M. D.** Exact nonlinear plasma oscillations // Phys. Rev. 1957. V. 108, N 3. P. 546–550.
13. **Davidson R. C.** Methods in nonlinear plasma theory. N. Y.: Acad. Press, 1972.
14. **Тешуков В. М.** Характеристики, законы сохранения и симметрии кинетических уравнений движения пузырьков в жидкости // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 2. С. 86–100.
15. **Nessyahu H., Tadmor E.** Non-oscillatory central differencing schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comp. Phys. 1990. V. 87, N 2. P. 408–463.
16. **Pavlov M. V.** Integrability of the Gibbons — Tsarev system // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 2008. V. 224. P. 247–253.
17. **Harten A., Engquist B., Osher S., Chakravarthy S.** Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes. Pt 3 // J. Comput. Phys. 1987. V. 71. P. 231–303.

Поступила в редакцию 2/IX 2010 г.
