

УДК 539.374

## К ПОСТРОЕНИЮ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧЕСКОГО РАЗРУШЕНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ТРЕНИЯ

С. Е. Александров, Е. А. Лямина

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, 119526 Москва

E-mails: sergei\_alexandrov@yahoo.com, lyamina@inbox.ru

Предложен критерий пластического разрушения, учитывающий сингулярный характер теоретических решений вблизи поверхностей максимального трения и возникновение тонкого слоя интенсивных пластических деформаций вблизи поверхностей с большими удельными силами трения в реальных процессах обработки металлов давлением. В уравнение для толщины слоя интенсивных пластических деформаций и в критерий разрушения входит коэффициент интенсивности скорости деформации, по-видимому, характеризующий интенсивность физических процессов, происходящих в тонком слое материала вблизи поверхностей трения. Для определения толщины этого слоя используются некоторые экспериментальные данные. Критерий пластического разрушения анализируется на основе решения задачи о выдавливании полосы в условиях плоской деформации.

**Ключевые слова:** трение, интенсивные пластические деформации, выдавливание, обработка давлением, пластичность.

В процессе обработки металлов давлением вблизи поверхностей трения формируется слой материала, свойства которого существенно отличаются от его свойств в основном объеме (слой с интенсивными пластическими деформациями) [1–4]. Теоретический метод определения толщины этого слоя предложен в работе [4]. В [5, 6] излагаются способы предсказания разрушения вблизи поверхности трения в процессах осесимметричного выдавливания и волочения через коническую матрицу. Методы, предложенные в работах [4–6], основаны на использовании введенного в [7] коэффициента интенсивности скорости деформации, который является коэффициентом при главном члене в асимптотическом представлении эквивалентной скорости деформации в окрестности поверхности максимального трения. В случае идеально жесткопластического материала поверхность максимального трения представляет собой поверхность, на которой при проскальзывании удельные силы трения равны пределу текучести при чистом сдвиге. Асимптотическое представление эквивалентной скорости деформации вблизи поверхностей максимального трения имеет вид

$$\xi_{eq} = Ds^{-1/2} + o(s^{-1/2}), \quad s \rightarrow 0. \quad (1)$$

Здесь  $D$  — коэффициент интенсивности скорости деформации;  $s$  — расстояние до поверхности трения.

Для предсказания пластического разрушения в процессе обработки металлов давлением часто используется диаграмма пластичности [8], уравнение которой обычно принимается в форме

$$\varepsilon_{eq} = \varepsilon_{eq}^f = \Phi(\beta).$$

Здесь  $\varepsilon_{eq}$ ,  $\varepsilon_{eq}^f$  — эквивалентная деформация и ее значение при разрушении;  $\beta = 3\sigma/\sigma_{eq}$  — параметр трехосности напряженного состояния;  $\sigma$  — среднее напряжение;  $\sigma_{eq}$  — эквивалентное напряжение. По определению

$$\sigma = \frac{\sigma_{ij}\delta_{ij}}{3}, \quad \sigma_{eq} = \left(\frac{3}{2}(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij})(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij})\right)^{1/2}, \quad \xi_{eq} = \left(\frac{2}{3}\xi_{ij}\xi_{ij}\right)^{1/2}, \quad \frac{d\varepsilon_{eq}}{dt} = \xi_{eq} \quad (2)$$

( $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений;  $\xi_{ij}$  — компоненты тензора скорости деформации;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера;  $d/dt$  — полная производная по времени). Функция  $\Phi(\beta)$  определяется в эксперименте при  $\beta = \text{const}$ . Для предсказания разрушения в точке, в которой в процессе деформации  $\beta \neq \text{const}$ , в дополнение к диаграмме пластичности требуется использовать критерий разрушения. Один из критериев (см., например, [9]) состоит в замене аргумента функции  $\Phi(\beta)$  на аргумент

$$\beta_{av} = \frac{1}{\varepsilon_{eq}} \int_0^t \beta \xi_{eq} dt. \quad (3)$$

Таким образом, критерий пластического разрушения принимает вид

$$\varepsilon_{eq}^f = \Phi(\beta_{av}). \quad (4)$$

Если в рассматриваемой материальной точке  $\beta = \text{const}$  в течение всего процесса деформирования, то согласно (2), (3) зависимость (4) является уравнением исходной диаграммы пластичности. Непосредственное применение критерия (4) для точек, находящихся вблизи поверхностей максимального трения, невозможно, так как в соответствии с (1)  $\xi_{eq} \rightarrow \infty$  при  $s \rightarrow 0$ . Поэтому в [5] предложен нелокальный подход, согласно которому критерий (4) заменяется на критерий

$$E_{eq} = E_{eq}^f = \Psi(\chi_{av}), \quad (5)$$

где

$$E_{eq} = 2 \int_0^t Dh^{-1/2} dt, \quad \chi_{av} = \int_0^t \beta Dh^{-1/2} dt / \int_0^t Dh^{-1/2} dt. \quad (6)$$

В [5] показано, что предложенный нелокальный критерий разрушения сводится к (4), если поле скоростей не является сингулярным. Величина  $h$ , входящая в (6), определена в работе [5] как толщина слоя интенсивных пластических деформаций. Однако в [5] не предложен способ вычисления этой величины; в модельной задаче полагалось, что  $h = \text{const}$ . Новые экспериментальные данные и предложенная в [4] теория позволяют получить некоторые оценки величины  $h$ . В частности, одно из уравнений для толщины слоя интенсивных пластических деформаций, полученное в [4], имеет вид

$$\frac{dh}{dt} = D\sqrt{h_s} f\left(\frac{h}{h_s}\right), \quad (7)$$

где  $h_s$  — максимально возможная толщина слоя интенсивных пластических деформаций для данного материала. Уравнение (7) получается на основе анализа размерностей в предположении, что скорость увеличения толщины слоя зависит только от его текущей толщины, коэффициента интенсивности скорости деформации и величины  $h_s$ . В простейшем частном случае уравнение (7) принимает форму

$$\frac{dh}{dt} = \alpha D\sqrt{h_s} \left(1 - \frac{h}{h_s}\right), \quad (8)$$

где  $\alpha$  — безразмерный постоянный коэффициент. Начальное условие для этого уравнения имеет вид

$$h = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (9)$$

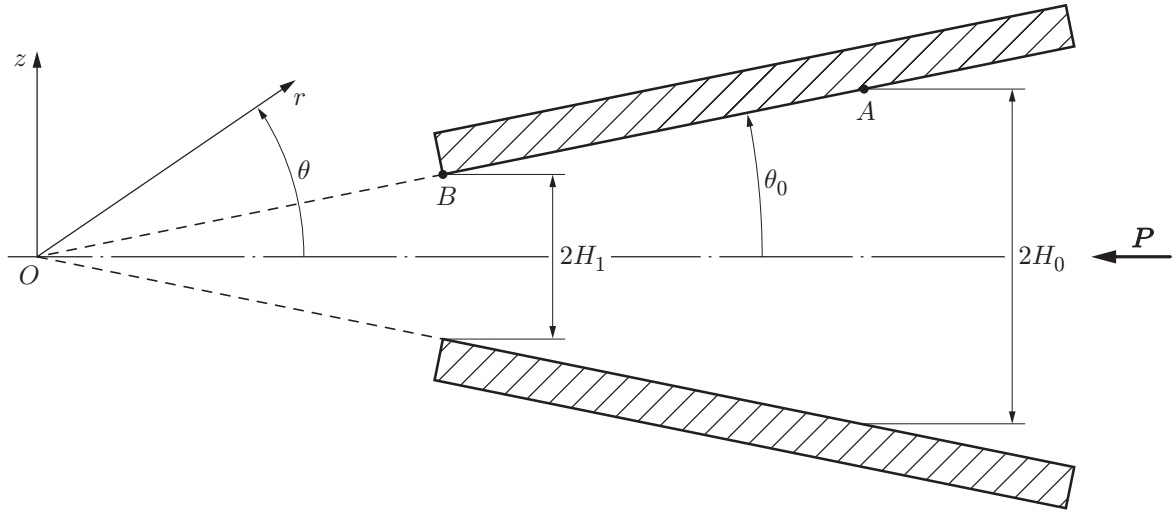


Рис. 1. Геометрическая схема процесса выдавливания материала через матрицу

Определив  $h$  из (8), (9), зависимость  $E_{eq}(\chi_{av})$  для любой материальной точки, движущейся вдоль поверхности максимального трения, можно определить из (6). Тогда возникновение пластического разрушения можно предсказать с помощью (5).

Применим предлагаемый подход к анализу пластического разрушения вблизи поверхности трения в процессе выдавливания полосы в условиях плоской деформации. Пусть начальная толщина полосы равна  $2H_0$ , конечная —  $2H_1$ . Угол раствора матрицы равен  $2\theta_0$  (рис. 1). Поскольку в настоящее время численные методы определения коэффициента интенсивности скорости деформации отсутствуют, оценим величину  $D$  на основе приведенного в [10] аналитического решения для случая плоского течения пластического материала через бесконечный сходящийся канал с углом раствора  $2\theta_0$ . В полярной системе координат  $r, \theta$  выражение для эквивалентной скорости деформации имеет вид

$$\xi_{eq} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{U}{r^2(c - \cos 2\psi) \cos 2\psi}. \tag{10}$$

Здесь  $U, c$  — постоянные; величина  $\psi$  определяется как функция  $\theta$  из уравнения

$$\frac{d\psi}{d\theta} = \frac{c - \cos 2\psi}{\cos 2\psi}. \tag{11}$$

Закон максимального трения выполняется, если  $\psi = \pi/4$  при  $\theta = \theta_0$ . С использованием этого условия и условия на оси симметрии ( $\psi = 0$  при  $\theta = 0$ ) из (11) определяются величина  $c$  и функция  $\psi(\theta)$ . Очевидно, что  $c$  зависит от  $\theta_0$ . Раскладывая (10) в ряд в окрестности значения  $\psi = \pi/4$ , получаем

$$\xi_{eq} = \frac{U}{\sqrt{3} cr^2} \left(\frac{\pi}{4} - \psi\right)^{-1} + o\left[\left(\frac{\pi}{4} - \psi\right)^{-1}\right], \quad \psi \rightarrow \frac{\pi}{4}. \tag{12}$$

Аналогично, раскладывая в ряд правую часть равенства (11) и интегрируя его в окрестности  $\psi = \pi/4$  при условии  $\psi = \pi/4$  при  $\theta = \theta_0$ , находим

$$\pi/4 - \psi = c^{1/2}(\theta_0 - \theta)^{1/2} + o[(\theta_0 - \theta)^{1/2}], \quad \theta \rightarrow \theta_0. \tag{13}$$

Подставляя (13) в (12), имеем

$$\xi_{eq} = \frac{U}{\sqrt{3} c^{3/2} r^2 (\theta_0 - \theta)^{1/2}} + o[(\theta_0 - \theta)^{-1/2}], \quad \theta \rightarrow \theta_0. \tag{14}$$

Сравнивая (1) и (14), получаем выражение для коэффициента интенсивности скорости деформации в виде

$$D = \frac{U}{\sqrt{3} c^{3/2} r^{3/2}}. \quad (15)$$

В рассматриваемом случае установившегося режима течения уравнение (8) принимает форму

$$u \frac{\partial h}{\partial r} = \alpha D \sqrt{h_s} \left(1 - \frac{h}{h_s}\right), \quad (16)$$

начальное условие (9) преобразуется к виду

$$h = 0 \quad \text{при} \quad r = R_A. \quad (17)$$

В (16), (17)  $u$  — радиальная скорость при  $\theta = \theta_0$ ;  $R_A$  — радиальная координата точки  $A$  (см. рис. 1). Из решения, приведенного в [10], следует

$$u = -U/(rc). \quad (18)$$

Подставляя (18) в соотношение (16) и интегрируя его с учетом условия (17), получаем зависимость толщины слоя интенсивной пластической деформации от радиуса

$$\frac{h}{h_s} = 1 - \exp\left(-\frac{2\alpha}{\sqrt{3}ch_s}(\sqrt{R_A} - \sqrt{r})\right). \quad (19)$$

Толщина этого слоя в изделии определяется из (19) при  $r = R_B$ :

$$\frac{h_f}{h_s} = 1 - \exp\left(-\frac{2\alpha}{\sqrt{3}ch_s}(\sqrt{R_A} - \sqrt{R_B})\right). \quad (20)$$

Здесь  $R_B$  — радиальная координата точки  $B$  (см. рис. 1). С учетом геометрической схемы процесса величины  $R_A$ ,  $R_B$  выражаются через толщины  $H_0$ ,  $H_1$  и угол  $\theta_0$ :

$$R_A = \frac{H_0}{\sin \theta_0}, \quad R_B = \frac{H_1}{\sin \theta_0}. \quad (21)$$

Тогда из (20) следует

$$\frac{h_f}{H_0} = \frac{h_s}{H_0} \left\{1 - \exp\left[-\frac{2\alpha}{\sqrt{3}c \sin \theta_0} \sqrt{\frac{H_0}{h_s}} \left(1 - \sqrt{\frac{H_1}{H_0}}\right)\right]\right\}. \quad (22)$$

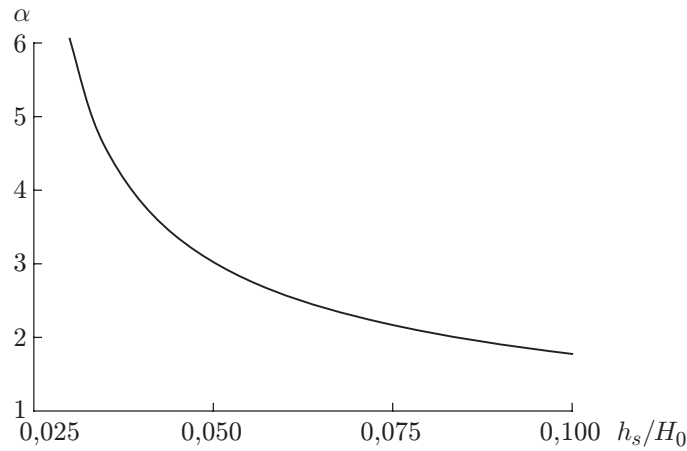
В эксперименте с латунью при  $H_0/H_1 = 16/15$ ,  $H_0 = 4$  мм и  $\theta_0 = 0,9^\circ$  получено значение  $h_f \approx 100$  мкм [4]. С использованием этих данных из (22) определяется зависимость  $\alpha$  от  $h_s/H_0$  при  $H_0 = 4$  мм (рис. 2), а из (19) — зависимость толщины слоя интенсивных деформаций от  $\alpha$  (или  $h_s/H_0$ ).

Для вычисления  $\chi_{av}$  необходимо знать напряженное состояние. В полярной системе координат выражения для компонент тензора напряжений имеют вид [10]

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}/\tau_s &= -2c \ln(r/R_A) + \cos 2\psi - c \ln(c - \cos 2\psi) + G, \\ \sigma_{\theta\theta}/\tau_s &= -2c \ln(r/R_A) - \cos 2\psi - c \ln(c - \cos 2\psi) + G, \\ \sigma_{r\theta}/\tau_s &= \sin 2\psi \end{aligned} \quad (23)$$

( $\tau_s$  — предел текучести при чистом сдвиге). Для процесса выдавливания постоянная  $G$  определяется из интегрального условия отсутствия усилия, приложенного к выходному концу полосы. Это условие записывается в форме

$$\int_0^{\theta_0} (\sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta) d\theta = 0, \quad (24)$$

Рис. 2. Зависимость  $\alpha$  от  $h_s/H_0$  при  $H_0 = 4$  мм

где компоненты тензора напряжений вычисляются из (23) при  $r = R_B$ . Используя (11), (21), условие (24) преобразуем к виду

$$G = 2c \ln \left( \frac{H_1}{H_0} \right) + \frac{1}{\sin \theta_0} \int_0^{\pi/4} \frac{\cos \psi}{c - \cos 2\psi} [c \cos \theta \ln (c - \cos 2\psi) - \cos (2\psi + \theta)] d\psi. \quad (25)$$

Так как  $\sigma = (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})/2$ , то, подставляя (23) в выражение для  $\beta$ , получаем

$$\beta = -2\sqrt{3} c \ln (r/R_A) - \sqrt{3} c \ln c + \sqrt{3} G. \quad (26)$$

Для рассматриваемого установившегося процесса соотношения (6) принимают вид

$$E_{eq} = 2 \int_{R_A}^r \frac{D}{\sqrt{h} u} dr, \quad \chi_{av} = \left( \int_{R_A}^r \frac{\beta D}{\sqrt{h} u} dr \right) \left( \int_{R_A}^r \frac{D}{\sqrt{h} u} dr \right)^{-1}. \quad (27)$$

Поскольку все функции, входящие в подынтегральные выражения, определены (уравнения (15), (18), (19), (26)), зависимость  $E_{eq}(\chi_{av})$  вычисляется из (27) в параметрическом виде. Однако в (27) интегралы являются несобственными, так как  $h = 0$  при  $r = R_A$ . Поэтому представим (19) в форме

$$\frac{h}{h_s} = \frac{\alpha}{\sqrt{3c}} \sqrt{\frac{R_A}{h_s}} \left( 1 - \frac{r}{R_A} \right) + o \left( 1 - \frac{r}{R_A} \right), \quad r \rightarrow R_A.$$

Тогда в интервале  $R_A \geq r \geq R_A(1 - \delta)$ , где  $\delta \ll 1$ , имеем

$$\begin{aligned} \int_{R_A}^r \frac{D}{\sqrt{h} u} dr &= -\frac{2D_A(3c)^{1/4} R_A^{3/4}}{u_A \sqrt{\alpha} h_s^{1/4}} \sqrt{1 - \frac{r}{R_A}}, \\ \int_{R_A}^r \frac{\beta D}{\sqrt{h} u} dr &= -\frac{2\beta_A D_A(3c)^{1/4} R_A^{3/4}}{u_A \sqrt{\alpha} h_s^{1/4}} \sqrt{1 - \frac{r}{R_A}}. \end{aligned} \quad (28)$$

Индекс  $A$  означает, что соответствующая величина вычисляется в точке  $A$  (см. рис. 1). В частности, из (15), (18), (26) следует

$$D_A = \frac{U}{\sqrt{3} c^{3/2} R_A^{3/2}}, \quad u_A = -\frac{U}{R_{Ac}}, \quad \beta_A = -\sqrt{3} c \ln c + \sqrt{3} G. \quad (29)$$

Подставляя (28), (29) в (27), находим

$$E_{eq} = \frac{4}{\sqrt{\alpha}} \left( \frac{H_0 \sin \theta_0}{3ch_s} \right)^{1/4} \sqrt{z}, \quad \chi_{av} = \beta_A \quad (30)$$

в интервале  $0 \leq z \leq \delta / \sin \theta_0$ , где

$$z = (R_A - r) / H_0. \quad (31)$$

С учетом (30), (31) зависимость  $E_{eq}(\chi_{av})$  численно определяется из (27). В вычислениях принималось  $\delta = 10^{-6}$ . Экспериментальная зависимость  $\Psi(\chi_{av})$  неизвестна. Однако из общих соображений на нее накладываются следующие условия при всех значениях  $\chi_{av}$ :

$$\frac{d\Psi}{d\chi_{av}} < 0, \quad \frac{d^2\Psi}{d\chi_{av}^2} > 0. \quad (32)$$

Чтобы определить влияние параметров  $\alpha$  и  $h_s/H_0$  на пластическое разрушение, проведены вычисления при  $H_1/H_0 = 0,8$ ,  $\theta_0 = 10^\circ$ . При этом учитывалась зависимость между  $\alpha$  и  $h_s/H_0$  (см. рис. 2). На рис. 3 представлена зависимость  $E_{eq}(\chi_{av})$  при различных значениях  $h_s/H_0$ . Все кривые начинаются в одной точке, соответствующей точке  $A$  на рис. 1, а заканчиваются в точках, соответствующих точке  $B$ . На рис. 3 показана также зависимость (5), удовлетворяющая условию (32), в том случае, когда разрушение происходит в точке  $B$  при  $h_s/H_0 = 0,03$ . При других рассмотренных значениях  $h_s/H_0$  (при  $0,03 < h_s/H_0 \leq 0,1$ , в частности при  $h_s/H_0 = 0,04; 0,10$ ) разрушения не происходит. Таким образом, при данных геометрических параметрах процесса меньшим значениям  $h_s$  соответствует более интенсивный процесс пластического разрушения. На рис. 4 приведены зависимости  $E_{eq}(\chi_{av})$  при  $H_1/H_0 = 0,8$ ,  $h_s/H_0 = 0,1$  и различных углах раствора матрицы. Из рис. 3, 4 следует, что величина  $E_{eq}$  в точке  $B$  возрастает с уменьшением  $\theta_0$ . (Более четко это видно на рис. 3.) Это следует из того, что на рис. 4 штриховая линия, проходящая

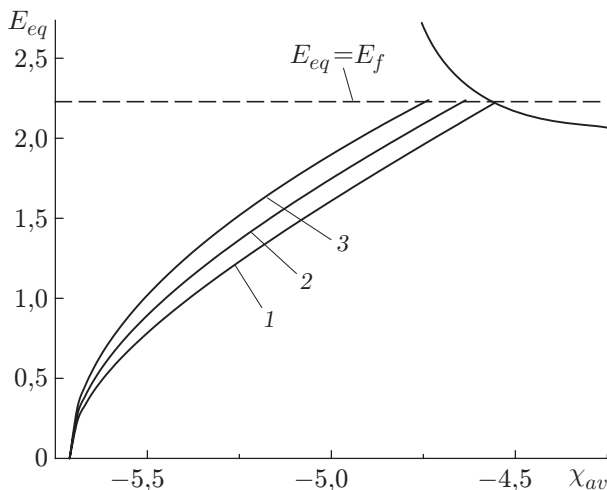


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость  $E_{eq}$  от  $\chi_{av}$  при  $H_1/H_0 = 0,8$ ,  $\theta_0 = 10^\circ$  и различных значениях  $h_s/H_0$ :

1 —  $h_s/H_0 = 0,03$ ; 2 —  $h_s/H_0 = 0,04$ ; 3 —  $h_s/H_0 = 0,10$

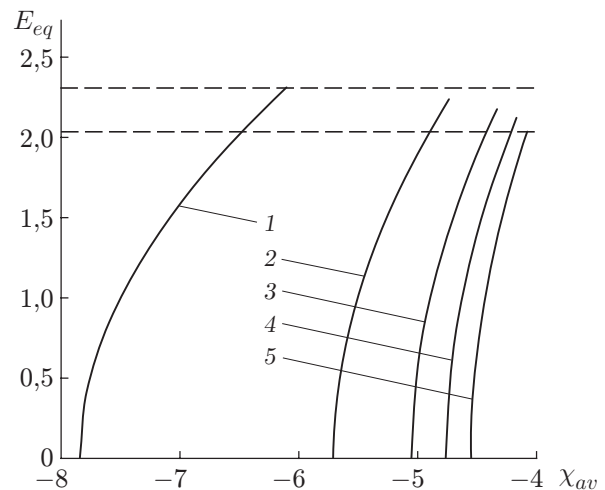


Рис. 4

Рис. 4. Зависимость  $E_{eq}$  от  $\chi_{av}$  при  $H_1/H_0 = 0,8$ ,  $h_s/H_0 = 0,1$  и различных значениях  $\theta_0$ :

1 —  $\theta_0 = 5^\circ$ ; 2 —  $\theta_0 = 10^\circ$ ; 3 —  $\theta_0 = 15^\circ$ ; 4 —  $\theta_0 = 20^\circ$ ; 5 —  $\theta_0 = 30^\circ$

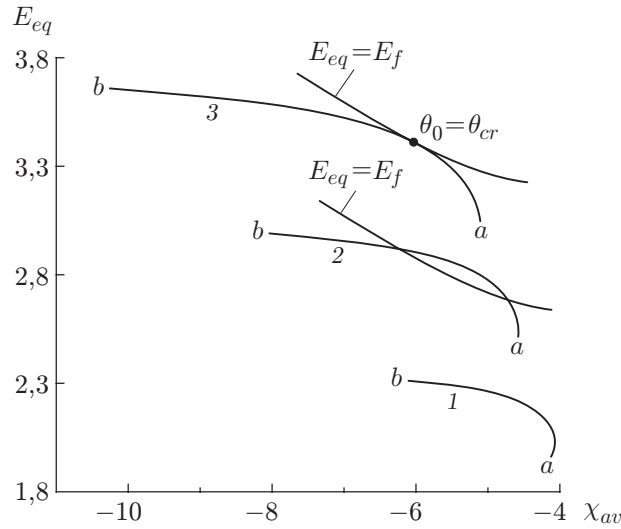


Рис. 5. Зависимость  $E_{eq}$  от  $\chi_{av}$  в точке  $B$  (см. рис. 1) при  $h_s/H_0 = 0,1$  и различных значениях  $H_1/H_0$ :  
 1 —  $H_1/H_0 = 0,8$ ; 2 —  $H_1/H_0 = 0,7$ ; 3 —  $H_1/H_0 = 0,6$

через правую конечную точку кривой 1 (т. е. соответствующая значению  $E_{eq}$ , при котором происходит разрушение в случае  $\theta_0 = 5^\circ$ ), расположена выше штриховой линии, проходящей через правую конечную точку кривой 5 (т. е. соответствующей значению  $E_{eq}$ , при котором происходит разрушение в случае  $\theta_0 = 30^\circ$ ), а конечные правые точки остальных кривых лежат между этими двумя штриховыми линиями. Однако при уменьшении  $\theta_0$  значение  $\chi_{av}$  в точке  $B$  уменьшается. Поэтому с учетом ограничений (32) нельзя определить наиболее опасный угол раствора матрицы, не зная точную зависимость (5). Тем не менее на рис. 4 видно, что такой угол существует. Это утверждение подтверждается представленными на рис. 5 результатами. На рис. 5 показаны зависимости  $E_{eq}(\chi_{av})$  в точке  $B$  (см. рис. 1) при изменении угла раствора матрицы в интервале  $5^\circ \leq \theta_0 \leq 45^\circ$ . Точке  $b$  каждой кривой соответствует значение  $\theta_0 = 5^\circ$ . Увеличению угла  $\theta_0$  соответствует перемещение по кривой к точке  $a$ , которой в свою очередь соответствует значение  $\theta_0 = 45^\circ$ . На рис. 5 представлены также зависимости (5), удовлетворяющие условиям (32). При  $H_1/H_0 = 0,6$  кривая, соответствующая зависимости (5), приведена для случая, когда она касается кривой  $E_{eq}(\chi_{av})$  в одной точке. Эта точка определяет наиболее опасный угол  $\theta_0 = \theta_{cr}$ . При  $H_1/H_0 = 0,7$  кривая, соответствующая зависимости (5), приведена для случая, когда она пересекается с кривой  $E_{eq}(\chi_{av})$  в двух точках. Эти две точки определяют два значения угла  $\theta_0$ , при которых разрушение происходит в точке  $B$  (см. рис. 1). Однако, если угол матрицы находится в интервале между этими двумя значениями, то разрушение произойдет до того момента, когда материальная точка достигнет точки  $B$ . В частности, угол  $\theta_{cr}$  всегда принадлежит этому интервалу. При  $H_1/H_0 = 0,8$  разрушения не происходит, если зависимости (5) соответствует любая из кривых  $E_{eq} = E_f$ , показанных на рис. 5.

Процесс плоского волочения рассматривается аналогично. При этом достаточно применить условие (24) при  $r = R_A$ . Тогда вместо (25) получаем

$$G = \frac{1}{\sin \theta_0} \int_0^{\pi/4} \frac{\cos \psi}{c - \cos 2\psi} [c \cos \theta \ln (c - \cos 2\psi) - \cos (2\psi + \theta)] d\psi. \quad (33)$$

Величину  $G$  необходимо подставить в (26), что приведет к сдвигу кривых  $E_{eq}(\chi_{av})$  на рис. 3–5 вдоль оси абсцисс в положительном направлении. Тот факт, что эти кривые сдви-

гаются, и предположение (32) позволяют сделать следующий вывод: при волочении пластическое разрушение происходит более интенсивно, чем при выдавливании. Из (25), (33) следует, что разность значений  $G$  в случаях выдавливания и волочения равна первому члену в правой части (25). В случае волочения это позволяет построить графики, аналогичные приведенным на рис. 3–5, не проводя дополнительных численных расчетов. Однако при этом необходимо, чтобы при  $r = R_B$  среднее напряжение не превышало  $2\tau_s$ . Это условие легко проверяется с помощью решения (23).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Aukrust T., LaZghab S.** Thin shear boundary layers in flow of hot aluminium // Intern. J. Plast. 2000. V. 16, N 1. P. 59–71.
2. **Moylan S. P., Kompella S., Chandrasekar S., Farris T. N.** A new approach for studying mechanical properties of thin surface layers affected by manufacturing processes // Trans. ASME. J. Manuf. Sci. Engng. 2003. V. 125. P. 310–315.
3. **Трунина Т. А., Коковихин Е. А.** Формирование мелкодисперсной структуры в поверхностных слоях стали при комбинированной обработке с применением гидропрессования // Пробл. машиностроения и надежности машин. 2008. № 2. С. 71–74.
4. **Александров С. Е., Грабко Д. З., Шикимака О. А.** К определению толщины слоя интенсивных деформаций в окрестности поверхности трения в процессах обработки металлов давлением // Пробл. машиностроения и надежности машин. 2009. № 3. С. 72–78.
5. **Александров С. Е., Лямина Е. А.** Предсказание разрушения вблизи поверхностей трения в процессах обработки металлов давлением // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 5. С. 169–174.
6. **Александров С. Е., Лямина Е. А.** Нелокальный критерий разрушения вблизи поверхностей трения и его приложение к анализу процесса вытяжки и выдавливания // Пробл. машиностроения и надежности машин. 2007. № 3. С. 62–68.
7. **Alexandrov S., Richmond O.** Singular plastic flow fields near surfaces of maximum friction stress // Intern. J. Non-Linear Mech. 2001. V. 36, N 1. P. 1–11.
8. **Колмогоров В. Л.** Пластичность и разрушение. М.: Металлургия, 1977.
9. **Александров С. Е., Вилотич Д.** Экспериментально-теоретическое определение диаграммы пластичности // Пробл. машиностроения и надежности машин. 2006. № 5. С. 31–36.
10. **Хилл Р.** Математическая теория пластичности. М.: Гостехтеоретиздат, 1956.

*Поступила в редакцию 19/V 2010 г.*

---