Проблемы логики и методологии науки

УДК 160.1
DOI:
10.15372/PS20160403

В.В. Целищев

СЕМАНТИЧЕСКАЯ ИЗБЫТОЧНОСТЬ В КОНЦЕПЦИИ ИСТИННОСТИ ГЕДЕЛЕВА ПРЕДЛОЖЕНИЯ*

В статье анализируется проблема определения истинности геделева предложения в рамках семантического аргумента М. Даммита. Стратегия избегания предиката истины через использование дефляционной концепции истины, предложенная Н. Теннантом, рассматривается через призму концепции семантической избыточности. Обоснование истинности геделева предложения на этом пути связывается с принципами рефлексии.

Ключевые слова: геделево предложение; семантическая избыточность; дефляционная концепция истины; принципы рефлексии

V.V. Tselishchev

THE SEMANTIC REDUNDANCY IN THE CONCEPTION OF THE TRUTH OF GÖDELIAN SENTENCE

The article analyzes the problem of determining the truth of Gödelian sentence in the context of M. Dummett's semantic argument. N. Tennant's strategy of avoiding the truth predicate through the deflationary conception of truth is considered in respect to the concept of semantic redundancy. The justification of the truth of Gödelian sentence is associated with principles of reflection.

* Исследования, нашедшие отражение в данной статье, поддержаны Российским научным фондом (грант 16-18-10359).

В ссылке на грант в статье Целищева В.В. и Бессонова А.В. «Подстановочная квантификация в базовой логике и онтологические допущения в формальных математических теориях» (Философия науки. № 3, 2016, с. 32–48) вместо «Работа выполнена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда, проект № 16-18-10359» следует читать: «Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 16-18-10359».

Keywords: Gödel sentence; semantic redundancy; deflationary conception of truth; principles of reflection

В математических работах о геделевских теоремах о неполноте истинность геделева предложения считается само собой разумеющимся фактом, усматриваемым из самого способа построения этого предложения. Однако тщательное рассмотрение показывает, что при использовании таких концепций, как истина, требуется философский анализ. Сам Гедель подчеркивал важность именно философских соображений. Г. Крайзель говорит об этом так: «Сам Гедель… постоянно подчеркивал… как мало потребовалось ему новых математических построений. Оказалось, что надо было только обратить внимание на некоторые достаточно общеизвестные (философские) различия. Например, для его наиболее популярного результата это различение между арифметической истинностью, с одной стороны, и выводимостью по (произвольно заданным) формальным правилам – с другой. Совершенно не испытывая угрызений совести по поводу того, что он, так сказать, "поживился на дармовщинку", Гедель видел в своих первых успехах реализацию следующей, часто забываемой, но плодотворной общей схемы. Внимательно рассматривая подходящие традиционные философские концепции и вопросы, анализируя их и, возможно, добавляя чуть-чуть точности, мы безболезненно приходим к нужным понятиям, правильным гипотезам и достаточно простым доказательствам» [1, с. 7].

Действительно, геделево предложение, недоказуемое в формальной системе, но полагаемое истинным, занимает особое место при рассмотрении различных концепций истинности. Обычный критерий истинности арифметических утверждений состоит в их доказуемости. В случае же геделевого предложения мы имеем истинное, но недоказуемое утверждение. Это обстоятельство является не просто одной из математических тонкостей в конструкциях Геделя, а его важнейшей методологической установкой.

Парадоксальность геделева предложения G «начинается» уже с того, что оно является истинным, поскольку неразрешимость G формулируется на синтаксическом уровне. Проблема состоит в том, чтобы проследить, как из факта, что ни само G, ни его отрицание не выводятся из аксиом арифметики Пеано (PA), делается вывод об истинности G. Объяснение истинности G зиждется на эффекте неполноты дедуктивной системы, но вместе с тем оно должно быть связано с природой самой конструкции *G*. Недавняя статья М. Пьяцца и Г. Пульчини, обращенная к этому вопросу, имеет характерное название «Что такого специального в геделевом предложении *G*?» [9]. Исследователи согласны с тем, что *G* по своей природе *sui generis*, выходящее за рамки обычной классификации предложений, которые можно назвать истинными.

В учебниках и стандартных изложениях материала фигурирует то, что в вышеупомянутой статье называется наивным аргументом в пользу истинности *G*. Ход мысли здесь таков: *G* говорит «Я недоказуемо в *PA* (арифметике Пеано)». Первая теорема Геделя о неполноте устанавливает недоказуемость *G* в *PA* и тем самым удостоверяет истинность *G*. Дж. Лукас, который одним из первых сделал из этого факта вывод о превосходстве ума над компьютером, излагает соображения в пользу истинности следующим, можно сказать, эллиптическим способом: «Мы рассматриваем формулу, которая говорит на самом деле, что “эта формула недоказуема-в-системе”. …Формула “эта формула недоказуема-в-системе” является недоказуемой-в-системе. Далее, если формула “эта формула недоказуема-в-системе” является недоказуемой-в-системе, тогда истинно, что эта формула недоказуема-в-системе, т.е. “эта формула недоказуема в системе” истинно» [7, p. 44].

Другими словами, можно интуитивно видеть истинность предложения *G*, потому что «оно говорит о себе, что оно недоказуемо». П. Раатикайнен упоминает помимо «наивного» взгляда еще две точки зрения на истинность *G* [10]. Во-первых, это концепция М. Даммита, суть которой в том, что утверждение об истинности *G* справедливо для стандартной модели. Во-вторых, сама постановка вопроса об истинности *G* осмысленна только в терминах доказуемости этого предложения в более сильной системе. Эта точка зрения существенно связана с идеей устранения неполноты добавлением *G* к исходной формальной системе в качестве аксиомы.

Прослеживание дедуктивного обоснования истинности *G* осуществляется с использованием двух тактик, одна из которых связана с «наивным» взглядом, а вторая – с идеей Даммита. Разрешение *G* в более сильной системе оказывается частью идеи Даммита. Что касается двух тактик, то они различаются упором на разные аспекты *G*: оно может выступать как метаматетическое утверждение, что свойственно «наивному» взгляду, а может выступать как арифметическое утверждение, что важно при анализе идеи Даммита, связанной с концепцией стандартной интерпретации. Это важное различение лежит в основе современной дискуссии о природе геделева предложения.

Не менее важным является вопрос о том, какого рода истинность имеется в виду при разговоре об истинности G. Существуют две полярные концепции истины. Первая является субстанциональной, или существенной, играющей важную роль в выразительных возможностях языка через понятие предиката истины. Вторая, дефляционная концепция истины, фактически полагает понятие истины своего рода сокращением, которое не вносит вклада в выразительные возможности языка. Если установление истинности G опирается на дефляционную концепцию истины, можно говорить о семантической избыточности той тактики, в рамках которой для обоснования истинности G используется предикат истинности.

Эти два вопроса – какая именно тактика используется для установления истинности G, и какая теория истинности при этом имеется в виду – составляют довольно сложную программу исследований специфики геделевской конструкции при доказательстве неполноты достаточно богатой формальной системы арифметики. Эта программа включает в себя помимо упомянутых выше проблем анализ так называемого семантического аргумента в пользу истинности G, играющего ключевую роль в понимании природы неполноты. Данная статья может рассматриваться как первая часть (что-то вроде пролегомен) исследования этой сложной проблематики.

Если первая теорема о неполноте Геделя сформулирована в синтаксических терминах, надо понять, откуда берется утверждение об истинности геделева предложения. Пусть имеется некоторая достаточно сильная формальная система F, в которой конструируется геделево предложение $G(F)$. В такой системе доказуема теорема

$G(F)$ истинно, если и только если, F непротиворечива.

Ни одна из частей этой эквивалентности не может быть доказана отдельно. В этом смысле важно понимать, что утверждение об истинности геделева предложения равносильно утверждению о непротиворечивости системы. Если при рассмотрении формальной системы предполагается ее непротиворечивость, тогда неявно предполагается истинность геделева предложения. От такого неявного предположения нельзя перейти к «интуитивному» осознанию истинности геделева предложения, потому что при этом придется признать интуитивное осознание непротиворечивости формальной системы. Между тем были случаи, когда подобного рода интуиция в отношении непротиворечивости подводила весьма известных исследователей. С другой стороны, следует признать важность интуитивных соображений, отмечая при этом, что интуиция в этом случае предстает как акт веры в непротиворечивость системы. Степень веры тут определяется опытом, который исследователь имеет в работе с системой, и во многом уверенность в непротиворечивости зависит от исследуемой системы. Тем не менее надо признать, что вместо чисто интуитивных соображений в пользу непротиворечивости системы, а стало быть, и истинности геделева предложения следует наметить логические соображения.

В логическом плане геделево предложение представляет собой универсальную квантификацию предиката доказуемости. Как было указано выше, существует два подхода к утверждению истинности геделева предложения. Можно попытаться показать это для квантифицируемого предложения в целом, что и свойственно стандартному, или «наивному», взгляду. Следует также помнить: этот взгляд ассоциируется с пониманием геделева предложения как метаматематического утверждения, основанного на диагональной лемме. Между тем, поскольку геделево предложение G конструируется с помощью Диагональной Леммы, которая и обеспечивает самореференцию, т.е. указание на «доказательство-внутри-системы-F», геделево предложение имеет специфическое отношение к системе. Это отношение выходит за рамки собственно системы A, находясь на более высоком уровне. Поэтому интерес представляет утверждение истинности квантифицируемого утверждения через установление истинности его подстановочных примеров, т.е. через установление истинности предиката под квантором для конкретных чисел. При этом геделево предложение понимается не как метаматематическое утверждение, а как арифметическое утверждение.

В недавней своей статье «Откуда мы знаем, что геделево предложение непротиворечивой теории истинно?» [11] Г. Серени привел убедительные аргументы в пользу первой тактики, объявив геделево предложение особым, истинность которого можно показать, имея дело с квантифицируемым предложением. В данной статье мы не рассматриваем эту тактику, сосредоточив внимание на второй тактике, связанной с анализом идеи «семантического аргумента» М. Даммита [4].

Неразрешимость геделева предложения является его синтаксическим аспектом. Истинность геделева предложения – это семантический аспект, взывающий к понятию модели формальной системы. Коль скоро геделево предложение неразрешимо, оно может быть выполнимо в одних моделях и невыполнимо в других. Кардинальная идея Даммита состоит в том, что когда геделево предложение истинно, тогда это стандартная или намеренная интерпретация, а если оно ложно, то интерпретация нестандартная. Формальная система призвана доказывать истинные утверждения арифметики о натуральных числах исходя из интуитивных соображений, что означает нашу заинтересованность именно в стандартной модели. Соотнося с интуитивной концепцией того, что формализуется, мы распознаем геделево предложение как истинное. Нестандартная модель содержит такие элементы, которые не являются натуральными числами, и в подобной модели геделево предложение будет ложным. При таком понимании природы геделева предложения становится ясно, что первая теорема Геделя о неполноте говорит что-то важное относительно применимости предиката истины к арифметическим предложениям. Вопрос состоит в том, что именно.

Тогда вопрос об определении истинности геделева предложения зависит от типа модели, а именно от того, является ли она стандартной или нестандартной. Но как определить тип модели, есть ли какой-либо принцип, который позволяет нам отделить нестандартные модели от стандартных? Здесь мы встречаемся с определенными трудностями. Такой принцип не должен входить в те формальные средства, которыми эксплицируется интуитивное знание натуральных чисел, которые и являются намеренной или стандартной интерпретацией формализма. Значит, распознавание истинности геделева предложения выходит за рамки формализации концепции натурального числа, а сам принцип не может апеллировать к понятию натурального числа. В противном случае мы попали бы в порочный круг, поскольку именно формализация обнаруживает нестандартные объекты, которые можно назвать «сверхъестественными» числами. Конечного аксиоматического способа отделения «естественных», т.е. натуральных, чисел от «сверхъестественных» не существует, потому что одних лишь правил формальной системы будет недостаточно, для того чтобы определить, является ли геделево предложение истинным или ложным. И полагание системы непротиворечивой подразумевает, что в утверждении предложения G присутствует интуитивный оправданный смысл.

Предположение о том, что истинность всех утверждений $A(0)$, $A(1)$, $A(2)$, … влечет истинность универсальных квантификаций, будет заключением как раз внутри формальной системы благодаря правилу вывода и, стало быть, будет просто тривиальным. Это совпадает с точкой зрения С. Клини: «Если мы предполагаем, что теоретико-числовая формальная система должна быть непротиворечивой, мы можем распознать истинность G, приняв во внимание структуру этой системы как целого, хотя мы не можем распознать истинность G, используя только принципы вывода, формализованные в этой системе [6, p. 426].

Итак, формальная система не может нам сказать, истинно G или нет, и для того чтобы решить этот вопрос, мы опираемся на метод конструирования G. Это означает, как уже указывалось выше, использование диагонального метода, который позволяет осуществить «указание» на доказательство в системе и, таким образом, выйти за пределы формальной системы. Некоторые исследователи полагают, что выход за рамки системы может быть интерпретирован как введение в рассмотрение семантических соображений, которые и позволяют говорить об истинности G. В рамках такой программы Н. Теннант выдвинул так называемый «семантический аргумент», который выглядит следующим образом: «G есть универсальная квантификация примитивно-рекурсивного предиката. Каждый числовой пример этого предиката доказуем в системе S. (Это утверждение требует в качестве подаргумента использования геделевской нумерации и представимости в S рекурсивных свойств.) Доказательство в S гарантирует истинность. Отсюда, каждый числовой пример G истинен. Поэтому так как G есть просто универсальная квантификация над числовыми примерами, она также должна быть истинной» [13, p. 556].

Какие соображения можно выдвинуть в пользу именно такого рассмотрения? Геделевская нумерация и представимость являются техническими деталями, имеющими в данном случае решающее значение. Дело в том, что геделево предложение G трактуется неоднозначно, колеблясь между метаматематическим и арифметическим значениями. Действительно, конструирование G включает предикат доказуемости, который определяется как экзистенциальная квантификация примитивно-рекурсивного предложения $Prf\,(x, y)$. С одной стороны, $Prf\,(x, y)$ приписывается метатеоретическое значение, поскольку в арифметике Пеано доказывается $Prf\,(n^*, m^*)$, если и только если, n^* есть геделев номер доказательства, заканчивающегося формулой, чей геделев номер есть m^*. С другой стороны, G в плане доказательства эквивалентно предложению $\forall x \neg Prf\,(x, G^*)$, где $Prf\,(x, y)$ – разрешимый предикат. «Технический факт, что метатеоретическое и арифметическое прочтения оказываются эквивалентными через числовую представимость доказательств и формул, значит меньше, чем осознание их концептуального различия: согласно метатеоретическому прочтению, G равносильно самореферентному предложению, утверждающему, что “G недоказуемо в арифметике Пеано”. В противоположность этому, арифметическое прочтение говорит нам, что G равносильно предложению, утверждающему вполне установленное свойство относительно некоторого кодирующего алгоритма, удовлетворяющего определенным свойствам» [9, p. 246].

Существует убедительная аргументация, что метатеоретическое прочтение не ведет к пониманию того, каким образом можно прийти к истинности G дедуктивным путем. В данной работе мы не останавливаемся на этой аргументации. Если она верна, тогда остается арифметическое прочтение и истинность G устанавливается через истинность числовых примеров.

Если для установления истинности G нужно установить истинность всех ее числовых примеров, возникает вопрос: какова цена такого установления? Является ли выход на более высокий уровень оправданным, поскольку он вводит понятие предиката истины? Использование существенного понятия истины – «толстой» (thick) в противоположность «тонкой» (thin) – вносит значительные усложнения в понимание природы истинности геделева предложения, и поэтому семантический аргумент Теннанта апеллирует к дефляционной теории истины. Геделево предложение G можно распознать как «истинное» в смысле «утверждаемости» без использования «толстой» концепции истины или апелляции к ней, т.е. избегая семантического понятия модели или предиката истины в стиле Тарского [8, p. 72].

Использование дефляционной теории истины имеет свои достоинства, в частности, как отметил С. Шапиро, большая выразительная сила системы с предикатом истины может сопровождаться сильным и неэффективным понятием логического следования [12]. Больше того, при этом избегается неясность, связанная с ситуацией, когда истинность приписывается предложению, которое находится в области действия универсального квантора.

Но действительно ли использование дефляционной теории истины необходимо для разрешения вопроса об истинности геделева предложения как некоторой альтернативы существенной концепции истины? Или же привлекаемые семантические концепции, призванные дополнить анализ М. Даммита, на самом деле не являются такими уж необходимыми? На этот счет имеется два рода соображений. Во-первых, некоторые исследователи сомневаются в том, что при установлении истинности G действительно привлекаются семантические концепции. Так, Г. Серени утверждает, что «не совсем ясно, что в точности имеет в виду Теннант под своей фразой “семантический аргумент”. Он может иметь в виду конкретный аргумент установления истинности *G*, или расплывчатый набор различных аргументов с той же целью… На самом деле он предпочитает доводы Даммита, поскольку… из всех рассмотрений того, как прийти к установлению истинности геделева предложения, даммитовский подход наиболее чувствителен к его логической структуре» [11, p. 56]. Под «расплывчатым набором» Серени имеет в виду утверждения Клини и Лукаса, в то же самое время подразумевая, что Теннант на самом деле просто формализует идею Даммита.

Второе соображение связано уже с предложением самого Теннанта. Преодоление неразрешимости *G* тривиальным способом через добавление к системе истинного предложения *G* в качестве аксиомы не помогает в обосновании семантического аргумента, поскольку в противном случае мы попадаем в порочный круг. Действительно, семантический аргумент требует обоснования того, что именно истинность атомарных предложений дает нам истинность универсальной квантификации, а именно предложения *G*, и если мы предполагаем уже эту истинность, тогда в основу доказательства кладется то, что требуется доказать.

С другой стороны, именно семантический аргумент «благословляет» добавление предложения *G* к непротиворечивой системе *S* для получения новой непротиворечивой системы $S^{\#}$, поскольку *G* истинно. Непротиворечивость новой системы является фактом метаматематическим, и коль скоро в его обосновании участвует семантический аргумент, уместно спросить об обосновании самого семантического аргумента. Это обоснование может использовать как существенную, так и дефляционную теорию истины. Первая использует предикат истины, а вторая обходится без него, но ценой принятия других средств гарантирования непротиворечивости $S^{\#}$. Такая гарантия достигается полаганием истинности *G*, однако в деле обоснования требуются более надежные с объяснительной точки зрения средства. Но какие средства требуются для нетривиального доказательства истинности *G*? Этот вопрос равносилен вопросу о том, чему равносилен переход от *S* к $S^{\#}$.

Переход от *S* к $S^{\#}$ можно было бы осуществить принятием принципа Σ^0_1-рефлексии [5]. Согласно этому принципу, любое *S*-доказуемое Σ^0_1-предложение истинно в стандартной модели, т.е. экзистенциальная квантификация формулы доказуема в *S* только в том случае, если конкретизация формулы истинна для стандартных натуральных чисел. Далее, ω-непротиворечивость для любой системы *S* эквивалентна принципу $\Sigma^0{}_1$-рефлексии для S, и, значит, ω-непротиворечивость влечет G. Схематически этот аргумент выглядит так:

1) ω-непротиворечивость $S \equiv \Sigma^0{}_1$-рефлексии для S;
2) ω-непротиворечивость $S \to$ непротиворечивость S;
3) ω-непротиворечивость $S \to G$.

Таким образом, принцип $\Sigma^0{}_1$-рефлексии оказывается слишком сильным средством, которое просто вводит G как истинное без объяснения причин истинности. Действительно,

1) ω-непротиворечивость $S \to G$;
2) ω-непротиворечивость $S \to$ истинность G.

Гораздо более интересным является использование другого принципа, равносильного принципу рефлексии, а именно, добавление к системе S формализованной версии непротиворечивости S, традиционно обозначаемой через *Consis* (S). И по своей логической силе *Consis* (S) равен G. Этот принцип принадлежит уже не к S, а к S*. Интерес к этому принципу с точки зрения концепции избыточности семантики состоит в том, что *Consis* (S) является синтаксическим предложением, а это в конечном счете отвечает желанию обосновать семантический аргумент, но уже не в семантических терминах, а в синтаксических.

Однако принятие *Consis* (S) в качестве нового принципа рефлексии встречается с затруднением, которое нивелирует саму цель привлечения этого принципа для объяснения семантического аргумента синтаксическими средствами. Как отмечает Н. Теннант, дедуктивная структура семантического аргумента перестает отвечать неформальному его представлению, поскольку переход от метауровня, на котором происходит демонстрация недоказуемости G в S, на уровень, где G есть часть объект-языка, а посылка о непротиворечивости становится арифметическим утверждением *Consis* (S), дедуктивный процесс становится непредсказуемо длинным [13, p. 563–564].

Таким образом, возникает вопрос: допустимо ли для реконструкции семантического аргумента Даммита использовать дефляционную теорию истины, применяя вместо предиката истины некоторые принципы рефлексии? Другими словами, является ли концепция избыточности семантики в случае установления истинности «особого» геделева предложения обоснованной в смысле отказа от существенной теории истины?

Н. Теннант полагает, что дефляционная стратегия состоит в том, чтобы вместо использования предиката истины апеллировать к принципам рефлексии. Общий вид некоторого класса принципов рефлексии в виде аксиомы таков:

$$Prov_S(\varphi^*) \to \varphi,$$

где φ^* – геделев номер рекурсивной формулы φ. Присоединение этой аксиомы к аксиомам S для получения расширенной системы $S^{\#}$ является средством выражения веры в обоснованность системы. Соотношение двух систем S и $S^{\#}$ взывает к применению этого самого принципа рефлексии, поскольку, согласно С. Феферману, принципы рефлексии утверждают, что постулируемые аксиомы при расширении системы выражают определенное доверие в расширяемой системе. При таком понимании принципов рефлексии решающей является замена ими предиката истины.

Выражение, приведенное выше, является на самом деле схемой аксиом, утверждающих, что все доказуемое в S истинно, но уже без использования соответствующего предиката. В целом, принципы рефлексии напрямую связаны с концепцией неполноты формальной системы: «Один из вариантов доктрины Геделя состоит в том, что “истинная причина” феномена неполноты заключается в том, что хотя формальная система S может неформально осознаваться как правильная, мы должны присоединить формальное выражение этого осознания посредством принципа рефлексии, для того чтобы можно было разрешить неразрешимые предложения» [5, p. 12–13].

Цель применения принципов рефлексии состоит в обосновании истинности предложений. В применении к геделеву неразрешимому предложению это означает следующее. Показать истинность этого предложения можно через демонстрацию обоснованности системы, т.е. когда все истинные предложения доказуемы. Именно по этой причине мы стремимся сделать неразрешимое геделево предложение доказуемым через расширение исходной системы. Такое расширение должно быть законным и естественным. Законность и естественность извлекаются из того факта, что необходимо постулировать некоторые теоретико-истинностные принципы, из которых бы следовало, что все теоремы S истинны. Само по себе постулирование не должно вызывать возражения, и оно даже необходимо, потому что вопрос о непротиворечивости часто остается вопросом веры.

Использование принципов рефлексии как формальных аксиом может быть интерпретировано различным образом. В духе стратегии семантической избыточности Н. Теннант считает, что такое использование свидетельствует о том, что понятие истины в виде предиката не является необходимым для понимания истинности геделева предложения. Пенроуз, напротив, полагает, что именно принципы рефлексии являют собой результат «озарения», которое не может быть систематизировано и которое лежит вне сферы действия любой формальной системы: «Интуитивная догадка, позволяющая установить истинность геделева предложения, есть разновидность общей процедуры, известной логикам под названием “принцип рефлексии”: с ее помощью, размышляя над смыслом системы аксиом и правил вывода и убеждаясь в их способности приводить к математическим истинам, можно преобразовать интуитивные представления в новые математические выражения, не выводимые из тех самых аксиом и правил вывода… Если использовать [принципы рефлексии] аккуратно, то они позволяют вырваться за жесткие рамки любой формальной системы и получить новые, основанные на интуитивных догадках представления, которые ранее считались недостижимыми» [2, с. 100].

Позиция Пенроуза является радикальной в том отношении, что он вообще отбрасывает в сторону проблему логического определения истинности геделева предложения, полагая истину чисто интуитивным понятием. Гораздо более серьезным возражением против стратегии семантической избыточности Теннанта является, например, то, что переход к более сильной системе, в которой может быть доказано геделево предложение, должен быть оправдан более серьезными резонами, а не просто желанием сделать геделево предложение истинным [3]. В этом отношении стратегия Теннанта может оказаться неадекватной экспликацией замысла Даммита в объяснении истинности геделева предложения, и тогда вопрос о семантической избыточности в этом объяснении останется открытым.

Литература

1. *Крайзель Г.* Биография Курта Геделя. – Москва; Ижевск: Ин-т комп. исслед., 2003.

2. *Пенроуз Р.* Новый ум короля: О компьютерах, мышлении и законах физики. – М.: Едиториал URSS, 2002.

3. *Boyer J., Sandu G.* Between proof and truth // Synthese. – 2012. – Vol. 187. – P. 821–832.

4. *Dummett M.* The philosophical significance of Gödel theorem // Truth and Other Enigmas. – Cambridge, MA: Harvard University Press, 1978.

5. *Feferman S.* Reflecting on incompleteness // Journal of Symbolic Logic. – 1991. – Vol. 56. – P. 1–49.

6. *Kleene S.C.* Introduction to Metamathematics. – North-Holland Publishing Co., 1964. – 426 p.

7. *Lucas J.* Minds, machines, and Gödel // Philosophy. – 1961. – Vol. 36, – P. 44.

8. *Piazza M., Pulcini G.* A deflationary account of the truth of the Gödelian sentence G // From Logic to Practice: Italian Studies in the Philosophy of Mathematics / Ed. by G. Lolli, M. Panza, G. Venturi. – Springer, 2015.

9. *Piazza M., Pulcini G.* What's so special about the Gödel sentence G? // Objectivity, Realism, and Proof: FilMat Studies in Philosophy of Mathematics / Ed. by F. Boccini, A. Sereni. – Springer International Publishing, Switzerland, 2016. – P. 245–263.

10. *Raatikainen P.* On the philosophical relevance of Gödel's incompleteness theorems // Revue Internationale de Philosophie. – 2005. – Vol. 59, No. 4. – P. 513–534.

11. *Sereny G.* How do we know that the Gödel sentence of a consistent theory is true // Philosophia Mathematica. – 2011. – Vol. 19, n. 1. – P. 47–73.

12. *Shapiro S.* Proof and truth: through thick and thin // Journal of Philosophy. – 1998. – Vol. XCV, n. 10. – P. 493–521.

13. *Tennant N.* Deflationism and the Gödel phenomena // Mind. – 2002. -Vol. 111, n. 443. – P. 556.

References

1. *Kreisel, G.* (2003). Biografiya Kurta Gödelya [The Biography of Kurt Gödel; *original title:* Kurt Gödel, 1906–1978]. Moscow, Izhevsk, Institute of Integrated Studies. (In Russ.).

2. *Penrose, R.* (2002). Novyy um korolya: O kompiyuterakh, myshlenii i zakonakh fiziki [The Emperor's New Mind. Concerning Compters, Minds and the Laws of Physics]. Moscow, Editorial URSS Publ. (In Russ.).

3. *Boyer, J. and G. Sandu.* (2012). Between proof and truth. Synthese, 187, 821–832.

4. *Dummett, M.* (1978). The philosophical significance of Gödel theorem. In: Truth and Other Enigmas.Cambridge, MA, Harvard University Press.

5. *Feferman, S.* (1991). Reflecting on incompleteness. Journal of Symbolic Logic, 56, 1–49.

6. *Kleene, S.C.* (1964). Introduction to Metamathematics. North-Holland Publishing Co., 426.

7. *Lucas, J.* (1961). Minds, machines, and Gödel. Philosophy, 36, 44.

8. *Piazza, M., G.Pulcini; G. Lolli (Ed.), M. Panza (Ed.) and G. Venturi (Ed.).* (2015) A deflationary account of the truth of the Gödelian sentence G. In: From Logic to Practice. Italian Studies in the Philosophy of Mathematics. Springer Publ.

9. *Piazza, M., G. Pulcini; F. Boccini (Ed.) and A. Sereni (Ed.).* (2016). What's so special about the Gödel sentence G? In: Objectivity, Realism, and Proof. FilMat Studies in Philosophy of Mathematics. Springer International Publishing, Switzerland, 245–263.

10. *Raatikainen, P.* (2005). On the philosophical relevance of Gödel's incompleteness theorems. Revue Internationale de Philosophie, Vol. 59, No. 4, 513–534.

11. *Sereny, G.* (2011). How do we know that the Gödel sentence of a consistent theory is true. Philosophia Mathematica, Vol. 19, No. 1,47–73.

12. *Shapiro, S.* (1998). Proof and truth: through thick and thin. Journal of Philosophy, Vol. XCV, No. 10, 493–521.

13. *Tennant, N.* (2002). Deflationism and the Gödel phenomena. Mind, Vol. 111, No. 443 556.

Информация об авторе

Целищев Виталий Валентинович – доктор философских наук, профессор, заведующий кафедрой гносеологии и истории философии Новосибирского национального исследовательского государственного университета (630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2); директор Института философии и права СО РАН (630090, Новосибирск, ул. Николаева, 8, e-mail:leitval@gmail.com)

Information about the author

Tselishchev, Vitaliy Valentinovich – Doctor of Sciences (Philosophy), Professor, Chief of the Department of Gnoseology and History of Philosophy at Novosibirsk National Research State University (2, Pirogov st., Novosibirsk, 630090, Russia); Director of the Institute of Philosophy and Law, Siberian Branch of the Russian Academy of Science (8, Nikolaev st., Novosibirsk, 630090, Russia, e-mail: leitval@gmail.com).

Дата поступления 01.10.2016