УДК 532.59

О свойствах разностных схем для решения нелинейно-дисперсионных уравнений повышенной точности. I. Случай одной пространственной переменной*

З.И. Федотова, Г.С. Хакимзянов

Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

E-mails: zf@ict.nsc.ru (Федотова З.И.), khak@ict.nsc.ru (Хакимзянов Г.С.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале "Numerical Analysis and Applications" № 4, Vol. 16, 2023.

Федотова З.И., Хакимзянов Г.С. О свойствах разностных схем для решения нелинейно-дисперсионных уравнений повышенной точности. I. Случай одной пространственной переменной // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2023. — Т. 26, № 4. — С. 451–467.

Построена разностная схема типа предиктор–корректор для решения нелинейно-дисперсионных уравнений волновой гидродинамики с повышенным порядком аппроксимации дисперсионного соотношения, основанная на расщеплении исходной системы уравнений на гиперболическую систему и скалярное уравнение эллиптического типа. Выполнен диссипативный и дисперсионный анализ новой схемы, получено условие ее устойчивости, выписана и проанализирована формула для фазовой ошибки. Найдены параметры, при которых достигается одинаковый порядок точности фазовых характеристик разностной схемы, аппроксимируемой ею нелинейно-дисперсионной модели и полной модели потенциальных течений.

DOI: 10.15372/SJNM20230408
EDN: ESXABF

Ключевые слова: *длинные поверхностные волны, нелинейно-дисперсионные уравнения, конечно-разностная схема, дисперсия, устойчивость, фазовая ошибка.*

Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S. On the properties of difference schemes for solving nonlinear dispersion equations of ingreased precision. I. The case of one spatial variable // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2023. — Vol. 26, № 4. — P. 451–467.

A difference scheme of the predictor–corrector type is constructed for solving nonlinear dispersion equations of wave hydrodynamics with a high order of approximation of the dispersion relation, based on splitting of the original system of equations into a hyperbolic system and a scalar equation of the elliptic type. A dissipation and dispersion analysis of the new scheme is performed, a condition for its stability is obtained, and a formula for the phase error is written and analyzed. Parameters are found at which the phase characteristics of the difference scheme, the nonlinear-dispersive model approximated by it, and the full model of potential flows have the same order of accuracy.

Keywords: *long surface waves, nonlinear dispersive equations, finite difference scheme, dispersion, stability, phase error.*

---

*Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации для ФИЦ ИВТ (проект № 1.3).

Введение

В настоящее время наряду с классическими бездисперсионными моделями мелкой воды, описывающими поведение длинных волн [1, 2], применяются нелинейно-дисперсионные (НЛД) модели, включающие частотную дисперсию, заметную при распространении волн средней длины [3–6]. Один из способов определения областей применимости моделей мелкой воды опирается на использование дисперсионного параметра $\mu = d_0/\lambda_0$ (d_0 и λ_0 — характерные значения глубины акватории и длины волны) и заключается в оценке отклонений дисперсионных характеристик моделей мелкой воды от соответствующих характеристик трехмерной линеаризованной задачи Коши–Пуассона для потенциальных течений. В результате получаются ограничения на μ [7]: для длинных волн $\mu \lesssim 0.05$, для средних волн $\mu \lesssim \mu_*$, при этом для известных НЛД-моделей второго длинноволнового приближения [4, 5] имеем $\mu_* = 0.22$. Рассматриваемая в настоящей работе модель второго длинноволнового приближения с повышенной до $O(\mu^4)$ точностью дисперсионного соотношения обладает более широкой областью применимости: $\mu_* = 0.5$ [8].

Простейшим представителем НЛД-моделей является уравнение Бенджамина–Бона–Махони [9, 10]

$$\eta_t + c_0\eta_x = \frac{d^2}{6}\,\eta_{xxt}, \tag{1}$$

которое можно рассматривать как упрощенный вариант известной модели Серре–Грина–Нагди (SGN-модель) [6] для описания однонаправленного распространения слабо диспергирующих волн малой амплитуды. Здесь η — отклонение свободной поверхности воды от невозмущенного уровня, d — глубина канала с горизонтальным дном, $c_0 = \sqrt{gd}$, g —ускорение свободного падения. Уместно отметить, что аббревиатура SGN связана с именами авторов публикаций [3, 4], в которых в противовес классическим слабонелинейным моделям Буссинеска при выводе НЛД-модели не сделано предположение о малости амплитуды волны. НЛД-модели оказались востребованными на практике, что обусловило их интенсивное развитие в сторону расширения области применения и повышения точности воспроизведения характеристик изучаемых волновых процессов [6, 11].

До 90-х годов прошлого века преимущественно рассматривались НЛД-модели второго длинноволнового приближения уравнений Эйлера (с формальной точностью $O(\mu^2)$). Согласно способу получения определяющих уравнений этих моделей, соответствующие дисперсионные соотношения с такой же точностью $O(\mu^2)$ аппроксимировали дисперсионное соотношение исходной трехмерной модели.

Впоследствии было реализовано несколько идей повышения точности дисперсионного соотношения моделей с сохранением порядка их длинноволновой аппроксимации [7, 12]. В частности, в работе [8] выведена полностью нелинейная модель второго длинноволнового приближения $O(\mu^2)$, в которой порядок точности дисперсионного соотношения достигает $O(\mu^4)$. Эта модель, далее именуемая mSGN-моделью, получена путем модификации негидростатической части давления в SGN-модели. Упрощенный вариант mSGN-модели отличается от (1) наличием числового параметра β, а именно

$$\eta_t + c_0\eta_x = \frac{d^2}{6}\Big((1-\beta)\eta_{xxt} - c_0\beta\eta_{xxx}\Big), \tag{2}$$

при этом суть модификации состоит в том, что при подходящем выборе значения β фазовые характеристики mSGN-модели и полной модели потенциальных течений совпадают вплоть до $O(\mu^4)$ против $O(\mu^2)$ для случая SGN-модели (для модели (2) $\beta = -0.9$).

Известно, что классические уравнения мелкой воды, не учитывающие дисперсию, формально можно рассматривать как частный случай уравнений газодинамики для политропного газа, поэтому к ним удается применить всю теорию и численные методы для систем уравнений гиперболического типа [13, 14]. Переход к построению численных методов уравнений мелкой воды второго порядка по длинноволновому параметру оказался не столь простым. Причина в том, что система уравнений НЛД-модели не является системой типа Коши–Ковалевской, так как содержит смешанные производные третьего порядка по времени и пространственным переменным. Это обстоятельство требует специальных подходов к численной реализации НЛД-уравнений [15–17].

В [18] предложен численный алгоритм, особенность которого состоит в том, что он базируется на аппроксимации расширенной системы уравнений, состоящей из системы уравнений гиперболического типа, аналогичной системе уравнений мелкой воды, и уравнения эллиптического типа для проинтегрированной по глубине дисперсионной составляющей давления φ. Применительно к mSGN-модели (2) расширенная система выглядит следующим образом:

$$\eta_t + c_0\eta_x = \varphi_x, \qquad (1-\beta)\varphi_{xx} - \frac{\varphi}{\nu} = c_0\eta_{xx}, \qquad \nu = \frac{d^2}{6}.$$

В работах [16, 17] для расширенной системы, соответствующей SGN-модели, были предложены разностные схемы типа предиктор–корректор, которые успешно применяются для расчета течений с поверхностными волнами на плоскости и сфере [6]. В случае модели с улучшенным дисперсионным соотношением к аппроксимирующей ее разностной схеме предъявляются дополнительные требования согласования “схемной” дисперсии и дисперсии дифференциальной модели. В настоящей работе для решения mSGN-уравнений путем модификации одной из разностных схем [16] построена схема типа предиктор–корректор, содержащая параметр β, подходящий выбор которого обеспечивает повышенный порядок точности ее дисперсионного соотношения. Выполнен диссипативный и дисперсионный анализ новой схемы, получено условие ее устойчивости, выписана и проанализирована формула для фазовой ошибки. Определен круг схемных параметров и значение β, при которых достигается одинаковый порядок точности фазовых характеристик разностной схемы, аппроксимируемой ею mSGN-модели и полной модели потенциальных течений. Исследовано влияние параметра β на подавление коротковолновых гармоник. Проведенный анализ продемонстрировал ряд преимуществ предложенного численного алгоритма по сравнению с аналогичным для SGN-модели.

1. Уравнения mSGN-модели и свойства дисперсионного соотношения

К настоящему времени выведено множество моделей мелкой воды с дисперсией, отражающих широкий спектр задач о поведении относительно длинных поверхностных волн в разнообразных акваториях. Соответствующие НЛД-уравнения выводятся из уравнений Эйлера в предположении, что течение жидкости имеет длинноволновой характер, т. е. параметр μ мал. При выводе моделей мелкой воды второго длинноволнового приближения величинами порядка $O(\mu^4)$ пренебрегают.

В работе [8] получена mSGN-модель — однопараметрическая полностью нелинейная слабо дисперсионная модель с улучшенными дисперсионными свойствами, предназначенная для описания поверхностных волн средней длины, распространяющихся над нестационарным дном произвольной формы. В настоящей работе представлен одномерный вариант этой модели.

Рассматривается течение идеальной несжимаемой жидкости в слое, ограниченном снизу подвижным дном $y = -h(x,t)$, а сверху свободной границей $y = \eta(x,t)$, где t — время, x — координата точки в декартовой системе координат Oxy, ось Oy которой направлена вертикально вверх, а ось Ox совпадает с невозмущенной поверхностью воды ("одномерное" течение). Искомыми величинами являются полная глубина $H(x,t) = h(x,t) + \eta(x,t)$ и скорость $u(x,t)$ — средняя по толщине слоя воды горизонтальная составляющая вектора скорости течения $\mathbf{U}$ (далее переменную $u = u(x,t)$ также будем называть скоростью).

Как показано в [8], mSGN-уравнения имеют компактную квазидивергентную форму записи:

$$H_t + (Hu)_x \;=\; 0, \qquad (Hu)_t + \big(Hu^2 + p\big)_x \;=\; \check{p}h_x,$$

где

$$u(x,t) = \frac{1}{H(x,t)} \int\limits_{-h(x,t)}^{\eta(x,t)} \mathbf{U}(x,y,t)\,dy,$$

p — давление:

$$p = g\frac{H^2}{2} - \varphi, \quad \varphi = \frac{H^3}{3}R_1 + \frac{H^2}{2}R_2,$$

$$R_1 = D(u_x) - (u_x)^2 - \beta I_x, \quad R_2 = D^2 h - \beta I h_x, \quad I = u_t + uu_x + g\eta_x,$$

$\check{p}$ — давление на дне:

$$\check{p} = gH - \frac{H^2}{2}R_1 - HR_2,$$

$D = \partial/\partial t + u\partial/\partial x$. Числовой параметр β в формулах для негидростатической части давления p далее будет определен таким образом, что фазовые характеристики mSGN-модели (второго приближения) и полной модели потенциальных течений совпадут вплоть до членов порядка $O(\mu^4)$. При $\beta = 0$ выписанная система уравнений соответствует SGN-модели.

1.1. Дисперсионный анализ mSGN-модели

Для изучения свойств НЛД-уравнений, а также аппроксимирующих их разностных схем, привлекают упрощенные формулировки [15, 16]. При линеаризации в случае горизонтального дна mSGN-модель принимает вид

$$\eta_t + du_x = 0, \qquad u_t + g\eta_x = \frac{d^2}{3}\Big((1-\beta)u_t - \beta g\eta_x\Big)_{xx}, \tag{3}$$

где $0 < d = \mathrm{const}$ — глубина невозмущенной воды. Для исследования дисперсионных свойств этой модели рассматриваются решения, имеющие вид гармоник

$$\eta(x,t) = a_0 e^{-i(\omega t - kx)}, \quad u(x,t) = u_0 e^{-i(\omega t - kx)},$$

где a_0 и u_0 — амплитуды гармоник, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, ω — волновая частота. Для линеаризованной mSGN-модели (3) выражение для частоты выглядит следующим образом:

$$\omega = \left(gdk^2 \frac{1-\beta\zeta^2/3}{1+(1-\beta)\zeta^2/3}\right)^{1/2}, \tag{4}$$

где $\zeta = kd = 2\pi\mu$ и является действительным числом только в случае $\beta \le 0$.

Оценку дисперсионных свойств выполним сравнением фазовой скорости $c_{\mathrm{mSGN}}{=}\omega/k$ с эталонным (reference) аналогом c_{ref} линеаризованной задачи Коши–Пуассона для потенциальных течений:

$$\Delta_{\mathrm{mod}}(\zeta) = c_{\mathrm{mSGN}}(\zeta) - c_{\mathrm{ref}}(\zeta), \quad \zeta \ge 0. \tag{5}$$

Используя разложение по малому параметру ζ, получаем

$$c_{\mathrm{mSGN}} = c_0\sqrt{\frac{1-\beta\zeta^2/3}{1+(1-\beta)\zeta^2/3}} = c_0\left(1 - \frac{\zeta^2}{6} + (1-\beta)\frac{\zeta^4}{18} - \frac{\zeta^4}{72}\right) + O(\zeta^6),$$

$$c_{\mathrm{ref}} = c_0\sqrt{\frac{\tanh\zeta}{\zeta}} = c_0\left(1 - \frac{\zeta^2}{6} + \frac{\zeta^4}{15} - \frac{\zeta^4}{72}\right) + O(\zeta^6).$$

Сравнивая эти формулы, видим, что выбор значения $\beta = -0.2$ позволяет повысить порядок аппроксимации фазовой скорости mSGN-модели до $\Delta_{\mathrm{mod}}(\zeta) = O(\zeta^6)$.

На рисунке 1 изображены графики зависимости (5) при различных значениях параметра β. Все графики фазовой скорости $c_{\mathrm{mSGN}}(\zeta)$ при $\beta \in (-0.2, 0)$ расположены между кривыми, отвечающими $\beta = 0$ и $\beta = -0.2$, и в этом же коридоре находится график функции $c_{\mathrm{ref}}(\zeta)$, который имеет единственную точку пересечения $\zeta^*(\beta) > 0$ с графиком $c_{\mathrm{mSGN}}(\zeta)$ при $\beta \in (-0.2, 0)$, причем [8] $\lim_{\beta\to-0.2}\zeta^*(\beta) = 0$, что согласуется с наличием теоретически оптимального значения $\beta = -0.2$ (при малых ζ).

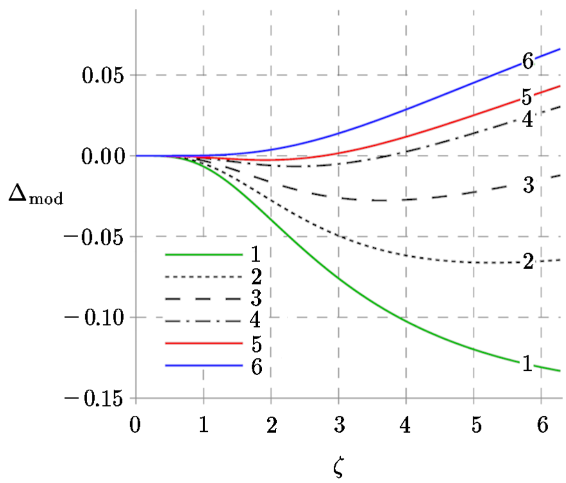

Рис. 1. Графики отклонений (5) фазовой скорости mSGN-модели от эталонной фазовой скорости c_{ref} при $\beta = 0,\ -0.05,\ -0.1,\ -0.15,\ -0.167,\ -0.2$ (кривые 1–6 соответственно)

Однако более важным для практики будет выбор такого оптимального β, при котором достигается минимальное отклонение фазовой скорости mSGN-модели от эталонной не только при малых ζ, а на всем интервале $(0, \mu_{\mathrm{r}})$, где $\mu_{\mathrm{r}} = 0.5$ — граница области применимости рассматриваемой модели [8]. Значение $\mu_{\mathrm{r}} = 0.5$ соответствует $\zeta_{\mathrm{r}} = \pi$. При использовании равномерной нормы $\max_{\zeta\in[0,\,\pi]}|\Delta_{\mathrm{mod}}(\zeta)|$ оптимальным значением будет $\beta = -0.167$. График, соответствующий этому значению, изображен кривой 5 на рис. 1.

2. Численный алгоритм для mSGN-модели

Расширенная система уравнений, соответствующая линеаризованной mSGN-модели (3), имеет вид

$$\eta_t + du_x = 0, \qquad u_t + g\eta_x = \frac{\varphi_x}{d}, \qquad (1-\beta)\,\varphi_{xx} - \frac{\varphi}{\nu} = c_0^2\,\eta_{xx}, \qquad \nu = \frac{d^2}{3}. \tag{6}$$

Для численного решения этих уравнений применим разностную схему предиктор–корректор, используя на каждом слое по времени $t = t^n$ следующую аппроксимацию уравнения для φ:

$$(1-\beta)\,\varphi^n_{\bar{x}x,j} - \frac{\varphi^n_j}{\nu} = c_0^2\,\eta^n_{\bar{x}x,j}, \tag{7}$$

где $\varphi_{\bar{x}x}$, $\eta_{\bar{x}x}$ — вторые разностные производные на симметричном трехточечном шаблоне равномерной сетки с шагом Δx по переменной x, $t^n = n\tau$, τ — шаг по времени.

На шаге “предиктор” вычисляются значения искомых величин в центрах ячеек:

$$\begin{aligned} &\frac{\eta^*_{j+1/2} - \frac{1}{2}(\eta^n_{j+1} + \eta^n_j)}{\tau^*} + d\,\frac{u^n_{j+1} - u^n_j}{\Delta x} = 0,\\ &\frac{u^*_{j+1/2} - \frac{1}{2}(u^n_{j+1} + u^n_j)}{\tau^*} + g\,\frac{\eta^n_{j+1} - \eta^n_j}{\Delta x} = \frac{1}{d}\,\frac{\varphi^n_{j+1} - \varphi^n_j}{\Delta x}, \end{aligned} \tag{8}$$

$$(1-\beta)\,\varphi^*_{\bar{x}x,j+1/2} - \frac{\varphi^*_{j+1/2}}{\nu} = c_0^2\,\eta^*_{\bar{x}x,j+1/2}, \tag{9}$$

где $\tau^* = \tau(1+\theta^n_{j+1/2})/2$, $\theta^n_{j+1/2}$ — схемный параметр, надлежащий выбор которого гарантирует выполнение TVD-свойства.

Далее выполняется шаг “корректор”:

$$\begin{aligned} &\frac{\eta^{n+1}_j - \eta^n_j}{\tau} + d\,\frac{u^*_{j+1/2} - u^*_{j-1/2}}{\Delta x} = 0,\\ &\frac{u^{n+1}_j - u^n_j}{\tau} + g\,\frac{\eta^*_{j+1/2} - \eta^*_{j-1/2}}{\Delta x} = \frac{1}{d}\,\frac{\varphi^*_{j+1/2} - \varphi^*_{j-1/2}}{\Delta x}. \end{aligned} \tag{10}$$

При $\theta = O(\Delta x)$ рассматриваемая явная схема имеет второй порядок аппроксимации.

Исследуем выписанную разностную схему методом гармонического анализа. Прежде всего исключим из уравнений (9), (10) величины η^* и u^*, вычисленные на шаге “предиктор”, считая, что $\theta = \mathrm{const}$:

$$(1-\beta)\,\varphi^*_{\bar{x}x,j+1/2} - \frac{\varphi^*_{j+1/2}}{\nu} = c_0^2\left(\frac{\eta^n_{\bar{x}x,j+1} + \eta^n_{\bar{x}x,j}}{2} - \tau^* d\,\frac{u^n_{\bar{x}x,j+1} - u^n_{\bar{x}x,j}}{\Delta x}\right), \tag{11}$$

$$\frac{\eta^{n+1}_j - \eta^n_j}{\tau} + d\,\frac{u^n_{j+1} - u^n_{j-1}}{2\Delta x} = \tau^* c_0^2\,\eta^n_{\bar{x}x,j} - \tau^*\varphi^n_{\bar{x}x,j}, \tag{12}$$

$$\frac{u^{n+1}_j - u^n_j}{\tau} + g\,\frac{\eta^n_{j+1} - \eta^n_{j-1}}{2\Delta x} = \tau^* c_0^2\,u^n_{\bar{x}x,j} + \frac{1}{d}\,\frac{\varphi^*_{j+1/2} - \varphi^*_{j-1/2}}{\Delta x}. \tag{13}$$

Будем искать решения разностной схемы в виде гармоник

$$\eta^n_j = A_0\rho^n e^{ij\xi}, \quad u^n_j = U_0\rho^n e^{ij\xi}, \quad \varphi^n_j = \Phi_0\rho^n e^{ij\xi}, \quad \varphi^*_{j+1/2} = \Phi^*_0\rho^n e^{i(j+1/2)\xi}, \quad \xi = k\Delta x,$$

подстановка которых в разностные уравнения (7), (11) приводит к соотношениям:

$$\Phi_0 = \frac{4\delta^2 c_0^2}{3a} s^2 A_0, \qquad \Phi_0^* = \frac{2\delta^2 c_0^2}{3a} s\big(A_0 \sin\xi - i4\tau^*\delta s^2 U_0\big), \tag{14}$$

где

$$a = 1 + (1-\beta)\mathcal{D}s^2, \qquad s = \sin\frac{\xi}{2}, \qquad \delta = \frac{d}{\Delta x}, \qquad \mathcal{D} = \frac{4\delta^2}{3}, \qquad \xi \in [0,\ \pi]\,.$$

Параметр δ характеризует степень разрешимости сетки по отношению к характерной глубине d. Далее, после подстановки гармоник в уравнения (12), (13) с привлечением (14), получаем следующую систему уравнений относительно амплитуд A_0 и U_0:

$$\begin{aligned} A_0\big(\rho - 1 + 2c_0^2 æ^2(1+\theta)Ks^2\big) + U_0\,(iæd\sin\xi) &= 0,\\ A_0\big(igæK\sin\xi\big) + U_0\big(\rho - 1 + 2c_0^2æ^2(1+\theta)Ks^2\big) &= 0, \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$K = \frac{1-\beta\mathcal{D}s^2}{a} > 0, \qquad æ = \frac{\tau}{\Delta x}.$$

Условие существования ненулевых решений линейной однородной системы уравнений (15) приводит к соотношению

$$\big(\rho - 1 + 2c_0^2æ^2(1+\theta)Ks^2\big)^2 + c_0^2æ^2K\sin^2\xi = 0,$$

откуда получаем формулу для множителя перехода разностной схемы (7)–(10)

$$\rho = 1 - 2(1+\theta)c_0^2æ^2Ks^2 \pm ic_0æ\sqrt{K}\sin\xi \tag{16}$$

и формулу для модуля множителя перехода

$$|\rho| \;=\; \Big[1 - 4c_0^2æ^2Kz\big(\theta + z - c_0^2æ^2(1+\theta)^2Kz\big)\Big]^{1/2}, \quad z = s^2, \quad z \in [0,\ 1]\,. \tag{17}$$

На рис. 2 а приведены графики модуля множителя перехода схемы предиктор–корректор при нескольких значениях параметра β и $\theta = 0$, $c_0æ = 1$, $\delta = 2$, а на рис. 2 б — для диапазона значений $\beta \in [-0.5, 0]$. Видно, что на длинных волнах (при малых ξ) параметр β практически не влияет на подавление гармоник. На коротких волнах значения $|\rho|$ для mSGN-схемы ($\beta < 0$) существенно меньше, чем для SGN-схемы ($\beta = 0$).

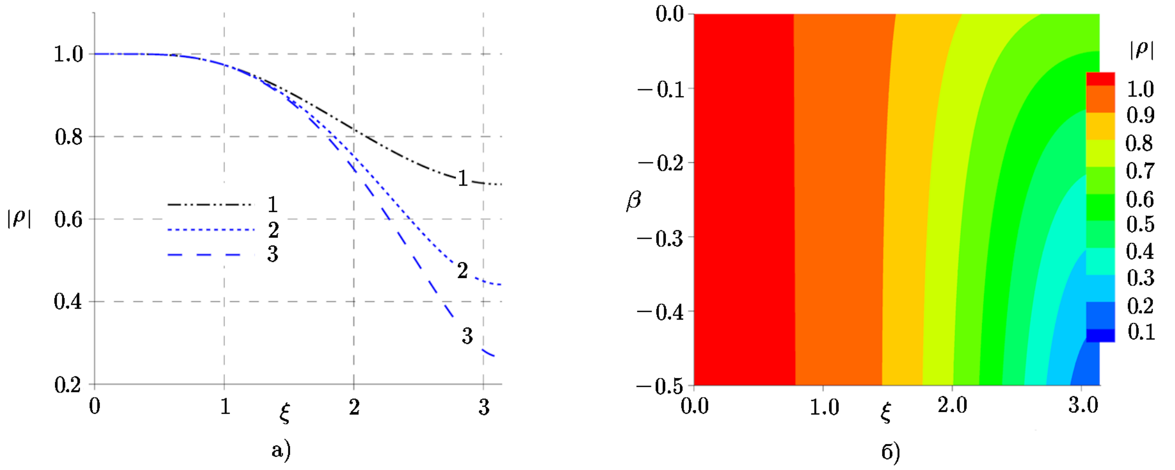

Рис. 2. Модуль множителя перехода $|\rho|$ схемы предиктор–корректор: а) $\beta = 0, -0.2, -0.393$ (кривые 1–3 соответственно); б) изолинии поверхности $|\rho| = |\rho|(\xi, \beta)$

2.1. Устойчивость разностной схемы

Исследование свойств модуля множителя перехода позволяет получить ряд фундаментальных характеристик разностной схемы. Начнем с поиска условий устойчивости. Необходимым условием устойчивости разностной схемы (7)–(10) является неравенство

$$|\rho| \le 1 \quad \forall\, z \in [0,1], \tag{18}$$

которое требуется преобразовать в эквивалентное ограничение на число Куранта $c_0 æ$. Исследование осложняется тем, что выражение (17) содержит три параметра: θ, $\delta > 0$, $\beta \le 0$. В частных случаях справедливы следующие утверждения: если $\theta = 0$, то (18) эквивалентно условию

$$c_0 æ\,|_{\theta=0} \le 1; \tag{19}$$

если $\beta = 0$ (SGN-схема), то (18) эквивалентно [16] условию

$$c_0 æ\,|_{\beta=0} \le \frac{1 + 2\delta\sqrt{\theta/3}}{1+\theta}. \tag{20}$$

Кроме того, из условия (18) следует, что

$$\theta \ge 0. \tag{21}$$

Далее будем предполагать, что $\theta > 0$ и $\beta < 0$, а также учитывать малость схемного параметра θ. В силу непрерывности функции $K(z)$ условие (18) равносильно выполнению неравенства

$$f(z) \ge 0 \quad \forall\, z \in [0,1], \tag{22}$$

где

$$f(z) = \mathcal{D}(1-\beta+\beta\mathcal{K})z^2 + \big(1 + (1-\beta)\mathcal{D}\theta - \mathcal{K}\big)z + \theta, \quad \mathcal{K} = c_0^2 æ^2 (1+\theta)^2. \tag{23}$$

Коэффициент при z^2 в трехчлене (23) положителен, т. е.

$$\mathcal{K} < 1 - \frac{1}{\beta}, \tag{24}$$

в силу того, что соотношение, противоположное выписанному, противоречит при $\theta \to 0$ необходимому условию (19).

Рассмотрим дискриминант J квадратного уравнения $f(z) = 0$:

$$J = \big[\mathcal{K} - 1 - \mathcal{D}\theta(1-\beta)\big]^2 - 4\mathcal{D}\theta(1-\beta+\beta\mathcal{K}) = \big[1 + \mathcal{D}\theta(1+\beta)) - \mathcal{K}\big]^2 - 4\mathcal{D}\theta(1+\beta\mathcal{D}\theta).$$

Если дискриминант неположителен, т. е.

$$\Big(\sqrt{\mathcal{D}\theta} - \sqrt{1+\beta\mathcal{D}\theta}\Big)^2 \le \mathcal{K} \le \Big(\sqrt{\mathcal{D}\theta} + \sqrt{1+\beta\mathcal{D}\theta}\Big)^2, \tag{25}$$

то неравенство (22) выполняется для всех z, при этом, учитывая малость величины $\theta > 0$, будем далее полагать, что справедливо неравенство

$$1 + \beta\mathcal{D}\theta \ge 0. \tag{26}$$

Правая граница найденного отрезка (25) должна удовлетворять ограничению (24):

$$\left(\sqrt{\mathcal{D}\theta}+\sqrt{1+\beta\mathcal{D}\theta}\right)^2<1-\frac{1}{\beta}.$$

Перепишем это соотношение в виде

$$2\sqrt{\mathcal{D}\theta(1+\beta\mathcal{D}\theta)}<-\frac{1}{\beta}-(1+\beta)\mathcal{D}\theta.$$

При условии (26) правая часть этого неравенства положительна, следовательно, оно равносильно следующему:

$$\left(\frac{1}{\beta}+(1-\beta)\mathcal{D}\theta\right)^2>0. \tag{27}$$

Очевидно, что при условии

$$\mathcal{D}\theta<-\frac{1}{\beta(1-\beta)} \tag{28}$$

неравенство (27) выполняется, а также выполняется условие (26). Поэтому далее будем предполагать, что схемный параметр θ удовлетворяет ограничению (28).

Если $J>0$, т. е.

$$\mathcal{K}<\left(\sqrt{\mathcal{D}\theta}-\sqrt{1+\beta\mathcal{D}\theta}\right)^2 \tag{29}$$

или

$$\mathcal{K}>\left(\sqrt{\mathcal{D}\theta}+\sqrt{1+\beta\mathcal{D}\theta}\right)^2, \tag{30}$$

то уравнение $f(z)=0$ имеет два действительных корня одного знака. В случае (29) коэффициент при z в трехчлене (23) положителен:

$$1+(1-\beta)\mathcal{D}\theta-\mathcal{K}>-2\beta\mathcal{D}\theta+2\sqrt{\mathcal{D}\theta}\sqrt{1+\beta\mathcal{D}\theta}>0,$$

поэтому неравенство (22) выполняется. В последнем случае (30) коэффициент при z отрицателен при условии (28):

$$1+(1-\beta)\mathcal{D}\theta-\mathcal{K}<-2\sqrt{\mathcal{D}\theta}\left(\sqrt{1+\beta\mathcal{D}\theta}+\beta\sqrt{\mathcal{D}\theta}\right)=-2\sqrt{\mathcal{D}\theta}\frac{1+\beta(1-\beta)\mathcal{D}\theta}{\sqrt{1+\beta\mathcal{D}\theta}-\beta\sqrt{\mathcal{D}\theta}}<0,$$

поэтому корни уравнения $f(z)=0$ положительны и для выполнения условия (22) необходимо, чтобы вершина параболы (23) располагалась справа от точки $z=1$, а значение $f(1)$ было неотрицательным:

$$-\frac{1+(1-\beta)\mathcal{D}\theta-\mathcal{K}}{2\mathcal{D}(1-\beta+\beta\mathcal{K})}>1, \qquad \mathcal{D}(1-\beta+\beta\mathcal{K})+1+(1-\beta)\mathcal{D}\theta-\mathcal{K}+\theta\geq 0.$$

Эту систему неравенств можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$1+\frac{2\mathcal{D}+(1-\beta)\mathcal{D}\theta}{1-2\beta\mathcal{D}}<\mathcal{K}\leq 1+\frac{\mathcal{D}+(1-\beta)\mathcal{D}\theta+\theta}{1-\beta\mathcal{D}},$$

из которой следует, что необходимое условие (19) нарушается при $\theta\to 0$. Следовательно, случай (30) невозможен.

Таким образом, условие (22) эквивалентно выбору таких значений $\mathcal{K}$, которые удовлетворяют либо неравенству (25), либо (29), что можно записать в виде одного неравенства

$$c_0 æ \leq \frac{2\delta\sqrt{\theta/3} + \sqrt{1 + 4\delta^2\beta\theta/3}}{1 + \theta} \tag{31}$$

при дополнительном ограничении (28):

$$\theta < -\frac{3}{4\delta^2\beta(1 - \beta)} = \theta_0, \quad \beta < 0. \tag{32}$$

Это ограничение на выбор θ не является жестким. Например, если $\beta = -0.393$ (это значение β является оптимальным для минимизации фазовой ошибки при $\delta = 2$ в частном случае), то $\theta_0 \approx 0.342$.

Заметим, что неравенство (31) в пределе $\theta \to 0$ переходит в (19), а при $\beta \to 0$ — в (20), поэтому и для этих частных случаев можно использовать ограничение (31) в качестве условия устойчивости схемы предиктор–корректор.

На рис. 3 изображены графики $C = c_0 æ = C(\theta)$ верхней границы области устойчивости схемы предиктор–корректор, используемой для решения задач в рамках бездисперсионной (NSWE) модели мелкой воды ($\varphi \equiv 0$) и дисперсионных SGN- и mSGN-моделей. Видно, что при $\theta > 0$ условие устойчивости (31) дисперсионных моделей допускает проведение расчетов с числами Куранта, бóльшими единицы. Для mSGN-схемы предиктор–корректор ($\beta < 0$) условие устойчивости является более жестким, чем условие (20) для SGN-схемы ($\beta = 0$), но менее ограничительным по сравнению с условием устойчивости $c_0 æ \leq 1/\sqrt{1 + \theta}$ для схемы, аппроксимирующей NSWE-уравнения.

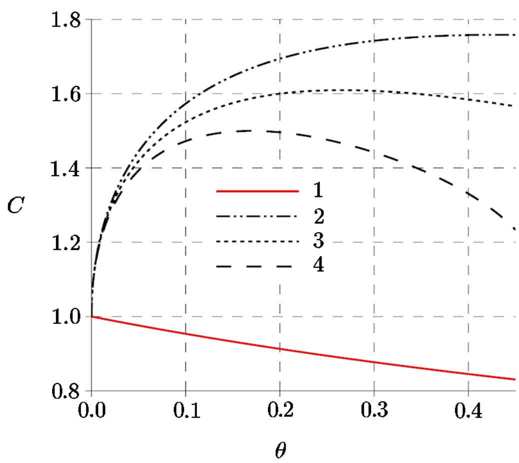

Рис. 3. Верхняя граница $C = c_0 æ$ области устойчивости схемы предиктор–корректор при $\delta = 2$ для моделей NSWE (кривая 1), SGN (кривая 2), mSGN при $\beta = -0.2, -0.393$ (кривые 3 и 4 соответственно)

2.2. Оценка изменения фазы за один шаг по времени

Известно [19], что любая разностная схема обладает присущими ей диссипативными и дисперсионными свойствами. Учитывая повышенный порядок mSGN-модели, к построенной разностной схеме (7)–(10) следует предъявить требование согласованности "схемной" дисперсии и дисперсии дифференциальной модели.

Оценим изменение фазы множителя перехода разностной схемы (7)–(10) за один шаг по времени, которое для гармоник определяется следующей формулой:

$$\Phi_{\text{pc}} = \arg \rho = 2 \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{2|\rho|}} \sqrt{|\rho| - \text{Re}(\rho)} \right), \tag{33}$$

при этом в формуле (16) взят знак "+". Для длинных волн (малых ξ) имеет место выражение

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{pc}} = c_0 æ \xi - c_0 æ \frac{\delta^2}{6} \xi^3 + \frac{c_0 æ}{6} \big(c_0^2 æ^2 (3\theta + 1) - 1 \big) \xi^3 + \\ c_0 æ \xi^5 \Bigg[\big(3 - 4\beta_{\text{pc}} \big) \frac{\delta^4}{72} - \big(2c_0^2 æ^2 (3\theta + 1) - 1 \big) \frac{\delta^2}{24} + \frac{c_0^2 æ^2 (1 - 3\theta)}{24} - \\ \frac{c_0^4 æ^4 (7 - 32\theta^2)}{128} + \frac{1}{120} \Bigg] + O\big(\xi^7\big).\end{aligned}$$

Здесь для параметра β в разностной схеме введено новое обозначение β_{pc}, поскольку оптимальные значения этого параметра в схеме и mSGN-модели могут отличаться. Учитывая соотношения (4) и $\zeta = \xi\delta$, сравним эту формулу с формулой изменения фазы гармоник в mSGN-модели

$$\Phi_{\text{mSGN}} = \omega\tau = c_0 æ \xi \sqrt{\frac{1 - \beta\delta^2\xi^2/3}{1 + (1 - \beta)\delta^2\xi^2/3}}, \tag{34}$$

которая в случае длинных волн имеет вид

$$\Phi_{\text{mSGN}} = c_0 æ \xi - c_0 æ \frac{\delta^2}{6} \xi^3 + c_0 æ (3 - 4\beta) \frac{\delta^4}{72} \xi^5 + O\big(\xi^7\big). \tag{35}$$

В результате получим следующее выражение для фазовой ошибки:

$$\begin{aligned}\Delta = \Phi_{\text{pc}} - \Phi_{\text{mSGN}} = \frac{c_0 æ}{6} \big(c_0^2 æ^2 (3\theta + 1) - 1 \big) \xi^3 + \\ c_0 æ \xi^5 \Bigg[(\beta - \beta_{\text{pc}}) \frac{\delta^4}{18} - \big(2c_0^2 æ^2 (3\theta + 1) - 1 \big) \frac{\delta^2}{24} + \frac{c_0^2 æ^2 (1 - 3\theta)}{24} - \\ \frac{c_0^4 æ^4 (7 - 32\theta^2)}{128} + \frac{1}{120} \Bigg] + O\big(\xi^7\big).\end{aligned}$$

Далее учтем, что при оптимальном значении $\beta = -0.2$ изменение фазы длинноволновых гармоник (35) в mSGN-модели совпадает вплоть до членов порядка $O(\xi^5)$ с величиной изменения фазы в модели потенциальных течений

$$\Phi_{\text{ref}} = c_0 æ \xi - c_0 æ \frac{\delta^2}{6} \xi^3 + c_0 æ \frac{19\delta^4}{360} \xi^5 + O\big(\xi^7\big),$$

где

$$\Phi_{\text{ref}} = c_0 æ \xi \sqrt{\frac{\tanh(\xi\delta)}{\xi\delta}}. \tag{36}$$

Поэтому потребуем, чтобы это свойство сохранялось разностной схемой, т. е. чтобы дополнительная дисперсия, вносимая разностной схемой, приводила к малой фазовой ошибке $\Delta = O\big(\xi^7\big)$, что достигается при выполнении условий:

$$c_0 æ = \frac{1}{\sqrt{1 + 3\theta}}, \tag{37}$$

$$\beta_{\text{pc}} = -\frac{1}{5} - \frac{3}{4\delta^2} - \frac{9\left(3 - 32\theta + 32\theta^2\right)}{320\left(1+3\theta\right)^2\delta^4}.$$

Заметим, что при $\theta < \min\{1, \theta_0\}$ число Куранта (37) находится в области устойчивости (31) разностной схемы (7)–(10).

При $\Delta x \to 0$ и, следовательно, $\delta \to \infty$ получаем, что $\beta_{\text{pc}} \to -0.2$, т. е. в случае длинных волн оптимальное значение параметра β в разностной схеме стремится при измельчении сетки к оптимальному значению в линеаризованной mSGN-модели. В частном случае, когда $\delta = 2$ и $\theta = 0$, получаем, что $\beta_{\text{pc}} = -0.393$.

Таким образом, удалось найти параметры, при которых достигается порядок $O\left(\xi^7\right)$ фазовой ошибки разностной схемы как по отношению к аппроксимируемой mSGN-модели, так и модели потенциальных течений, при этом разностная схема и mSGN-модель имеют отличающиеся оптимальные значения параметра β, что вполне ожидаемо.

На рис. 4 а изображены графики изменения фазы гармоник за один шаг по времени в модели потенциальных течений (36), mSGN-модели (34), SGN-модели (34) при $\beta = 0$ и в схеме предиктор–корректор (33) при нескольких значениях параметра β и $\theta = 0$, $c_0 æ = 1$, $\delta = 2$. Видно, что при использовании mSGN-схемы с параметром $\beta = -0.393$ достигается хорошая аппроксимация эталонной фазы в области применимости модели (для mSGN-модели это область $\mu \le 0.5$, что эквивалентно $\xi\delta \le \pi$). На рис. 4 б демонстрируется изменение фазы множителя перехода mSGN-схемы для диапазона значений $\beta \in [-0.5, 0]$. Желательным свойством любой схемы является малое изменение фазы на тех коротких волнах (при $\xi \to \pi$), которые не описываются моделью. Видно, что для mSGN-схемы предиктор–корректор это свойство выполняется.

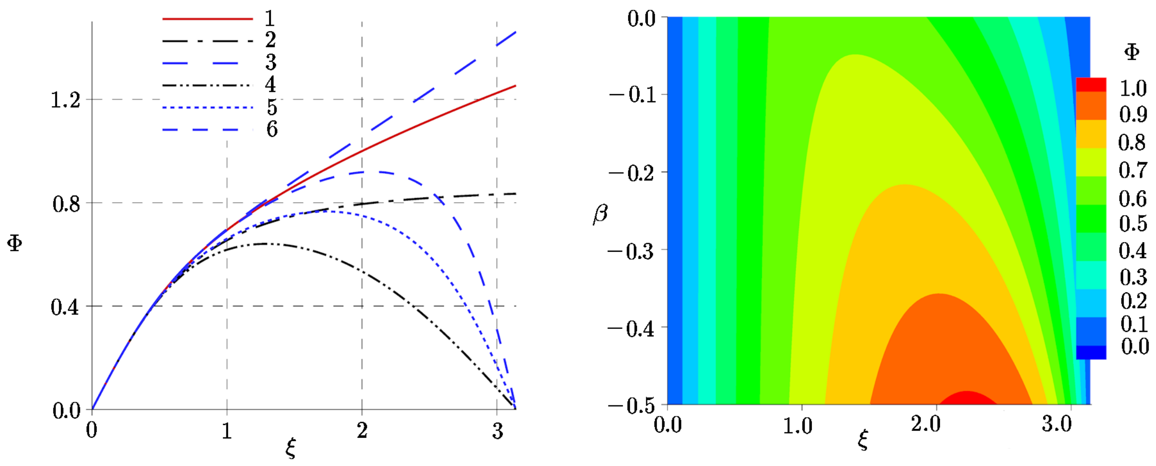

Рис. 4. Графики изменения фазы: а) для операторов перехода линеаризованной модели потенциальных течений (кривая 1), SGN-модели (кривая 2), mSGN-модели при $\beta = -0.2$ (кривая 3), для множителей перехода SGN-схемы (кривая 4), mSGN-схемы при $\beta = -0.2$, -0.393 (кривые 5 и 6 соответственно); б) изолинии поверхности $\Phi = \Phi(\xi, \beta)$ для mSGN-схемы

2.3. Диссипативная ошибка

Под диссипацией χ разностной схемы будем понимать разность модулей перехода разностной схемы и аппроксимируемой ею дифференциальной системы уравнений:

$$\chi = |\Omega| - |\rho|.$$

Рассматриваемые нелинейно-дисперсионные модели не содержат диссипативных членов, поэтому $|\Omega| \equiv 1$. Величина $|\rho|$ характеризует изменение гармоник на волнах любой длины, тогда как аппроксимация имеет смысл только на длинных волнах.

2.3.1. Диссипативная ошибка на длинных волнах

Чтобы посмотреть поведение разностной схемы (7)–(10) на длинных волнах, надо разложить модуль перехода (17) в ряд по малому параметру ξ. В результате получаем следующее выражение для диссипации:

$$\chi = c_0^2 æ^2\theta\frac{\xi^2}{2} + c_0^2 æ^2\left[1 - c_0^2 æ^2(1+2\theta) - \frac{1+4\delta^2}{3}\,\theta\right]\frac{\xi^4}{8} -$$
$$c_0^2 æ^2\delta^2\Big[3 - 6c_0^2 æ^2(1+2\theta) - 2\theta - 4\theta(1-\beta)\delta^2\Big]\frac{\xi^6}{72} -$$
$$c_0^2 æ^2\left[\big(1 - c_0^2 æ^2(1+2\theta)\big)\big(1 - 3c_0^2 æ^2\theta\big) - \frac{\theta}{15}\right]\frac{\xi^6}{48} + O\big(\xi^8\big).$$

Видим, что параметр β не входит в главные члены разложения, имеющие порядки $O\big(\xi^2\big)$ и $O\big(\xi^4\big)$, и тем самым не оказывает существенного влияния на диссипацию разностной схемы в случае длинных волн. Графики, изображенные на рис. 2, показывают, что это свойство разностной схемы (слабая зависимость диссипации схемы от параметра β) выполняется не только при малых ξ, но и во всей области применимости mSGN-модели ($\zeta \le \pi$, что при $\delta = 2$ равносильно неравенству $\xi \le \pi/2$).

2.3.2. Коэффициент затухания коротких волн

Поскольку область применимости mSGN-модели определяется [8] неравенством $\mu \le 0.5$, то воспроизводить коротковолновую часть течения с помощью mSGN-схемы бессмысленно. Более того, возникающие по ряду причин коротковолновые "нефизические" осцилляции необходимо подавлять, так как они не только создают "шум", но и могут приводить в нелинейном случае к неустойчивости. Поэтому разностные схемы, обеспечивающие сильное погашение коротковолновых гармоник, являются более предпочтительными.

Согласно (17), коэффициент затухания (подавления гармоник за один шаг по времени) для mSGN-схемы определяется выражением

$$\frac{|\rho|}{|\Omega|} = |\rho| = \Big[\big(1 - 2c_0^2 æ^2(1+\theta)Kz\big)^2 + 4c_0^2 æ^2 Kz(1-z)\Big]^{1/2}, \quad z = \sin^2\frac{\xi}{2}, \quad \xi \in [0,\pi].$$

Коэффициент затухания зависит от четырех параметров (β, θ, $c_0æ$, δ) и при различных сочетаниях между значениями этих параметров может быть как монотонной, так и немонотонной функцией переменной ξ. При выполнении условий (31), (32) достаточным условием монотонного убывания коэффициента затухания является следующее ограничение на число Куранта:

$$c_0 æ \le \frac{1}{\sqrt{1+\theta}}, \tag{38}$$

где $\theta \ge 0$. При выполнении условия (38) коротковолновые гармоники подавляются сильнее, чем длинноволновые. В частном случае это свойство демонстрируется графиками изменения модуля множителя перехода схемы предиктор–корректор, изображенными на рис. 2.

Также представляет интерес характер зависимости коэффициента затухания от параметра β. Рассмотрим эту зависимость только в случае самых коротких гармоник, которые может воспроизвести разностная схема, т. е. при $\lambda = 2\Delta x$ или $\xi = \pi$. При этом, основываясь на результатах, полученных в пунктах 1.1 и 2.2, будем считать, что $\beta \geq -0.5$. Кроме того, здесь будем предполагать, что параметр δ удовлетворяет такому же ограничению $\delta \geq 2$, которое использовалось при численном решении задач в рамках SGN-модели [6], т. е. разрешимость сетки такова, что на глубину жидкости приходится не менее двух пространственных шагов Δx. Тогда с учетом (38) получим

$$2c_0^2 æ^2(1+\theta)\frac{1-\beta\mathcal{D}}{1+(1-\beta)\mathcal{D}} \leq 2\frac{1-\beta\mathcal{D}}{1+(1-\beta)\mathcal{D}}\bigg|_{\beta=-0.5} \leq \frac{4+2\mathcal{D}}{2+3\mathcal{D}}\bigg|_{\delta=2} = \frac{22}{27} < 1,$$

поэтому коэффициент затухания вычисляется по формуле

$$|\rho|\,\big|_{\xi=\pi} = 1 - 2c_0^2 æ^2(1+\theta)\frac{1-\beta\mathcal{D}}{1+(1-\beta)\mathcal{D}} \tag{39}$$

и является монотонно возрастающей функцией параметра β, достигая своего максимального значения при $\beta = 0$. В частном случае это свойство подтверждается графиками на рис. 2, которые свидетельствуют о том, что наиболее слабое затухание коротких волн происходит при $\beta = 0$. Таким образом, по свойству подавления коротковолновых гармоник mSGN-схема ($\beta < 0$) предпочтительнее аналогичной схемы для SGN-модели ($\beta = 0$).

Заключение

Разностная схема предиктор–корректор, ранее предложенная для SGN-модели, обобщена на случай mSGN-модели. Проведено исследование основных свойств построенной разностной схемы: найдено условие устойчивости, выписана и проанализирована формула для фазовой ошибки, определены параметры разностной схемы и значение β, позволяющие достичь одинакового порядка точности фазовых характеристик разностной схемы, аппроксимируемой mSGN-модели и полной модели потенциальных течений. Показано, что с введением параметра β в разностной схеме происходит более сильное, по сравнению со случаем $\beta = 0$, подавление коротковолновых гармоник, и построенный для mSGN-модели вычислительный алгоритм имеет ряд преимуществ перед аналогичным для SGN-модели.

В следующей статье, которая является второй частью работы по исследованию свойств разностных схем для решения нелинейно-дисперсионных уравнений повышенной точности, будут изложены результаты исследований схемы предиктор–корректор, предназначенной для решения плановых mSGN-уравнений — двумерных нелинейно-дисперсионных уравнений мелкой воды с повышенной точностью дисперсионного соотношения.

Литература

1. **Кабанихин С.И., Криворотько О.И.** Численный алгоритм расчета амплитуды волны цунами // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2016. — Т. 19, № 2. — С. 153–165. Перевод: Kabanikhin S.I., Krivorotko O.I. A numerical algorithm for computing tsunami wave amplitude // Numerical Analysis and Applications. — 2016. — Vol. 9, № 2. — P. 118–128.

2. **Хаяши К., Марчук Ан.Г., Важенин А.П.** Генерирующие граничные условия для расчета распространения цунами на последовательности вложенных сеток // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2018. — Т. 21, № 3. — С. 315–331. Перевод: Hayshi K., Marchuk An., Vazhenin A. Generating boundary conditions for the tsunami propagation calculation on imbedded grids // Numerical Analysis and Applications. — 2018. — Vol. 11, № 3. — P. 256–267.
3. **Serre F.** Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux // La Houille blanche. — 1953. — Vol. 3. — P. 374–388.
4. **Green A.E., Naghdi P.M.** A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth // J. Fluid Mech. — 1976. — Vol. 78. — P. 237–246.
5. **Железняк М.И., Пелиновский Е.Н.** Физико-математические модели наката цунами на берег // Накат цунами на берег. Сб. научн. тр. — Горький: ИПФ АН СССР, 1985. — С. 8–33.
6. **Khakimzyanov G., Dutykh D., Fedotova Z., Gusev O.** Dispersive Shallow Water Waves: Theory, Modeling, and Numerical Methods. — Basel: Birkhäuser, 2020. — (Lecture Notes in Geosystems Mathematics and Computing).
7. **Madsen P.A., Schäffer H.A.** Higher order Boussinesq-type equations for surface gravity waves: derivation and analysis // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. — 1998. — Vol. 356. — P. 3123–3181.
8. **Хакимзянов Г.С., Федотова З.И., Дутых Д.** Плановая модель гидродинамики с дисперсионным соотношением повышенной точности // Вычислительные технологии. — 2020. — Т. 25, № 5. — С. 17–41.
9. **Benjamin T.B., Bona J.L., Mahony J.J.** Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. — 1972. — Vol. 272. — P. 47–78.
10. **Федотова З.И., Хакимзянов Г.С., Гусев О.И.** История развития и анализ численных методов решения нелинейно-дисперсионных уравнений гидродинамики. I. Одномерные модели // Вычислительные технологии. — 2015. — Т. 20, № 5. — С. 120–156.
11. **Brocchini M.** A reasoned overview on Boussinesq-type models: the interplay between physics, mathematics and numerics // Proc. of the Royal Society A. — 2013. — Vol. 469. — ID-number 20130496. — DOI: 10.1098/rspa.2013.0496.
12. **Madsen P.A., Murray R., Sorensen O.R.** A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics // Coastal Engineering. — 1991. — Vol. 15. — P. 371–388.
13. **Вольцингер Н.Е., Пясковский Р.В.** Теория мелкой воды. Океанологические задачи и численные методы. — Л.: Гидрометеоиздат, 1977.
14. **Беликов В.В., Семенов А.Ю.** Численный метод распада разрыва для решения уравнений теории мелкой воды // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1997. — Т. 37, № 8. — С. 1006–1019. Перевод: Belikov V.V., Semenov A.Yu. A Godunov-type method based on an exact solution to the Riemann problem for the shallow-water equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1997. — Vol. 37, № 8. — P. 974–986.
15. **Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S.** Characteristics of finite difference methods for dispersive shallow water equations // Russ. J. of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2016. — Vol. 31, № 3. — P. 149–158.
16. **Федотова З.И., Хакимзянов Г.С., Гусев О.И., Шокина Н.Ю.** История развития и анализ численных методов решения нелинейно-дисперсионных уравнений гидродинамики. II. Двумерные модели // Вычислительные технологии. — 2017. — Т. 22, № 5. — С. 73–109.
17. **Khakimzyanov G.S., Fedotova Z.I., Gusev O., Shokina N.Yu.** Finite difference methods for 2D shallow water equations with dispersion // Russ. J. of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2019. — Vol. 34, № 2. — P. 105–117.

18. **Гусев О.И., Шокина Н.Ю., Кутергин В.А., Хакимзянов Г.С.** Моделирование поверхностных волн, генерируемых подводным оползнем в водохранилище // Вычислительные технологии. — 2013. — Т. 18, № 5. — С. 74–90.

19. **Шокин Ю.И.** Метод дифференциального приближения. — Новосибирск: Наука, 1979.

Поступила в редакцию 09 февраля 2023 г.
После исправления 14 апреля 2023 г.
Принята к печати 05 сентября 2023 г.

Литература в транслитерации

1. **Kabanikhin S.I., Krivorot'ko O.I.** Chislennyi algoritm rascheta amplitudy volny tsunami // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2016. — T. 19, № 2. — S. 153–165.

2. **Khayashi K., Marchuk An.G., Vazhenin A.P.** Generiruyuschie granichnye usloviya dlya rascheta rasprostraneniya tsunami na posledovatel'nosti vlozhennykh setok // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2018. — T. 21, № 3. — S. 315–331.

3. **Serre F.** Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux // La Houille blanche. — 1953. — Vol. 3. — P. 374–388.

4. **Green A.E., Naghdi P.M.** A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth // J. Fluid Mech. — 1976. — Vol. 78. — P. 237–246.

5. **Zheleznyak M.I., Pelinovskii E.N.** Fiziko-matematicheskie modeli nakata tsunami na bereg // Nakat tsunami na bereg. Sb. nauchn. tr. — Gor'kii: IPF AN SSSR, 1985. — S. 8–33.

6. **Khakimzyanov G., Dutykh D., Fedotova Z., Gusev O.** Dispersive Shallow Water Waves: Theory, Modeling, and Numerical Methods. — Basel: Birkhäuser, 2020. — (Lecture Notes in Geosystems Mathematics and Computing).

7. **Madsen P.A., Schäffer H.A.** Higher order Boussinesq-type equations for surface gravity waves: derivation and analysis // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. — 1998. — Vol. 356. — P. 3123–3181.

8. **Khakimzyanov G.S., Fedotova Z.I., Dutykh D.** Planovaya model' gidrodinamiki s dispersionnym sootnosheniem povyshennoi tochnosti // Vychislitel'nye tekhnologii. — 2020. — T. 25, № 5. — S. 17–41.

9. **Benjamin T.B., Bona J.L., Mahony J.J.** Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A. — 1972. — Vol. 272. — P. 47–78.

10. **Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S., Gusev O.I.** Istoriya razvitiya i analiz chislennykh metodov resheniya nelineino-dispersionnykh uravnenii gidrodinamiki. I. Odnomernye modeli // Vychislitel'nye tekhnologii. — 2015. — T. 20, № 5. — S. 120–156.

11. **Brocchini M.** A reasoned overview on Boussinesq-type models: the interplay between physics, mathematics and numerics // Proc. of the Royal Society A. — 2013. — Vol. 469. — ID-number 20130496. — DOI: 10.1098/rspa.2013.0496.

12. **Madsen P.A., Murray R., Sorensen O.R.** A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics // Coastal Engineering. — 1991. — Vol. 15. — P. 371–388.

13. **Vol'tsinger N.E., Pyaskovskii R.V.** Teoriya melkoi vody. Okeanologicheskie zadachi i chislennye metody. — L.: Gidrometeoizdat, 1977.

14. **Belikov V.V., Semenov A.Yu.** Chislennyi metod raspada razryva dlya resheniya uravnenii teorii melkoi vody // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1997. — T. 37, № 8. — S. 1006–1019.

15. **Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S.** Characteristics of finite difference methods for dispersive shallow water equations // Russ. J. of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2016. — Vol. 31, № 3. — P. 149–158.

16. **Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S., Gusev O.I., Shokina N.Yu.** Istoriya razvitiya i analiz chislennykh metodov resheniya nelineino-dispersionnykh uravnenii gidrodinamiki. II. Dvumernye modeli // Vychislitel'nye tekhnologii. — 2017. — T. 22, № 5. — S. 73–109.

17. **Khakimzyanov G.S., Fedotova Z.I., Gusev O., Shokina N.Yu.** Finite difference methods for 2D shallow water equations with dispersion // Russ. J. of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2019. — Vol. 34, № 2. — P. 105–117.

18. **Gusev O.I., Shokina N.Yu., Kutergin V.A., Khakimzyanov G.S.** Modelirovanie poverkhnostnykh voln, generiruemykh podvodnym opolznem v vodokhranilische // Vychislitel'nye tekhnologii. — 2013. — T. 18, № 5. — S. 74–90.

19. **Shokin Yu.I.** Metod differentsial'nogo priblizheniya. — Novosibirsk: Nauka, 1979.