

AMS subject classification: 65L10, 65L12

Новый явный групповой метод типа переменных направлений для нелинейных сингулярных двухточечных краевых задач на переменной сетке*

Р.К. Моханти¹, Дж. Талвар²

¹Department of Applied Mathematics Faculty of Mathematics and Computer Science South Asian University Akbar Bhawan, Chanakyapuri New Delhi, 110021, India

²Department of Mathematics Faculty of Mathematical Sciences University of Delhi, Delhi, 110 007, India

E-mails: rmohanty@sau.ac.in, mohantyranjankumar@gmail.com (Моханти Р.К.); chhabrajyoti@gmail.com (Талвар Дж.)

Моханти Р.К., Талвар Дж. Новый явный групповой метод типа переменных направлений для нелинейных сингулярных двухточечных краевых задач на переменной сетке // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2015. — Т. 18, № 1. — С. 65–78.

В данной статье рассматриваются: новый явный групповой метод типа переменных направлений (CRAGE), итерационный ньютоновский метод CRAGE для решения нелинейных сингулярных двухточечных краевых задач $u'' = f(r, u, u')$, $0 < r < 1$, при заданных естественных граничных условиях $u(0) = A_1$, $u(1) = A_2$, где A_1 и A_2 — конечные постоянные, а также численный метод третьего порядка на геометрической сетке. Предлагаемый метод применим к сингулярным и несингулярным задачам. Подробно обсуждается сходимость итерационного метода CRAGE. Результаты, полученные при помощи предложенного итерационного метода CRAGE, сравниваются с результатами соответствующих итерационных двухпараметрических явных групповых методов типа переменных направлений (TAGE) для демонстрации его вычислительной эффективности.

Ключевые слова: сингулярные двухточечные краевые задачи, геометрическая сетка, метод третьего порядка, сингулярное уравнение, метод CRAGE, ньютоновский метод CRAGE, уравнение Бюргера, среднеквадратичные ошибки.

Mohanty R.K., Talwar Jyoti. A new coupled reduced alternating group explicit method for non-linear singular two point boundary value problems on a variable mesh // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2015. — Vol. 18, № 1. — P. 65–78.

In this paper, we discuss a new coupled reduced alternating group explicit (CRAGE) and Newton-CRAGE iteration methods to solve non-linear singular two point boundary value problems $u'' = f(r, u, u')$, $0 < r < 1$ subject to given natural boundary conditions $u(0) = A_1$, $u(1) = A_2$, where A_1 and A_2 are finite constants, along with a third order numerical method on a geometric mesh. The proposed method is applicable to singular and non-singular problems. We discuss the convergence of the CRAGE iteration method in detail. The results obtained from the proposed CRAGE iteration method are compared with the results of the corresponding two parameter alternating group explicit (TAGE) iteration methods to demonstrate computationally the efficiency of the proposed method.

Key words: two point singular boundary value problems, geometric mesh, third order method, singular equation, CRAGE method, Newton-CRAGE method, Burgers equation, RMS errors.

*Работа выполнена при поддержке Совета научно-промышленных исследований (проект № 09/045(0836)2009-EMR-I).

1. Введение

Рассмотрим общее нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-u'' + f(r, u, u') = 0, \quad 0 < r < 1, \quad (1.1)$$

при существенных граничных условиях:

$$u(0) = A_1, \quad u(1) = A_2, \quad (1.2)$$

где A_1 и A_2 — конечные постоянные.

Предположим, что для $r \in [0, 1]$, $-\infty < u, v < \infty$

- $f(r, u, v)$ непрерывна,
- $\partial f/\partial u$ и $\partial f/\partial v$ существуют и непрерывны,
- $\partial f/\partial u > 0$ и $|\partial f/\partial v| \leq W$ для некоторой положительной постоянной W .

Эти условия гарантируют, что краевая задача (1.1), (1.2) имеет единственное решение (см. [1]).

Сингулярные нелинейные краевые задачи (КЗ) встречаются во многих областях прикладной математики и физики, например в газовой динамике, квантовой механике, динамике жидкостей и газов, аэродинамике, химических реакциях, атомных структурах, атомных вычислениях и т. д. Поэтому в последние годы они широко исследуются. Для вышеприведенных задач существует много методов. Решение нелинейных дифференциальных уравнений очень сложно, поскольку лишь некоторые из них можно решить явно. По этой причине приходится использовать приближенные методы.

Джеин и др. [2] получили разностный метод третьего порядка на неравномерной сетке для решения краевой задачи (1.1), (1.2). Однако их метод не применим к сингулярным задачам. В 1996 г. с использованием трехточечного шаблона Чавла и Шивакумар [4] разработали эффективный метод конечных разностей четвертого порядка для численного решения дифференциального уравнения (1.1) на равномерной сетке, который может быть применен как к сингулярным, так и к несингулярным задачам. В 2005 г. Моханти [10, 13], используя трехточечный шаблон, рассмотрел метод переменной сетки третьего порядка для решения нелинейного дифференциального уравнения (1.1), в котором для решения сингулярных задач требуется особый метод.

В 1985 г. Эванс [3] разработал явный групповой метод для решения больших линейных систем, который может использоваться на параллельных компьютерах. Явный групповой метод типа переменных направлений, который представляет собой модификацию приведенного выше итерационного метода для решения нелинейных сингулярных двухточечных краевых задач, был изучен Эвансом и Моханти [11]. В 1990 г. Эванс [6] представил явный групповой метод типа переменных направлений с одной прогонкой для решения параболического уравнения с периодическими граничными условиями. Позднее Сакон и Эванс [8] разработали двухпараметрический явный групповой метод типа переменных направлений (TAGE) для двухточечной краевой задачи со схемой низкого порядка. Моханти и др. [12, 14] обсуждали применение метода TAGE для нелинейных сингулярных двухточечных краевых задач с использованием разностной схемы четвертого порядка и разностной схемы третьего порядка с арифметическим средним и переменной сеткой. В 1990 г. Эванс ввел явный связанный групповой метод типа переменных направлений (CAGE) [6, 15] и применил его к периодическим параболическим уравнениям. Недавно Моханти с коллегами расширил эту идею и обсудил применение итерационного метода CAGE и конечно-разностного метода четвертого порядка

к некоторому классу сингулярных дифференциальных уравнений [9]. Эти параллельные алгоритмы используются многими учеными для решения обыкновенных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных [16, 17]. Эти методы являются явными по своей природе и могут использоваться на параллельных компьютерах. Другие итерационные методы расщепления рассматриваются в [18–20].

В данной статье обсуждается метод с переменной сеткой третьего порядка для численного решения двухточечной сингулярной граничной задачи с использованием только трехточечного шаблона. Метод модифицирован таким образом, что решения сохраняют свой порядок и точность во всей области решения, даже вблизи сингулярности. Кроме того, рассматриваются итерационный связанный групповой явный метод типа переменных направлений (CRAGE), итерационный ньютоновский метод CRAGE для решения соответственно линейных и нелинейных разностных уравнений на переменной сетке, а также рассматривается сходимость метода CRAGE. Поскольку эти методы являются явными и компактно сцепленными, они подходят для использования на параллельных компьютерах.

2. Метод и применения к сингулярным уравнениям

Дискретизируем область решения $[0, 1]$ так, чтобы $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_N < r_{N+1} = 1$.

Конечно-разностная дискретизация дифференциального уравнения (1.1) на $[0, 1]$ состоит из трех точек сетки: r_k, r_{k+1} и r_{k-1} , где $h_k = r_k - r_{k-1}$. Пусть $\sigma_k = (h_{k+1}/h_k) > 0$, $k = 1(1)N - 1$, — параметр отношения сетки, где N — положительное целое число. При $\sigma_k = 1$ это сводится к случаю постоянной сетки. Пусть $U_k = u(r_k)$ — точное значение решения $u(r)$ в точке сетки r_k , а u_k — его приближенное значение.

В точке сетки r_k обозначим:

$$P_k = \sigma_k^2 + \sigma_k - 1, \quad Q_k = (\sigma_k + 1)(\sigma_k^2 + 3\sigma_k + 1), \quad (2.1a)$$

$$R_k = \sigma_k(1 + \sigma_k - \sigma_k^2), \quad S_k = \sigma_k(\sigma_k + 1), \quad (2.1b)$$

$$\gamma_k = \frac{-\sigma_k(1 + \sigma_k + \sigma_k^2)}{6Q_k}. \quad (2.1c)$$

Опишем наш метод третьего порядка с переменной сеткой следующим образом.

Для $k = 1(1)N - 1$ положим:

$$\bar{U}'_k = [U_{k+1} - (1 - \sigma_k^2)U_k - \sigma_k^2 U_{k-1}]/(h_k S_k), \quad (2.2a)$$

$$\bar{U}'_{k+1} = [(1 + 2\sigma_k)U_{k+1} - (1 + \sigma_k)^2 U_k + \sigma_k^2 U_{k-1}]/(h_k S_k), \quad (2.2b)$$

$$\bar{U}'_{k-1} = [-U_{k+1} + (1 + \sigma_k)^2 U_k - \sigma_k(2 + \sigma_k)U_{k-1}]/(h_k S_k), \quad (2.2c)$$

$$\bar{F}_{k+1} = f(r_{k+1}, U_{k+1}, \bar{U}'_{k+1}), \quad (2.3a)$$

$$\bar{F}_{k-1} = f(r_{k-1}, U_{k-1}, \bar{U}'_{k-1}), \quad (2.3b)$$

$$\bar{\bar{U}}'_k = \bar{U}'_k + \gamma_k h_k (\bar{F}_{k+1} - \bar{F}_{k-1}), \quad (2.3c)$$

$$\bar{\bar{F}}_k = f(r_k, U_k, \bar{\bar{U}}'_k). \quad (2.3d)$$

Тогда в каждой внутренней точке сетки r_k , $k = 1(1)N - 1$, дифференциальное уравнение (1.1) дискретизируется следующим образом:

$$U_{k+1} - (1 + \sigma_k)U_k + \sigma_k U_{k-1} = \frac{h_k^2}{12} [P_k \bar{F}_{k+1} + Q_k \bar{F}_k + R_k \bar{F}_{k-1}] + T_k, \quad (2.4)$$

где $T_k = O(h_k^5)$.

Для сходимости коэффициенты в правой части (2.4) должны быть положительными, откуда мы получим условие $(\sqrt{5} - 1)/2 < \sigma_k < (\sqrt{5} + 1)/2$ (см. Джейн и др. [2]).

Если дифференциальное уравнение является линейным, получаемую в результате трехдиагональную линейную систему можно решить методом CRAGE; в нелинейном случае система может быть решена с использованием ньютоновского метода CRAGE, что подходит для использования на параллельных компьютерах.

Теперь обсудим применение приведенного выше разностного метода к линейным сингулярным уравнениям:

$$u'' = D(r)u' + E(r)u + f(r), \quad 0 < r < 1, \quad (2.5)$$

где $D(r) = -\alpha/r$ и $E(r) = \alpha/r^2$. Для $\alpha = 1, 2$ уравнение (2.5) представляет собой задачу в цилиндрических и сферических координатах соответственно.

Рассмотрим следующие аппроксимации:

$$D_{k+1} = D_k + \sigma_k h_k D'_k + \frac{\sigma_k^2 h_k^2}{2!} D''_k + O(h_k^3) \equiv D_k^* + O(h_k^3), \quad (2.6a)$$

$$D_{k-1} = D_k - h_k D'_k + \frac{h_k^2}{2!} D''_k - O(h_k^3) \equiv D_k^{**} - O(h_k^3), \quad (2.6b)$$

$$E_{k+1} = E_k + \sigma_k h_k E'_k + \frac{\sigma_k^2 h_k^2}{2!} E''_k + O(h_k^3) \equiv E_k^* + O(h_k^3), \quad (2.6b)$$

$$E_{k-1} = E_k - h_k E'_k + \frac{h_k^2}{2!} E''_k - O(h_k^3) \equiv E_k^{**} - O(h_k^3), \quad (2.6r)$$

$$f_{k+1} = f_k + \sigma_k h_k f'_k + \frac{\sigma_k^2 h_k^2}{2!} f''_k + O(h_k^3) \equiv f_k^* + O(h_k^3), \quad (2.6d)$$

$$f_{k-1} = f_k - h_k f'_k + \frac{h_k^2}{2!} f''_k - O(h_k^3) \equiv f_k^{**} - O(h_k^3), \quad (2.6e)$$

где $D_k^* = D_k + \sigma_k h_k D'_k + \frac{\sigma_k^2 h_k^2}{2!} D''_k$, $D_k^{**} = D_k - h_k D'_k + \frac{h_k^2}{2!} D''_k$ и т. д.

Применив разностную формулу (2.4) к уравнению (2.5), используя аппроксимации (2.6) и пренебрегая членами высокого порядка, мы получим линейное разностное уравнение следующего вида:

$$a_k u_{k-1} + 2b_k u_k + c_k u_{k+1} = J_k, \quad k = 1(1)N, \quad (2.7)$$

где

$$a_k = -\sigma_k + \frac{h_k}{12S_k} [-\sigma_k^2 Q_k D_k + \sigma_k^2 L_k D_k^* - \sigma_k(2 + \sigma_k) M_k D_k^*] + \frac{h_k^2}{12} M_k E_k^{**},$$

$$2b_k = 1 + \sigma_k + \frac{h_k}{12S_k} [-(1 - \sigma_k^2) Q_k D_k - (1 + \sigma_k)^2 L_k D_k^* + (1 + \sigma_k)^2 M_k D_k^{**}] + \frac{h_k^2}{12} Q_k E_k,$$

$$c_k = -1 + \frac{h_k}{12S_k} [Q_k D_k + (1 + 2\sigma_k) L_k D_k^* - M_k D_k^{**}] + \frac{h_k^2}{12} L_k E_k^*,$$

$$J_k = \frac{-h_k^2}{12} [Q_k f_k + L_k f_k^* + M_k f_k^{**}],$$

$$D_k = D(r_k), \quad E_k = E(r_k), \quad f_k = f(r_k),$$

$$L_k = P_k - \frac{1}{6} \sigma_k (\sigma_k^2 + \sigma_k + 1) D_k h_k, \quad M_k = R_k + \frac{1}{6} \sigma_k (\sigma_k^2 + \sigma_k + 1) D_k h_k.$$

Схема (2.7) имеет локальную ошибку усечения $O(h_k^5)$ и не имеет членов $1/k \pm 1$. Поэтому ее можно легко решить для $k = 1(1)N$ в области $0 < r < 1$.

Теперь рассмотрим нелинейное сингулярное уравнение вида

$$\nu \frac{d^2 u}{dr^2} = B(r) \frac{du}{dr} + u \frac{du}{dr} + C(r)u + g(r), \quad 0 < r < 1, \quad (2.8)$$

где $\nu = \text{Re}^{-1} > 0$, Re — число Рейнольдса, $u = u(r)$, $B(r) = -\alpha\nu/r$, $C(r) = \alpha\nu/r^2$.

Для $\alpha = 0, 1, 2$ уравнение (2.8) — стационарное уравнение Бюргера в декартовых, цилиндрических и сферических координатах соответственно. Мы можем получить новую разностную схему $O(h_k^5)$ для сингулярного уравнения (2.8) с использованием того же метода, который рассматривался для приведенного выше линейного сингулярного уравнения, задав

$$\phi_k(\mathbf{u}) = -(u_{k+1} - (1 + \sigma_k)u_k + \sigma_k u_{k-1}) + \frac{h_k^2}{12} [P_k \bar{F}_{k+1} + Q_k \bar{F}_k + R_k \bar{F}_{k-1}], \quad k = 1(1)N, \quad (2.9)$$

где $F_k = \frac{1}{\nu} (B(r_k)u'_k + u_k u'_k + C(r_k)u_k + g(r_k))$.

Эта схема применима как к сингулярным, так и к несингулярным задачам.

3. Метод CRAGE

3.1. Описание метода CRAGE

В данном пункте обсудим итерационный метод CRAGE. С использованием граничных условий $u_0 = A_1$, $u_{N+1} = A_2$ линейное разностное уравнение (2.7) можно записать в матричной форме следующим образом:

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{R}\mathbf{H}, \quad (3.1)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2b_1 & c_1 & & & 0 \\ a_2 & 2b_2 & c_2 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a_{N-1} & 2b_{N-1} & c_{N-1} \\ 0 & & & a_N & 2b_N & c_N \end{bmatrix}_{N \times N}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}_{N \times 1},$$

$$\mathbf{R}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} J_1 - a_1 u_0 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_n - c_N u_{N+1} \end{bmatrix}_{N \times 1} = \begin{bmatrix} RH_1 \\ RH_2 \\ \vdots \\ RH_N \end{bmatrix}_{N \times 1}.$$

Для реализации итерационного метода CRAGE разделим матрицу коэффициентов \mathbf{A} на две подматрицы: $\mathbf{A} = \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2$ таким образом, чтобы $\mathbf{G}_1 + \omega_1 \mathbf{I}$ и $\mathbf{G}_2 + \omega_2 \mathbf{I}$ были несингулярными для подходящего выбора $\omega_1 > 0$ и $\omega_2 > 0$. Кроме того, для любых векторов \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 и $\omega_1 > 0$, $\omega_2 > 0$ “удобно” решить систему явно, т. е. $\mathbf{z}_1 = (\mathbf{G}_1 + \omega_1 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{v}_1$ и $\mathbf{z}_2 = (\mathbf{G}_2 + \omega_2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{v}_2$ для векторов \mathbf{z}_1 и \mathbf{z}_2 соответственно.

Рассмотрим ситуацию, когда \mathbf{G}_1 и \mathbf{G}_2 — небольшие (2×2) -блочные системы. Теперь обсудим случай, когда N — четное число (при $u_0 = 0$, $u_{N+1} = 1$).

Пусть

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & \mathbf{0} \\ a_2 & b_2 & & & & \\ & & b_3 & c_3 & & \\ & & a_4 & b_4 & & \\ & & & & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & & & b_{N-1} & c_{N-1} \\ & & & & & a_N & b_N \end{bmatrix}_{N \times N}, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} b_1 & & & & & \mathbf{0} \\ & b_2 & c_2 & & & \\ & a_3 & b_3 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & b_{N-2} & c_{N-2} \\ & \mathbf{0} & & & a_{N-1} & b_{N-1} \\ & & & & & & b_N \end{bmatrix}_{N \times N}. \quad (3.3)$$

Таким образом, систему (3.1) можно переписать следующим образом:

$$(\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2)\mathbf{u} = \mathbf{RH}. \quad (3.4)$$

Тогда двухпараметрический метод AGE для решения приведенной выше системы можно переписать следующим образом:

$$(\mathbf{G}_1 + \omega_1 \mathbf{I})\mathbf{v}^{(s)} = \mathbf{RH} - (\mathbf{G}_2 - \omega_1 \mathbf{I})\mathbf{u}^{(s)}, \quad s = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.5a)$$

$$(\mathbf{G}_2 + \omega_2 \mathbf{I})\mathbf{u}^{(s+1)} = \mathbf{RH} - (\mathbf{G}_1 - \omega_2 \mathbf{I})\mathbf{v}^{(s)}, \quad s = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.5b)$$

где $\mathbf{v}^{(s)}$ — промежуточный вектор.

Исключив $\mathbf{v}^{(s)}$ и объединив уравнения (3.5a) и (3.5b), мы получим итерационный метод

$$(\mathbf{G}_2 + \omega_2 \mathbf{I})\mathbf{u}^{(s+1)} = [\mathbf{I} - (\omega_1 + \omega_2)(\mathbf{G}_2 - \omega_1 \mathbf{I})^{-1}](\mathbf{G}_2 - \omega_1 \mathbf{I})\mathbf{u}^{(s)} + (\omega_1 + \omega_2)(\mathbf{G}_2 + \omega_1 \mathbf{I})^{-1}\mathbf{RH}, \quad s = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.6)$$

или

$$\mathbf{u}^{(s+1)} = \mathbf{T}_w \mathbf{u}^{(s)} + \mathbf{RH}_w, \quad s = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.7)$$

где

$$\mathbf{T}_w = (\mathbf{G}_2 + \omega_2 \mathbf{I})^{-1}[(\mathbf{G}_2 - \omega_1 \mathbf{I}) - (\omega_1 + \omega_2)(\mathbf{G}_1 + \omega_1 \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{G}_2 - \omega_1 \mathbf{I})], \quad (3.8a)$$

$$\mathbf{RH}_w = (\omega_1 + \omega_2)(\mathbf{G}_2 + \omega_2 \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{G}_1 + \omega_1 \mathbf{I})^{-1}\mathbf{RH}. \quad (3.8b)$$

Новый итерационный метод (3.7) или (3.8a), (3.8b) называется двухпараметрическим итерационным методом CRAGE, а матрица \mathbf{T}_w — итерационной матрицей CRAGE.

3.2. Сходимость метода CRAGE

Чтобы доказать сходимость метода, нам необходимо доказать, что $S(\mathbf{T}_w) \leq 1$, где $S(\mathbf{T}_w)$ обозначает спектральный радиус \mathbf{T}_w .

Лемма. Пусть h_k будет достаточно мало. Тогда все собственные значения \mathbf{G}_1 и \mathbf{G}_2 являются действительными.

Доказательство. Рассмотрим:

$$\begin{aligned} a_k &= -\sigma_k \left[1 + \frac{h_k}{3} (1 + D_k R_k h_k) D_{k-1/2} + \frac{\sigma_k h_k}{6} D_k \right] \\ &= -\sigma_k - O(h_k) < 0 \text{ для достаточно малого } h_k, \\ c_k &= \left[-1 + \frac{h_k}{3} (\sigma_k - D_k R_k h_k) D_{k+1/2} + \frac{h_k}{6} D_k \right] \\ &= -1 + O(h_k) < 0 \text{ для достаточно малого } h_k. \end{aligned}$$

Поэтому мы имеем $a_{k+1}c_k > 0$ для $k = 1(2)N - 1$. Пусть λ_i , $i = 1(1)N$, — собственные значения \mathbf{G}_1 . Тогда λ_i — корни квадратичного уравнения

$$\lambda_i^2 - (b_i + b_{i+1})\lambda_i + (b_i b_{i+1} - a_{i+1}c_i) = 0. \quad (3.9)$$

Дискриминанты квадратичных уравнений следующие:

$$(b_i - b_{i+1})^2 + 4a_{i+1}c_i > 0, \quad i = 1(2)N - 1.$$

Следовательно, собственные значения \mathbf{G}_1 являются действительными. Аналогичным образом можно показать, что собственные значения \mathbf{G}_2 действительны. \square

Теперь приведем условие, достаточное для сходимости метода CRAGE.

Теорема. Пусть λ_i и μ_i , $i = 1(1)N$, — собственные значения \mathbf{G}_1 и \mathbf{G}_2 соответственно. Если

$$\omega_1 > \max\{0, -\lambda_1, \dots, -\lambda_N\}, \quad (3.10)$$

$$\omega_2 > \max\{0, -\mu_1, \dots, -\mu_N\}, \quad (3.11)$$

$$\omega_2 - 2 \min_i \lambda_i < \omega_1 < \omega_2 + 2 \min_i \mu_i, \quad (3.12)$$

то итерационный метод CRAGE сходится для системы (3.1).

Доказательство. Пусть

$$\mathbf{D} = \text{diag} \left(1, \frac{c_1}{a_2}, \frac{c_1 c_2}{a_2 a_3}, \dots, \frac{c_1 c_2 \cdots c_{N-1}}{a_2 a_3 \cdots a_N} \right) = \text{diag}(d_1, d_2, d_3, \dots, d_N).$$

Поскольку недиагональные элементы \mathbf{A} отрицательны, $a_{k+1}c_k > 0$, $k = 1, \dots, N - 1$. Поэтому диагональные элементы \mathbf{D} положительны.

Итерационная матрица CRAGE задается следующим образом:

$$\mathbf{T}_w = (\mathbf{G}_2 + \omega_2 \mathbf{I})^{-1} [\mathbf{I} - (\omega_1 + \omega_2)(\mathbf{G}_1 + \omega_1 \mathbf{I})^{-1}] (\mathbf{G}_2 - \omega_1 \mathbf{I}).$$

Определим:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_w^* &= (\mathbf{G}_2 + \omega_2 \mathbf{I}) \mathbf{T}_w (\mathbf{G}_2 + \omega_2 \mathbf{I})^{-1} \\ &= [\mathbf{I} - (\omega_1 + \omega_2)(\mathbf{G}_1 + \omega_1 \mathbf{I})^{-1}] (\mathbf{G}_2 - \omega_1 \mathbf{I}) (\mathbf{G}_2 + \omega_2 \mathbf{I})^{-1}, \\ \mathbf{D}^{1/2} \mathbf{T}_w^* \mathbf{D}^{-1/2} &= [\mathbf{I} - (\omega_1 + \omega_2)(\overline{\mathbf{G}}_1 + \omega_1 \mathbf{I})^{-1}] (\overline{\mathbf{G}}_2 - \omega_1 \mathbf{I}) (\overline{\mathbf{G}}_2 + \omega_2 \mathbf{I})^{-1}, \end{aligned}$$

где $\overline{\mathbf{G}}_1 = \mathbf{D}^{1/2} \mathbf{G}_1 \mathbf{D}^{-1/2}$ и $\overline{\mathbf{G}}_2 = \mathbf{D}^{1/2} \mathbf{G}_2 \mathbf{D}^{-1/2}$;

$$\begin{aligned} S(\mathbf{T}_w) &= S(\mathbf{T}_w^*) = S(\mathbf{D}^{1/2} \mathbf{T}_w^* \mathbf{D}^{-1/2}) \leq \|\mathbf{D}^{1/2} \mathbf{T}_w^* \mathbf{D}^{-1/2}\|_2 \\ &\leq \|\mathbf{I} - (\omega_1 + \omega_2)(\overline{\mathbf{G}}_1 + \omega_1 \mathbf{I})^{-1}\|_2 \|(\overline{\mathbf{G}}_2 - \omega_1 \mathbf{I})(\overline{\mathbf{G}}_2 + \omega_2 \mathbf{I})^{-1}\|_2. \end{aligned}$$

Легко убедиться в том, что $\overline{\mathbf{G}}_1$ и $\overline{\mathbf{G}}_2$ симметричны. Поэтому матрицы $[\mathbf{I} - (\omega_1 + \omega_2)(\overline{\mathbf{G}}_1 + \omega_1 \mathbf{I})^{-1}]$ и $(\overline{\mathbf{G}}_2 - \omega_1 \mathbf{I})(\overline{\mathbf{G}}_2 + \omega_2 \mathbf{I})^{-1}$ тоже симметричны.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|(\overline{\mathbf{G}}_2 - \omega_1 \mathbf{I})(\overline{\mathbf{G}}_2 + \omega_2 \mathbf{I})^{-1}\|_2 &= \max_{\mu_i \in \sigma(\overline{\mathbf{G}}_2)} \left| \frac{(\mu_i - \omega_1)}{(\mu_i + \omega_2)} \right|, \\ \|[\mathbf{I} - (\omega_1 + \omega_2)(\overline{\mathbf{G}}_1 + \omega_1 \mathbf{I})^{-1}]\|_2 &= \|[(\overline{\mathbf{G}}_1 + \omega_1 \mathbf{I})(\overline{\mathbf{G}}_1 + \omega_1 \mathbf{I})^{-1} - (\omega_1 + \omega_2)(\overline{\mathbf{G}}_1 + \omega_1 \mathbf{I})^{-1}]\|_2 \\ &= \|(\overline{\mathbf{G}}_1 - \omega_2 \mathbf{I})(\overline{\mathbf{G}}_1 + \omega_1 \mathbf{I})^{-1}\|_2. \end{aligned}$$

Кроме того, $(\overline{\mathbf{G}}_1 - \omega_2 \mathbf{I})(\overline{\mathbf{G}}_1 + \omega_1 \mathbf{I})^{-1}$ симметрична. Поэтому

$$\|[(\overline{\mathbf{G}}_1 - \omega_2 \mathbf{I})(\overline{\mathbf{G}}_1 + \omega_1 \mathbf{I})^{-1}]\|_2 = \max_{\lambda_i \in \sigma(\overline{\mathbf{G}}_1)} \left| \frac{(\lambda_i - \omega_2)}{(\lambda_i + \omega_1)} \right|.$$

Мы имеем

$$S(\mathbf{T}_w) \leq \max_{\lambda_i \in \sigma(\overline{\mathbf{G}}_1)} \left| \frac{(\lambda_i - \omega_2)}{(\lambda_i + \omega_1)} \right| \max_{\mu_i \in \sigma(\overline{\mathbf{G}}_2)} \left| \frac{(\mu_i - \omega_1)}{(\mu_i + \omega_2)} \right|. \quad (3.13)$$

Из уравнений (3.10) и (3.11) мы имеем $\omega_1, \omega_2 > 0$ и $\lambda_i + \omega_1 > 0$ для $i = 1, \dots, N$. Следовательно, $\frac{(\lambda_i - \omega_2)}{(\lambda_i + \omega_1)} < 1$, $i = 1(1)N$.

Кроме того, из (3.12) мы получим

$$\omega_2 < \omega_1 + 2 \min_i \lambda_i < \omega_1 + 2\lambda_i, \quad i = 1(1)N.$$

Поэтому

$$-1 < \frac{\lambda_i - \omega_2}{\lambda_i + \omega_1}, \quad i = 1(1)N.$$

Мы можем заключить, что $\left| \frac{\lambda_i - \omega_2}{\lambda_i + \omega_1} \right| < 1$, $i = 1(1)N$.

Таким образом,

$$\max_{\lambda_i \in \sigma(\overline{\mathbf{G}}_1)} \left| \frac{\lambda_i - \omega_2}{\lambda_i + \omega_1} \right| < 1. \quad (3.14)$$

Аналогичным образом мы можем доказать, что

$$\max_{\mu_i \in \sigma(\overline{\mathbf{G}}_2)} \left| \frac{\mu_i - \omega_1}{\mu_i + \omega_2} \right| < 1. \quad (3.15)$$

Используя (3.13)–(3.15), мы получим $S(\mathbf{T}_w) < 1$. Отсюда следует сходимость метода CRAGE (3.7). \square

3.3. Применение ньютоновского метода CRAGE

Обсудим двухпараметрический итерационный ньютоновский метод CRAGE для нелинейного разностного уравнения (2.9). При этом мы будем придерживаться подхода, используемого Эвансом [3, 5, 6]. Определим:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}_{N \times 1}, \quad \varphi(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \phi_1(\mathbf{u}) \\ \phi_2(\mathbf{u}) \\ \vdots \\ \phi_N(\mathbf{u}) \end{bmatrix}_{N \times 1}, \quad \begin{aligned} a_k(\mathbf{u}) &= \frac{\partial \phi_k}{\partial u_{k-1}}, & k = 2(1)N, \\ 2b_k(\mathbf{u}) &= \frac{\partial \phi_k}{\partial u_k}, & k = 1(1)N, \\ c_k(\mathbf{u}) &= \frac{\partial \phi_k}{\partial u_{k+1}}, & k = 1(1)N - 1. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Тогда якобиан $\varphi(\mathbf{u})$ можно записать как трехдиагональную матрицу N -го порядка:

$$\mathbf{T} = \frac{\partial \varphi(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 2b_1(\mathbf{u}) & c_1(\mathbf{u}) & & & 0 \\ a_2(\mathbf{u}) & 2b_2(\mathbf{u}) & c_2(\mathbf{u}) & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{N-1}(\mathbf{u}) \\ 0 & & & a_N(\mathbf{u}) & 2b_N(\mathbf{u}) \end{bmatrix}_{N \times N}. \quad (3.17)$$

Теперь, используя любой начальный вектор $\mathbf{u}^{(0)}$, мы определим

$$\mathbf{u}^{(s+1)} = \mathbf{u}^{(s)} + \Delta \mathbf{u}^{(s)}, \quad s = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.18)$$

где $\Delta \mathbf{u}^{(s)}$ — решение нелинейной системы:

$$\mathbf{T} \Delta \mathbf{u}^{(s)} = -\varphi(\mathbf{u}^{(s)}), \quad s = 0, 1, 2, \dots. \quad (3.19)$$

Для ньютоновского метода CRAGE рассмотрим случай, когда N — четное. Разобьем матрицу \mathbf{T} следующим образом: $\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2$, где

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & 0 \\ a_2 & b_2 & & & \\ & & b_3 & c_3 & \\ & & a_4 & b_4 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & b_{N-1} & c_{N-1} \\ 0 & & & & a_N & b_N \end{bmatrix}_{N \times N}, \quad (3.20)$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} b_1 & & & & 0 \\ & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & b_{N-2} & c_{N-2} \\ & & & & a_{N-1} & b_{N-1} \\ 0 & & & & & b_N \end{bmatrix}_{N \times N}.$$

Теперь запишем ньютоновский метод CRAGE в следующем виде:

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}_2 + \omega_2 \mathbf{I}) \Delta \mathbf{u}^{(s+1)} &= [\mathbf{I} - (\omega_1 + \omega_2)(\mathbf{T}_1 + \omega_1 \mathbf{I})^{-1}] (\mathbf{T}_2 - \omega_1 \mathbf{I}) \Delta \mathbf{u}^{(s)} - \\ &(\omega_1 + \omega_2)(\mathbf{T}_1 + \omega_1 \mathbf{I})^{-1} \varphi(\mathbf{u}^s), \quad s = 0, 1, 2, \dots. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Здесь $\omega_1 > 0, \omega_2 > 0$ — параметры релаксации, а $(\mathbf{T}_1 + \omega_1 \mathbf{I})$ и $(\mathbf{T}_2 + \omega_2 \mathbf{I})$ — несингулярные. Поскольку $(\mathbf{T}_1 + \omega_1 \mathbf{I})$ и $(\mathbf{T}_2 + \omega_2 \mathbf{I})$ состоят из (2×2) подматриц, их легко можно обратить. Матрицы $(\mathbf{T}_2 + \omega_2 \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{T}_1 + \omega_1 \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{T}_2 - \omega_1 \mathbf{I})$ и $(\mathbf{T}_2 + \omega_2 \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{T}_1 + \omega_1 \mathbf{I})^{-1}$ можно рассчитать способом, подходящим для параллельных вычислений. Для сходимости ньютоновского метода CRAGE достаточно, чтобы начальный вектор $\mathbf{u}^{(0)}$ был близок к решению.

4. Результаты и наблюдения

Мы применили эти методы к следующим трем задачам, точные решения которых нам известны, и сравнили результаты с соответствующим методом TAGE и ньютоновским методом TAGE [7, 8, 12, 13]. Функция в правой части уравнения и граничные условия были получены с использованием точных решений. Здесь $\sigma_k = \sigma$ (постоянная), $k = 1(1)N$. Значение первого шага сетки слева задается следующим образом:

$$h_1 = \frac{1 - \sigma}{1 - \sigma^{N+1}}, \quad \sigma \neq 1. \quad (4.1)$$

Поэтому, имея значения N и σ , мы можем вычислить h_1 из приведенного выше соотношения, а остальные точки сетки вычисляются $h_{k+1} = \sigma h_k$, $k = 1(1)N$. Начальный вектор $\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{0}$ используется во всех итерационных методах. Итерации были прекращены, когда был достигнут допуск абсолютной ошибки $|u^{(s+1)} - u^{(s)}| \leq 10^{-10}$.

Пример 4.1 (Линейная сингулярная задача).

$$u'' + \frac{\alpha}{r}u' - \frac{\alpha}{r^2}u = f(r), \quad 0 < r < 1. \quad (4.2)$$

Точное решение задается как $u(r) = \exp(r^4)$. Среднеквадратичные (СК) ошибки, максимальные абсолютные (МА) ошибки и число итераций для методов TAGE и CRAGE приведены в табл. 1 для $\alpha = 1, \sigma = 0.8$ и $\alpha = 2, \sigma = 1.2$.

Таблица 4.1. Пример 4.1. Методы и ошибки

N	Метод TAGE			Метод CRAGE			Ошибки	
	ω_1	ω_2	Итерации	ω_1	ω_2	Итерации	MAO	CKO
$\alpha = 1, \sigma = 0.8$								
10	0.503	0.517	33	0.418	0.420	24	$0.1127 \cdot 10^{-2}$	$0.7093 \cdot 10^{-3}$
20	0.294	0.299	58	0.267	0.268	41	$0.7836 \cdot 10^{-3}$	$0.3378 \cdot 10^{-3}$
40	0.190	0.185	93	0.176	0.178	65	$0.7522 \cdot 10^{-3}$	$0.2286 \cdot 10^{-3}$
50	0.165	0.167	95	0.153	0.152	75	$0.7519 \cdot 10^{-3}$	$0.2044 \cdot 10^{-3}$
60	0.128	0.132	105	0.144	0.149	80	$0.7519 \cdot 10^{-3}$	$0.1865 \cdot 10^{-3}$
70	0.123	0.124	114	0.105	0.108	89	$0.7519 \cdot 10^{-3}$	$0.1727 \cdot 10^{-3}$
80	0.110	0.109	123	0.124	0.125	90	$0.7519 \cdot 10^{-3}$	$0.1615 \cdot 10^{-3}$
$\alpha = 2, \sigma = 1.2$								
10	0.739	0.732	23	0.740	0.747	21	$0.1892 \cdot 10^{-1}$	$0.1027 \cdot 10^{-1}$
20	0.482	0.510	33	0.510	0.528	31	$0.1252 \cdot 10^{-1}$	$0.5413 \cdot 10^{-2}$
30	0.406	0.418	39	0.482	0.480	36	$0.1174 \cdot 10^{-1}$	$0.4232 \cdot 10^{-2}$
40	0.376	0.385	44	0.410	0.412	41	$0.1162 \cdot 10^{-1}$	$0.3640 \cdot 10^{-2}$
50	0.351	0.362	48	0.390	0.396	44	$0.1161 \cdot 10^{-1}$	$0.3252 \cdot 10^{-2}$
60	0.341	0.360	50	0.404	0.400	46	$0.1160 \cdot 10^{-1}$	$0.2968 \cdot 10^{-2}$
70	0.331	0.353	53	0.360	0.363	49	$0.1160 \cdot 10^{-1}$	$0.2748 \cdot 10^{-2}$
80	0.325	0.334	54	0.350	0.352	51	$0.1160 \cdot 10^{-1}$	$0.2570 \cdot 10^{-2}$

Пример 4.2 (Уравнение Бюргерса).

$$vu'' = (u - \beta)u', \quad 0 < r < 1. \quad (4.3)$$

Точное решение задается как $u(r) = \beta[1 - \tanh(\frac{\beta r}{2v})]$, где $v = \text{Re}^{-1}$. СК ошибки, МА ошибки и число итераций приведены в табл. 2 для $\beta = 1/2$ и различных значений Re и σ . На рис. 1 показано сравнение точного решения с численным решением при $N = 60$, $\text{Re} = 50$, $\sigma = 1.4$ для примера 4.2.

Таблица 4.2. Пример 4.2. Методы и ошибки

N	Ньютоновский метод TAGE			Ньютоновский метод CRAGE			Ошибки	
	ω_1	ω_2	Итерации	ω_1	ω_2	Итерации	MAO	CKO
Re = 10, $\sigma = 1.2$								
10	0.022	0.025	6	0.010	0.012	4	$0.9848 \cdot 10^{-4}$	$0.6492 \cdot 10^{-4}$
20	0.026	0.029	6	0.003	0.006	5	$0.4098 \cdot 10^{-4}$	$0.2327 \cdot 10^{-4}$
30	0.024	0.021	7	0.004	0.006	5	$0.3582 \cdot 10^{-4}$	$0.1720 \cdot 10^{-4}$
40	0.018	0.016	7	0.004	0.006	5	$0.3504 \cdot 10^{-4}$	$0.1467 \cdot 10^{-4}$
50	0.017	0.018	8	0.004	0.007	5	$0.3492 \cdot 10^{-4}$	$0.1309 \cdot 10^{-4}$
60	0.016	0.015	8	0.005	0.006	5	$0.3490 \cdot 10^{-4}$	$0.1194 \cdot 10^{-4}$
Re = 50, $\sigma = 1.4$								
10	0.020	0.017	5	0.003	0.006	4	$0.5740 \cdot 10^{-3}$	$0.3098 \cdot 10^{-3}$
20	0.012	0.009	6	0.003	0.004	5	$0.4703 \cdot 10^{-3}$	$0.1597 \cdot 10^{-3}$
30	0.006	0.005	6	0.003	0.005	5	$0.4659 \cdot 10^{-3}$	$0.1301 \cdot 10^{-3}$
40	0.006	0.007	6	0.004	0.006	5	$0.4657 \cdot 10^{-3}$	$0.1127 \cdot 10^{-3}$
50	0.008	0.007	7	0.005	0.003	5	$0.4657 \cdot 10^{-3}$	$0.1008 \cdot 10^{-3}$
60	0.006	0.007	7	0.005	0.004	5	$0.4657 \cdot 10^{-3}$	$0.9205 \cdot 10^{-4}$

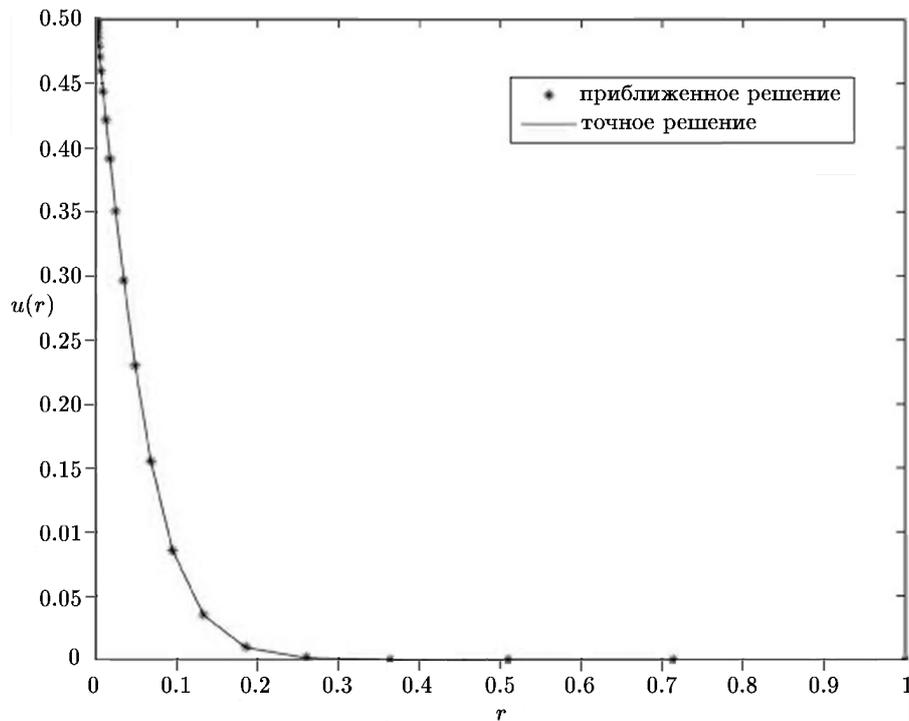


Рис. 1. Сравнение точного решения с численным решением для $N = 60$, $Re = 50$, $\sigma = 1,4$; пример 2

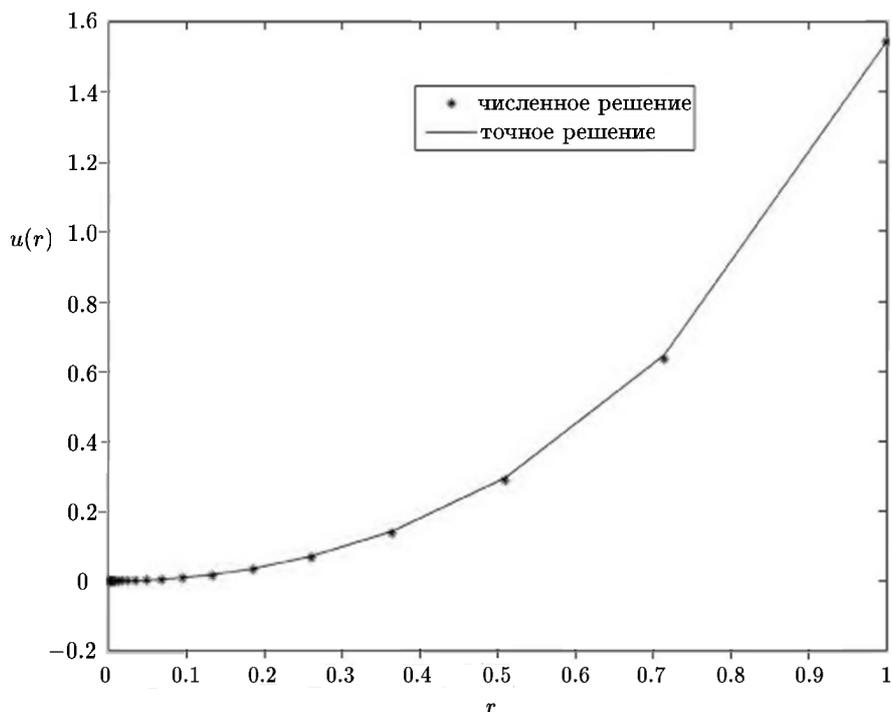
Пример 4.3.

$$\frac{1}{Re} \left(u'' + \frac{1}{r} u' - \frac{1}{r^2} u \right) = uu' + f(r), \quad 0 < r < 1. \tag{4.4}$$

Точное решение задается путем $u(r) = r^2 \cosh(r)$. СК ошибки, МА ошибки и число итераций для ньютоновских методов TAGE и CRAGE приведены в табл. 4.3 для различных значений Re и σ . На рис. 2 показано сравнение точного решения с численным решением при $N = 60$, $Re = 10$, $\sigma = 1.4$ для примера 4.3.

Таблица 4.3. Пример 4.3. Методы и ошибки

N	Ньютоновский метод TAGE			Ньютоновский метод CRAGE			Ошибки	
	ω_1	ω_2	Итерации	ω_1	ω_2	Итерации	MAO	СКО
$\alpha = 1, \text{Re} = 10, \sigma = 0.9$								
10	0.032	0.030	6	0.020	0.026	5	$0.4149 \cdot 10^{-2}$	$0.1548 \cdot 10^{-2}$
20	0.028	0.026	7	0.012	0.014	6	$0.2511 \cdot 10^{-2}$	$0.7011 \cdot 10^{-3}$
30	0.023	0.024	7	0.028	0.021	6	$0.2161 \cdot 10^{-2}$	$0.5005 \cdot 10^{-3}$
40	0.016	0.017	8	0.016	0.015	7	$0.2055 \cdot 10^{-2}$	$0.4147 \cdot 10^{-3}$
50	0.015	0.014	9	0.010	0.011	9	$0.2020 \cdot 10^{-2}$	$0.3653 \cdot 10^{-3}$
60	0.014	0.013	9	0.010	0.011	9	$0.2008 \cdot 10^{-2}$	$0.3318 \cdot 10^{-3}$
$\alpha = 2, \text{Re} = 10, \sigma = 1.2$								
10	0.027	0.030	6	0.030	0.035	5	$0.1219 \cdot 10^{-1}$	$0.5172 \cdot 10^{-2}$
20	0.028	0.031	6	0.022	0.040	5	$0.1097 \cdot 10^{-1}$	$0.3297 \cdot 10^{-2}$
30	0.019	0.023	6	0.023	0.038	5	$0.1093 \cdot 10^{-1}$	$0.2683 \cdot 10^{-2}$
40	0.029	0.032	6	0.034	0.043	5	$0.1093 \cdot 10^{-1}$	$0.2323 \cdot 10^{-2}$
50	0.031	0.035	6	0.010	0.026	6	$0.1093 \cdot 10^{-1}$	$0.2078 \cdot 10^{-2}$
60	0.031	0.038	6	0.010	0.029	6	$0.1093 \cdot 10^{-1}$	$0.1897 \cdot 10^{-2}$

Рис. 2. Сравнение точного решения с численным решением для $N = 60, \text{Re} = 10, \sigma = 1, 4$; пример 3

5. Обсуждение и выводы

В данной статье обсуждалось применение итерационных методов CRAGE и ньютоновского метода CRAGE для численного решения двухточечных нелинейных сингулярных краевых задач с использованием метода третьего порядка с переменной сеткой. Для демонстрации эффективности метода представлено три примера, включающие нелинейные и сингулярные случаи. Полученные результаты сравнивались с соответствующими результатами метода TAGE, и было показано, что по числу итераций вышеупомянутый

метод его превосходит. Этот метод может быть расширен для решения многомерных задач и использоваться на параллельных компьютерах.

Литература

1. **Keller H.B.** Numerical Methods for Two-point Boundary-value Problems. — Waltham, Massachusetts: Blaisdell Pub. Co., 1968.
2. **Jain M.K., Iyengar S.R.K., and Subramanyam G.S.** Variable mesh methods for the numerical solution of two-point singular perturbation problems // Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg. — 1984. — Vol. 42. — P. 273–286.
3. **Evans D.J.** Group explicit methods for solving large linear systems // Int. J. Comput. Math. — 1985. — Vol. 17. — P. 81–108.
4. **Chawla M.M., Shivakumar P.N.** An efficient finite difference method for two-point boundary value problems // Neural Parallel Sci. Comput. — 1996. — Vol. 4. — P. 387–396.
5. **Evans D.J.** Iterative methods for solving non-linear two point boundary value problems // Int. J. Comput. Math. — 1999. — Vol. 72. — P. 395–401.
6. **Evans D.J.** The solution of periodic parabolic equations by the coupled alternating group explicit (CAGE) iterative method // Int. J. Comput. Math. — 1990. — Vol. 4. — P. 227–235.
7. **Evans D.J.** Parallel strategies for linear systems of equations // Int. J. Comput. Math. — 2004. — Vol. 81. — P. 417–446.
8. **Sukon K.S., Evans D.J.** Two parameter AGE (TAGE) method for the solution of a tri-diagonal linear system of equations // Int. J. Comput. Math. — 1996. — Vol. 60. — P. 265–278.
9. **Mohanty R.K., Evans D.J.** Highly accurate two parameter CAGE parallel algorithms for non-linear singular two point boundary value problems // Int. J. Comput. Math. — 2005. — Vol. 82. — P. 433–444.
10. **Mohanty R.K.** A family of variable mesh methods for the estimates of (du/dr) and solution of non-linear two point boundary value problems with singularity // J. Comp. Appl. Math. — 2005. — Vol. 182. — P. 173–187.
11. **Evans D.J., Mohanty R.K.** Alternating group explicit method for the numerical solution of non-linear singular two-point boundary value problems using a fourth order finite difference method // Int. J. Comput. Math. — 2002. — Vol. 79. — P. 1121–1133.
12. **Mohanty R.K., Khosla Noopur.** Application of TAGE iterative algorithms to an efficient third order arithmetic average variable mesh discretization for two-point non-linear boundary value problems // Appl. Math. Comp. — 2006. — Vol. 172. — P. 148–162.
13. **Mohanty R.K., Khosla Noopur.** A third-order-accurate variable-mesh TAGE iterative method for the numerical solution of two-point non-linear boundary value problems // Int. J. Comput. Math. — 2005. — Vol. 82. — P. 1261–1273.
14. **Mohanty R.K., Sachdev P.L., and Jha N.** TAGE method for nonlinear singular two point boundary value problems using a fourth order difference scheme // Neural Parallel Sci. Comput. — 2003. — Vol. 11. — P. 281–287.
15. **Evans D.J., Jain Pragya** The coupled reduced alternating group explicit (CRAGE) method // Parallel Algorithms and Applications — 1993. — Vol. 2. — P. 193–208.
16. **Feng Qinghua.** Explicit finite difference method for convection-diffusion equations // Proc. of the World Congress on Engineering, London, UK. — 2009. — Vol. 2. — P. 1094–1097.
17. **Zheng Bin, Feng Qinghua.** Parallel finite difference method for diffusion equations // Proc. of the 15th American Conference on Applied Mathematics. — 2009. — P. 60–62.

18. **Konovalov A.N.** Application of the splitting method to the numerical solution of dynamic problems in elasticity theory // Zh. vychisl. mat. i mat. fiz. — 1964. — Vol. 4, № 4. — P. 760–764.
19. **Konovalov A.N.** Numerical methods for the dynamical problems of elasticity // Siberian Math. J. — 1997. — Vol. 38, iss. 3. — P. 471–487.
20. **Konovalov A.N.** To the theory of the alternating triangle iteration method // Siberian Math. J. — 2002. — Vol. 43, iss. 3. — P. 439–457.

*Поступила в редакцию 11 октября 2013 г.,
в окончательном варианте 2 февраля 2014 г.*