

7. Кирдяшкин А. Г. Структура тепловых гравитационных течений вблизи поверхности теплообмена. Автореф. на соиск. учен. степени д-ра техн. наук. Новосибирск, 1975 (Институт теплофизики СО АН СССР).
8. Scheele G. F., Hanratty T. J. Effect of natural convection instabilities on rates of heat transfer at low Reynolds numbers.—«AIChE J.», 1963, vol. 9, N 2.
9. Brown W. G. Die Überlagerung von erzwungener und natürlicher Konvektion bei niedrigen Durchsätzen in einem lotrecht Rohre.—«V. D. I. Forschungsheft», 1960, N 480.
10. Scheele G. F., Rosen E. M., Hanratty T. J. Effect of natural convection on transition to turbulence in vertical pipes.—«Can. J. Chem. Eng.», 1960, vol. 38, p. 67.
11. Поляков А. Ф. Вязкостно-гравитационное течение в трубах при малом влиянии термогравитации.— ПМТФ, 1977, № 1, с. 122—130.
12. Петухов Б. С., Кирилов В. В. К вопросу о теплообмене при турбулентном течении жидкости в трубах.— «Теплоэнергетика», 1958, № 4.

УДК 536.24

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ О ПЕРЕНОСЕ ТЕПЛА ИЛИ МАССЫ К ЦИЛИНДРУ И СФЕРЕ, ПОГРУЖЕННЫМ В ИНФИЛЬТРУЕМЫЙ ЗЕРНИСТЫЙ СЛОЙ

Ю. А. Бувич, Д. А. Казенин

(Москва)

Исследуемые ниже задачи возникают при решении проблемы охлаждения контактных реакторов химических производств, отвода и последующей утилизации тепла от печей с зернистыми слоями путем помещения внутрь аппаратов различных охлаждающих тел и вставок, при тепловой и диффузионной обработке деталей в неподвижном или слабо оживленном зернистом слое, в проблеме коррозионной стойкости погруженных вставок и т. п. В большинстве практически важных ситуаций линейный масштаб тела L намного больше характерного структурного масштаба слоя l , и в этом случае естественно использовать непрерывное описание процессов тепло- или массообмена в дисперсной смеси, окружающей тело, рассматривая ее как некую, гомогенную сплошную среду (или как систему из нескольких сосуществующих взаимодействующих сред) со своими эффективными теплофизическими и диффузионными характеристиками.

Макроскопические уравнения переноса в таких средах выводятся либо феноменологическим путем, либо же на основе усреднения локальных уравнений переноса, справедливых в отдельных фазах смеси, по представительному малому физическому объему или промежутку времени [1—3] или же по ансамблю конфигураций системы частиц дисперсной фазы [4]. Ниже используются уравнения из [4], верные в случае, когда непосредственный перенос тепла или массы примеси по контактам соприкасающихся частиц несуществен. Указанное предположение всегда справедливо для массопереноса (в том числе и в капиллярно-пористых средах) и близко к истине для теплопереноса в инфильтруемых зернистых слоях. Предполагается, что возможные источники тепла или массы в среде отсутствуют; это допущение весьма грубо лишь в случае, когда имеет место каталитическая реакция с большим тепловым эффектом, протекающая во внешней диффузионной или переходной области [5], и существен саморазогрев или самоохлаждение частиц катализатора ввиду недостаточной интенсивности межфазового теплообмена. Сделанные предположения позволяют описывать стационарный процесс переноса в рамках однофазной дисперсионной модели. Отметим, что в ряде ситуаций такая модель может быть формально использована и в случаях, когда в строгом смысле необходима двухфазная модель [6].

Допущение о незначительном влиянии контактной проводимости и неравенство $L \gg l$ дают возможность пренебречь в первом приближении существованием у поверхности погруженного тела тонкого слоя, средние свойства которого отличаются от свойств дисперсной среды вдали от тела.

1. Постановка задач. При указанных выше предположениях уравнение стационарного конвективного переноса тепла в смеси с неподвижной дисперсной фазой может быть записано в виде [4]

$$(1.1) \quad C_0(\mathbf{u}\nabla)\tau = -\nabla\mathbf{q} - C_0\nabla\langle T'\mathbf{V}'\rangle,$$

где C_0 — теплоемкость единицы объема фильтрующейся жидкости; $\mathbf{u} = \varepsilon\mathbf{v}$ — скорость фильтрации; штрих означает пульсации температуры T и истинной скорости жидкости \mathbf{V} в промежутках между частицами относительно их средних значений τ и \mathbf{v} (порозность слоя ε считается не зависящей от координат).

Величина \mathbf{q} представляет собой средний поток тепла в системе, не связанный с пульсациями жидкости:

$$(1.2) \quad \mathbf{q} = -\lambda\nabla\tau, \quad \lambda = \lambda_0 F(\varepsilon, \lambda_1/\lambda_0),$$

где λ — эффективная теплопроводность наполненного жидкостью слоя при $\mathbf{u} = 0$, причем для функции F , зависящей от ε и от λ_1/λ_0 (отношение теплопроводностей материала частиц и жидкости), имеются теоретические (см., например, [7]) и многочисленные эмпирические [8] представления.

Последний член в правой части (1.1) описывает конвективную дисперсию тепла в пересеченном поровом пространстве зернистого слоя. Тензор Λ^* соответствующих эффективных коэффициентов теплопроводности имеет ось симметрии, совпадающую по направлению с локальной скоростью фильтрации [9], причем для главных значений этого тензора можно записать соотношение [10]

$$(1.3) \quad C_0\nabla\langle T'\mathbf{V}'\rangle = \nabla(\Lambda^*\nabla\tau), \quad \lambda_i^* = 2k_i C_0 l u.$$

Теоретические значения коэффициентов конвективной дисперсии k_i вычислены в [10] на основе марковской модели некоррелированных последовательных смещений ($k_1 = 0,76$; $k_2 = 0,19$) и неплохо согласуются с экспериментом ($k_1 = 0,7-0,8$; $k_2 = 0,1-0,3$).

Из (1.1)–(1.3) получаем

$$(1.4) \quad C_0(\mathbf{u}\nabla)\tau = \nabla(\Lambda\nabla\tau), \quad \Lambda = \Lambda^* + \lambda\mathbf{I},$$

где Λ — тензор эффективных коэффициентов теплопроводности, обусловленной как молекулярным переносом тепла, так и конвективной дисперсией. (Наличие случайных локальных неоднородностей в зернистом слое приводит к появлению дополнительной конвективной дисперсии [11], которая ниже для простоты не учитывается.)

Скорость фильтрации считается известной из решения соответствующей гидродинамической задачи. Предполагая справедливым (хотя бы в приближенной форме) закон Дарси, видим, что распределение \mathbf{u} вблизи погруженного тела получается фактически из рассмотрения задачи о его потенциальном обтекании.

Наконец, на поверхности тела считаем заданным распределение температуры или нормальной составляющей потока тепла; вдали от тела температура должна совпадать с температурой τ_∞ потока, набегающего со скоростью \mathbf{u}_∞ в системе координат, связанной с телом.

В общих чертах указанная постановка задачи обсуждалась ранее в [12], где были приведены также результаты, относящиеся к теплоотдаче от цилиндра и сферы, поверхность которых поддерживается при постоянной температуре.

2. Преобразования уравнения конвективной теплопроводности. Так как тензор Λ диагонален в системах координат, одна из осей которых направлена вдоль локальной скорости фильтрации, имеет смысл рассматри

вать (1.4) в одной из таких систем. Для плоских и осесимметричных меридиональных течений наиболее естественна система, связанная с изопотенциальными поверхностями $\varphi = \text{const}$ и поверхностями тока $\psi = \text{const}$, введенная Буссинеском. Преобразование к переменным Буссинеска полезно и в том отношении, что оно существенно упрощает конвективную часть уравнения (1.4), так как неоднородное течение вне обтекаемого тела преобразуется фактически к однородному течению в плоскости с разрезом

Вводя безразмерные переменные и параметры

$$(2.1) \quad \begin{cases} \{\Phi\} \\ \{\Psi\} \end{cases} = \frac{1}{u_\infty L^{1+j}} \begin{cases} \{\varphi\} \\ \{\psi\} \end{cases}, \quad U = \frac{u}{u_\infty}, \quad \rho = \frac{r}{L}, \\ \text{Re} = \frac{C_0 u_\infty L}{\lambda}, \quad \gamma_i = \frac{4k_i C_0 u_\infty}{\lambda}$$

и учитывая (1.3), получаем вместо (1.4) уравнение

$$(2.2) \quad \frac{\partial \tau}{\partial \Phi} - \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \Phi} \left[\left(1 + \frac{\gamma_1}{2} U \right) \frac{\partial \tau}{\partial \Phi} \right] + \frac{\partial}{\partial \Psi} \left[\left(1 + \frac{\gamma_2}{2} U \right) (\rho \sin \theta)^{2j} \frac{\partial \tau}{\partial \Psi} \right] \right\},$$

причем плоскому и осесимметричному течениям в (2.1), (2.2) отвечают значения $j = 0$ и $j = 1$ соответственно.

Уравнение (2.2) эквивалентно (1.4) в области $U \neq 0$, т. е. всюду, за исключением застойных лобовой и кормовой точек на поверхности тела. В малой окрестности этих точек вместо (2.2) можно было бы получить из (1.4) иные уравнения и срастить затем их решения с решением (2.2). Однако в рассматриваемом случае такая процедура представляется физически бессмысленной, если размер этих особых областей сравним или меньше l , так что сама используемая дисперсионная модель, приводящая к (1.4), теряет смысл.

Таким образом, уравнение (2.2) рассматривается в области с выколотыми застойными точками, соответственно должны задаваться и граничные условия на поверхности тела. Получающуюся задачу можно рассматривать как задачу Коши для эллиптического уравнения (2.2), некорректную в классическом смысле (по Адамару), но становящуюся корректной при сужении класса решений за счет наложения дополнительных условий (класс корректности по Тихонову). Краевые задачи такого типа для уравнения Гельмгольца, к которому можно свести (2.2), рассматривались в [13], где было показано, что в качестве дополнительного условия, обеспечивающего единственность решения задач с открытой границей, нужно использовать условие ограниченности

$$\sum_{i=1,2} \lim_{\sigma_i \rightarrow 0} \oint_{\sigma_i(\sigma_i)} \left\{ |\tau| + \left| \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_i} \right| \right\} dc_i = 0,$$

где суммирование проводится по двум особым (застойным) точкам, а интегрирование — по круговым контурам малого радиуса вокруг этих точек. По существу, это условие требует отсутствия неинтегрируемых особенностей в указанных точках.

Решение уравнения (2.2) при достаточно общем условии на поверхности тела весьма проблематично. Известны лишь точное решение второй краевой задачи для цилиндра [14] и возможность свести решение плоской первой краевой задачи [15] к решению аналогичной задачи для пластины [16] в случае, если конвективная дисперсия отсутствует. В общем случае целесообразно использовать метод возмущений [17], связанный с построением разложения искомого решения по некоторой системе функций сравнения $\{\delta_n(\text{Re})\}$, стремящихся к нулю при

$Re \rightarrow 0$ или $Re \rightarrow \infty$. Эти предельные разложения могут быть сходящимися при $Re \rightarrow \infty$ (когда они сходятся к точным решениям) или расходящимися (когда они представляют асимптотические разложения решений). В обеих предельных ситуациях имеем дело с задачами о сингулярных возмущениях. При $Re \rightarrow \infty$ это связано с тем, что малый параметр в (2.2) имеется при старших производных. При $Re \rightarrow 0$ сингулярный характер возмущений обусловлен тем, что асимптотическое разложение неравномерно в смысле [17] в окрестности бесконечно удаленной точки и возникает необходимость в построении дополнительного внутреннего асимптотического разложения, сращиваемого затем с внешним разложением.

3. Решение задач при $Re \ll 1$. В этом случае члены, описывающие конвективную дисперсию в (2.2), содержат два малых множителя Re и U/L и могут быть опущены, так что тензор Λ шаровой, а его собственное значение равно λ .

Рассмотрим сначала задачу о цилиндре, когда уравнение (1.4) может быть записано в форме

$$(3.1) \quad Re(U\nabla)\tau = \nabla^2\tau,$$

причем оператор ∇ определен в пространстве ρ безразмерных координат. При больших ρ вводим обычным образом внутренние переменные

$$(3.2) \quad R = Re \rho, \quad X = R \cos \theta, \quad Y = R \sin \theta.$$

Используя (3.2) в (3.1), получаем для τ уравнение в переменных R и θ (или X и Y), содержащее Re в качестве малого параметра. Естественно искать решение в виде

$$(3.3) \quad \tau = \sum_{n=0}^{\infty} \tau^{(n)} \delta_n(Re), \quad \delta_0 = 1, \quad \lim_{Re \rightarrow 0} \delta_n(Re) = 0.$$

Ограничиваясь первым членом ряда (3.3), получаем для $\tau^{(0)}$ уравнение конвективного переноса в однородном потоке

$$(3.4) \quad \frac{\partial \tau^{(0)}}{\partial X} - \frac{\partial^2 \tau^{(0)}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tau^{(0)}}{\partial Y^2},$$

ограниченное решение которого, удовлетворяющее известному условию излучения и записанное в переменных ρ и θ , имеет вид

$$(3.5) \quad \tau^{(0)} = \tau_{\infty} + C_1 \exp\left(\frac{Re}{2} \rho \cos \theta\right) K_0\left(\frac{Re}{2} \rho\right),$$

где $K_0(x)$ — функция Макдональда.

Одночленное внешнее разложение определяется как решение уравнения Лапласа, следующего из (3.1) при $Re \rightarrow 0$. Для задачи Дирихле (задано распределение температуры поверхности цилиндра $\tau_0(\theta)$) это решение записывается в форме

$$(3.6) \quad \tau^{(0)} = \frac{z_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\rho}\right)^i (a_i \cos i\theta + b_i \sin i\theta) + C_2 \ln \frac{1}{\rho},$$

где a_i и b_i — коэффициенты Фурье функции $\tau_0(\theta)$.

Для задачи Неймана (задано распределение плотности нормальной составляющей потока тепла $Q(\theta)$) имеем

$$(3.7) \quad \tau^{(0)} = -\frac{A_0}{2} \ln \frac{1}{\rho} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \left(\frac{1}{\rho}\right)^i (A_i \cos i\theta + B_i \sin i\theta) + C_3,$$

где A_i и B_i — коэффициенты Фурье функции $Q(\theta)$.

Произвольные постоянные C_1 и C_2 или C_1 и C_3 , фигурирующие в (3.5) — (3.7), определяются из условия сращивания асимптотических разложений.

Используя асимптотическое представление функции Макдональда, для первой краевой задачи получаем

$$(3.8) \quad C_1 = C_2 = \left(\frac{u_0}{2} - \tau_\infty \right) \ln^{-1} \frac{4}{\gamma P}$$

и для второй краевой задачи

$$(3.9) \quad C_1 = \frac{A_0}{2}, \quad C_3 = \frac{A_0}{2} \ln \frac{4}{\gamma Pe} + \tau_\infty,$$

где γ — постоянная Эйлера. Формулы (3.8), (3.9) окончательно определяют решения обеих задач, которые обычным образом могут быть представлены в виде составных асимптотических разложений

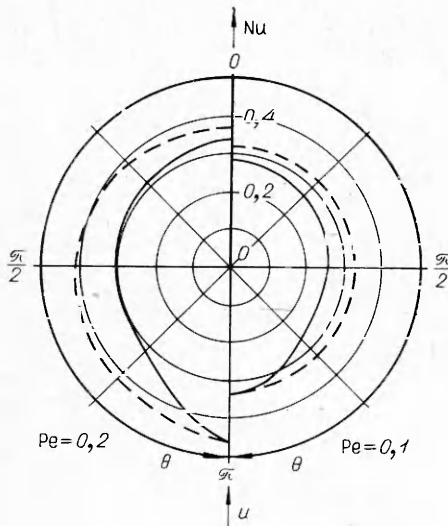
$$(3.10) \quad \tau^{(0)} = \tau_\infty + \left(\frac{u_0}{2} - \tau_\infty \right) \ln^{-1} \frac{4}{\gamma Pe} \exp \left(\frac{Pe}{2} \rho \cos \theta \right) K_0 \left(\frac{Pe}{2} \rho \right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\rho} \right)^i (a_i \cos i\theta + b_i \sin i\theta);$$

$$(3.11) \quad \tau^{(0)} = \tau_\infty - \frac{A_0}{2} \exp \left(\frac{Pe}{2} \rho \cos \theta \right) K_0 \left(\frac{Pe}{2} \rho \right) -$$

$$- \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \left(\frac{1}{\rho} \right)^i (A_i \cos i\theta + B_i \sin i\theta).$$

Представление о точности асимптотических решений (3.10), (3.11) можно получить из фиг. 1, где сравниваются локальные значения числа



Ф и г. 1

Нуссельта в разных точках на поверхности цилиндра, следующие из точного решения второй краевой задачи в [14] и из (3.11) (сплошные и штриховые кривые соответственно) при двух значениях числа Пекле для постоянной плотности потока тепла на поверхности цилиндра ($Q = \text{const}$); стрелка отмечает направление набегающего потока.

Рассмотрим теперь аналогичную задачу для сферы. Основное уравнение по-прежнему имеет вид (3.1), внутренние переменные вводятся аналогично (3.2), а решение также разбивается в виде ряда (3.3). Решая уравнение для первого члена этого ряда, заменяющее в данном случае уравнение (3.4), получаем вместо (3.5)

$$(3.12) \quad \tau^{(0)} = \tau_\infty + \frac{C_1}{\rho Pe} \exp \left[\frac{Pe}{2} \rho (1 - \cos \theta) \right].$$

После вычислений вместо (3.6), (3.7) получаем соответственно

$$(3.13) \quad \tau^{(0)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^{i+1}} \sum_{m=1}^M a_{im} Y_{im}(\theta) + C_2 \left(1 - \frac{1}{\rho} \right), \quad M = 2i + 1;$$

$$(3.14) \quad \tau^{(0)} = - \frac{A_{00}}{\rho} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)\rho^{i+1}} \sum_{m=1}^M A_{im} Y_{im}(\theta) + C_3.$$

где $Y_{im}(\theta)$ — m -я сферическая функция i -го порядка; a_{im} и A_{im} — коэффициенты разложения функций $\tau_0(\theta)$ и $Q(\theta)$ по сферическим функциям.

Как и ранее, сращивание внутреннего разложения (3.12) с внешним разложением (3.13) или (3.14) позволяет найти произвольные постоянные в (3.12)—(3.14). Соответствующие составные асимптотические разложения имеют вид

$$\begin{aligned} \tau^{(0)} &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^{i+1}} \sum_{m=1}^M a_{im} Y_{im}(\theta) + \tau_{\infty} \left\{ 1 - \frac{1}{\rho} \exp \left[-\frac{Pe}{2} \rho (1 - \cos \theta) \right] \right\}; \\ \tau^{(0)} &= -\frac{A_{0c}}{\rho} \exp \left[-\frac{Pe}{2} \rho (1 - \cos \theta) \right] - \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)\rho^{i+1}} \sum_{m=1}^M A_{im} Y_{im}(\theta) + \tau_{\infty}, \end{aligned}$$

причем параметр M определен в (3.13).

4. Решение задач при $Pe \rightarrow \infty$. В этом случае конвективная дисперсия тепла может быть весьма существенной (тензор Λ отличается от шарового), и удобно использовать уравнение (2.2). Используя метод Пуанкаре—Лайтхилла — Го [17] и вводя малый параметр $\varepsilon = Pe^{-1/2}$, представим искомую функцию τ и независимые переменные Φ и Ψ в виде

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \tau &= \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \tau^{(i)}, \quad \Phi = \xi + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \Phi_i(\xi, \eta), \\ \Psi &= \varepsilon \left[\eta + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \Psi_{i+1}(\xi, \eta) \right]. \end{aligned}$$

Преобразование от Φ, Ψ к ξ, η в (4.1) есть результат комбинированного использования методов возмущенных координат и пограничного слоя. Действительно, эти преобразования соответствуют не только сдвиговой деформации координатной сетки, но и типичны растяжению «поперечной» координаты Ψ в пограничном слое. При этом успех применения (4.1) связан обычно с тем, насколько удачно выбраны переменные ξ, η .

Величины Φ и Ψ можно представить в следующей форме:

$$\Phi = \left[\rho + \frac{1}{(1+j)\rho^{1+j}} \right] \cos \theta, \quad \Psi = \frac{1}{1+j} \left(\rho^{1+j} - \frac{1}{\rho} \right) (\sin \theta)^{1+j},$$

где по-прежнему $j = 0$ для цилиндра и $j = 1$ для сферы. Определяя ξ и η в виде

$$\xi = \frac{2+j}{1+j} \cos \theta, \quad \eta = \frac{2+j}{1+j} \frac{\rho-1}{\varepsilon} (\sin \theta)^{1+j},$$

получаем следующие разложения типа (4.1):

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \Phi &= \xi + \varepsilon^2 \xi \eta^2 \frac{(1+j)^3}{2(2+j)^2} \left[1 - \frac{(1+j)^2}{(2+j)^2} \xi^2 \right]^{-1-j} + \dots, \\ \Psi &= \varepsilon \eta + \varepsilon^2 \xi \eta^2 \frac{(j^2+j-2)(1+j)}{2(2+j)^2} \left[1 - \frac{(1+j)^2}{(2+j)^2} \xi^2 \right]^{-(1/2)(1+j)} + \dots \end{aligned}$$

Операторы дифференцирования по Φ и Ψ стандартным путем выражаются в виде линейных комбинаций операторов дифференцирования по ξ и η , причем коэффициенты в этих комбинациях ($\partial \xi / \partial \Phi$ и т. д.) вычисляются из системы линейных уравнений, получаемых в результате дифференцирования (4.2) по Φ и Ψ .

Используя указанные операторные равенства, очевидные соотношения

$$U = |\nabla\Phi| = \frac{2+j}{1+j} \sin\theta + O(\varepsilon), \quad (\rho \sin\theta)^{2j} = \sin^{2j}\theta + O(\varepsilon)$$

и метод возмущений, для первого члена ряда (4.1) из (2.2) имеем после вычислений

$$(4.3) \quad \frac{\partial\tau^{(0)}}{\partial\xi} = \left[1 - \left(\frac{1+j}{2+j} \xi \right)^2 \right]^j \left\{ 1 + \frac{\gamma_2}{2} \frac{2+j}{1+j} \left[1 - \left(\frac{1+j}{2+j} \xi \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \frac{\partial^2\tau^{(0)}}{\partial\eta^2}.$$

Вводя новую переменную

$$(4.4) \quad t = \int_{-(2+j)/(1+j)}^{\xi} \left[1 - \left(\frac{1+j}{2+j} \xi \right)^2 \right]^j \left\{ 1 + \frac{\gamma_2}{2} \frac{2+j}{1+j} \left[1 - \left(\frac{1+j}{2+j} \xi \right)^2 \right]^{1/2} \right\} d\xi = \\ = \frac{2+j}{1+j} \int_0^{\pi} (\sin\theta)^{1+2j} \left(1 + \frac{\gamma_2}{2} \frac{2+j}{1+j} \sin\theta \right) d\theta,$$

из (4.3) получаем простое параболическое уравнение

$$(4.5) \quad \partial\tau^{(0)}/\partial t = \partial^2\tau^{(0)}/\partial\eta^2,$$

решение которого должно удовлетворять (наряду с краевым условием на поверхности тела и условием на бесконечности) некоторому начальному условию при $t = 0$ (т. е. в точке $\theta = \pi$ набегающего потока). В качестве последнего обычно используется условие $\tau_0(t = 0) = \tau_\infty$.

В результате решения (4.5) при указанных условиях получаем следующее асимптотическое представление для решения первой краевой задачи:

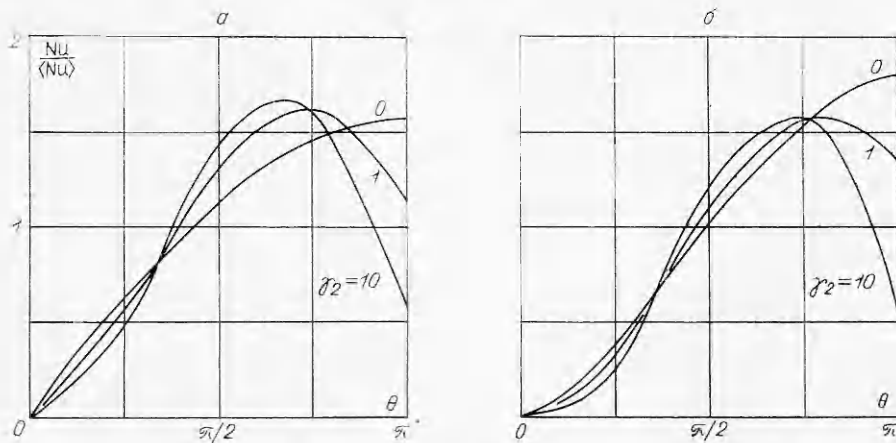
$$(4.6) \quad \tau^{(0)} = \tau_\infty \operatorname{erf} \frac{\eta}{2\sqrt{t}} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\eta\tau_0(t')}{(t-t')^{3/2}} \exp\left[-\frac{\eta^2}{4(t-t')}\right] dt'.$$

Для второй краевой задачи вместо (4.6) имеем

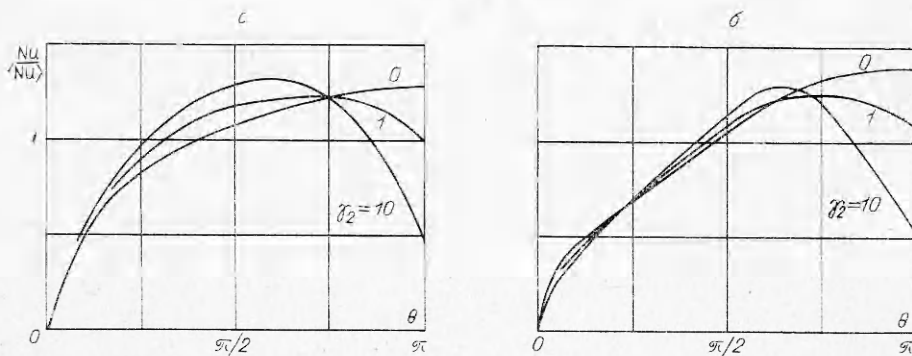
$$\tau^{(0)} = \tau_\infty - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{Q(t')}{(t-t')^{1/2}} \exp\left[-\frac{\eta^2}{4(t-t')}\right] dt'.$$

Переменные t и η определены соотношениями, приведенными выше, а $\tau_0(t)$ и $Q(t)$ — функции, определяемые через заданные на поверхности тела значения температуры и плотности нормальной составляющей потока тепла после подстановки их в последние значения аргумента θ , выраженного через t в соответствии с (4.4).

На фиг. 2, а, б приведены распределения отношения локального числа Нуссельта к его среднему по поверхности значению для изотермического цилиндра и изотермической сферы соответственно при разных значениях γ_2 . Видно, что наличие конвективной дисперсии тепла приводит к заметному изменению этих распределений по сравнению с распределениями, характерными для ситуации, когда имеется только молекулярный перенос ($\gamma_2 = 0$). В частности, максимум теплоотдачи смещается из области набегающего потока вниз по обтекаемой поверхности, где локальная скорость фильтрации (а следовательно, и коэффициент поперечной конвективной дисперсии) выше. На фиг. 3, а, б приведены аналогичные кривые для цилиндра и сферы соответственно при условии, что на их поверхностях задан равномерно распределенный тепловой поток (обозначения те же, что и на фиг. 2).



Ф и г. 2



Ф и г. 3

Отметим, что результаты, аналогичные приведенным на фиг. 2, 3, при $\gamma_2 = 0$ получены ранее в [18, 19] применительно к задачам о теплообмене цилиндра и сферы с жидкостями, характеризуемыми малыми числами Прандтля, когда применимость модели потенциального обтекания обусловлена тем, что динамический пограничный слой утоплен в тепловом, так что последний лежит главным образом в области невязкого течения. Удовлетворительное соответствие теоретических результатов из [18] экспериментальным данным в [20] косвенно свидетельствует об адекватности теории, развитой выше, и при $\gamma_2 \neq 0$.

В заключение отметим основные условия применимости теории: малость структурного масштаба зернистой среды по сравнению с характерным размером тела, незначительное влияние контактной проводимости на полный поток тепла в зернистой среде и отсутствие существенных источников или стоков тепла. Кроме того, справедливость результатов, полученных в предельном случае $Re \rightarrow \infty$, нарушается при очень больших Re , когда толщина теплового пограничного слоя становится сравнимой с l и необходим учет отличий свойств тонкого приповерхностного слоя от эффективных свойств зернистой среды вдали от тела даже в случае, когда $L \gg l$ и контактная теплопередача отсутствует.

Выше речь шла только о переносе тепла, но все полученные результаты в равной степени справедливы и для переноса массы примеси.

Поступила 21 VI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Whitaker S. The transport equations for multi-phase systems.— «Chem. Engng Sci.», 1973, vol. 28, N 1.
2. Бувич Ю. А., Корнеев Ю. А. О переносе тепла и массы в дисперсной среде.— ПМТФ, 1974, № 4.
3. Gray W. G. A derivation of the equations for multi-phase transport.— «Chem. Engng Sci.», 1975, vol. 30, N 2.
4. Бувич Ю. А., Корнеев Ю. А., Щелчкова И. Н. О переносе тепла или массы в дисперсном потоке.— «Инж.-физ. журн.», 1976, т. 30, № 6.
5. Горелик А. Г., Бесков В. С., Радкевич Н. П., Любарский А. Г. Процессы теплопереноса в неподвижном слое катализатора.— «Теор. основы хим. технол.», 1974, т. 8, № 3.
6. Vormeyer D., Schaefer R. J. Equivalence of one- and two-phase models for heat transfer processes in packed beds: one-dimensional theory.— «Chem. Engng Sci.», 1974, vol. 29, N 3.
7. Бувич Ю. А., Корнеев Ю. А. Эффективная теплопроводность дисперсной среды при малых числах Пекле.— «Инж.-физ. журн.», 1976, т. 31, № 4.
8. Дульнев Г. Н., Заричняк Ю. П. Теплопроводность смесей и композиционных материалов. Л., «Энергия», 1974.
9. Николаевский В. Н. Конвективная диффузия в пористых средах.— ПММ, 1959, т. 23, вып. 6.
10. Saffman P. G. A theory of dispersion in a porous medium.— «J. Fluid Mech.», 1959, vol. 6, N 3.
11. Buyevich Yu. A. On the fluctuations of concentration in disperse systems. Spectral description of the random concentration field and application to solute dispersion in packed beds.— «Chem. Engng Sci.», 1972, vol. 27, N 10.
12. Бувич Ю. А., Казенин Д. А. О переносе тепла или массы к телам разной формы, погруженным в неподвижный или слабооживленный зернистый слой.— В кн.: Тепло- и массоперенос. Т. 6. Минск, 1976.
13. Hayashi Y. The Dirichlet problem for the two-dimensional Helmholtz equation for an open boundary.— «J. Math. Analysis and Appl.», 1973, vol. 44, N 2.
14. King L. V. On the convection of heat from small cylinders in a stream of fluids: determination of the convection constants of small platinum wires with application to hot-wire anemometry.— «Phil. Trans. Roy. Soc.», 1914, vol. 214, ser. A, N 520.
15. Черпаков П. В. О теплоотдаче цилиндра в потенциальном потоке.— «Докл. АН СССР», 1946, т. 52, № 5.
16. Срегенский Л. Н. О нагревании потока жидкости твердыми стенками.— ПММ, 1935, т. 2, вып. 2.
17. Van Dyke M. Perturbation Methods in Fluid Mechanics. N. Y.— London, Academic Press, 1964. Рус. пер. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
18. Grosh R. J., Cess R. D. Heat transfer to fluids with low Prandtl numbers for flows across plates and cylinders.— «Trans. ASME», 1958, vol. 80, N 3.
19. Hsu Chia-Jung. Analytical study of heat transfer to liquid metals flowing past a row of spheres.— «Intern. J. Heat and Mass Transfer», 1967, vol. 10, N 2.
20. Grosh R. J., Cess R. D. Heat transmission to fluids with low Prandtl numbers for flows through tube banks.— «Trans. ASME», 1958, vol. 80, N 3.

УДК 669—147

**ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ
ОСЕВОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ПОТОКА ТЕПЛА
НА ЗАТВЕРДЕВАНИЕ МЕТАЛЛА
ПРИ НЕПРЕРЫВНОМ ЛИТЬЕ**

А. Н. Черепанов

(Новосибирск)

Во многих работах, посвященных теории затвердевания металла при непрерывном литье, как правило, пренебрегается осевой составляющей потока тепла и рассматривается приближенное уравнение теплопроводности при постоянных теплофизических параметрах металла [1—5]. В данной работе на основе точного уравнения теплопроводности рассматрива-