

3. Рябченко В. П. Квазидвумерное приближение в задаче стационарного обтекания пространственной решетки // ПМТФ.— 1983.— № 2.
4. Гахов Ф. Д. Краевые задачи.— М.: Наука, 1977.
5. Панасюк В. В., Саврук М. П., Назарчук З. Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции.— Киев: Наук. думка, 1984.
6. Окулов В. Л. Собственные колебания газа, обтекающего круговую решетку тонких профилей // Аэроупругость турбомашин.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1984.
7. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики.— М.: Наука, 1966.
8. Захаров Е. В., Пименов Ю. В. Численный анализ дифракции радиоволн.— М.: Радио и связь, 1982.
9. Курзин В. Б. Об акустическом резонансе при колебаниях решетки пластин в дозвуковом потоке газа // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1972.— № 5.
10. Пиппард А. Физика колебаний.— М.: Высш. шк., 1985.

Поступила 13/X 1987 г.,
в окончательном варианте — 14/XII 1987 г.

УДК 532.59

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УЕДИНЕННЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В РАМКАХ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

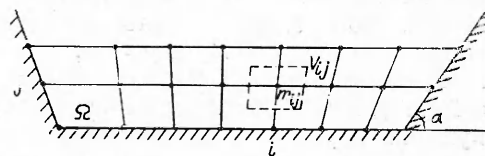
А. М. Франк

(Красноярск)

Теоретическое изучение уединенных поверхностных волн обычно проводится в рамках тех или иных моделей мелкой воды. Имеются также работы, в которых такие волны исследуются на основе численного решения уравнений Навье—Стокса [1], а также задачи Коши—Пуассона [2].

В настоящей работе численное моделирование уединенных волн проводится на основе дискретной модели несжимаемой жидкости. Суть подхода в целом состоит в том, что несжимаемый континуум моделируется с помощью конечной системы материальных точек с голономными связями [3]. При этом даже при грубой пространственной дискретизации такие модели состоятельны в смысле основных механических законов сохранения. Рассматриваемая здесь дискретная модель построена с использованием регулярной четырехугольной сетки и поэтому имеет определенное сходство с лагранжем методом LINC [4]. Близкая дискретная модель применялась также в [5, 6]. Приведены результаты расчетов уединенных волн различной амплитуды, кинематических и динамических характеристик их наката на вертикальную и наклонную стенки, а также сравнение с имеющимися теоретическими и экспериментальными результатами.

1. Описание модели. Рассмотрим слой несжимаемой жидкости конечной глубины со свободной границей. Разобьем область, занятую жидкостью Ω , на четырехугольники (рис. 1). Будем считать, что в узлах полученной сетки находятся материальные частицы с массой, являющейся суммой четвертых частей масс, прилежащих к данному узлу четырехугольников. Например, для внутренних узлов $m_{i,j} = (\rho/4)(V_{i,j} + V_{i-1,j} + V_{i-1,j-1} + V_{i,j-1})$ (ρ — плотность жидкости). Таким образом, исходную непрерывную среду аппроксимировали конечной системой материальных частиц. Известно, что в континуальной модели несжимаемой жидкости нет потенциальных взаимодействий между частицами (нет внутренней энергии). Более того, природа сил взаимодействия вообще не рассматривается. Вместо этого вводится кинематическое условие несжимаемости, т. е. ограничение на возможные движения среды. В нашей дискретной модели также необходимо ввести какое-то дискретное условие несжимаемости, обеспечивающее постоянство объема жидкости. Им может быть, например, условие постоянства в процессе движения среды всех площадей четырехугольников $V_{i,j} = \text{const}$. Площадь каждого четырехугольника — функция координат его вершин $V_{i,j} = V(\mathbf{r}_{i,j}, \mathbf{r}_{i,j+1}, \mathbf{r}_{i+1,j+1}, \mathbf{r}_{i+1,j})$, поэтому соотношения $V_{i,j} = \text{const}$ представляют собой голономные связи, наложенные на возможные движе-



Р и с. 1

ния частиц. На частицы, лежащие на твердых границах, накладываются дополнительные ограничения возможности движения только вдоль границ (т. е. условие непротекания). Эти ограничения также, очевидно, — голономные связи. Например, для частиц, лежащих на правой стенке, эта связь имеет вид $y_{i,j} - y^0 - (x_{i,j} - x^0) \operatorname{tg} \alpha = 0$.

Таким образом, в качестве модели несжимаемой жидкости получена конечная механическая система с голономными связями. Для описания волновых движений необходимо ввести силу тяжести. Наиболее простой способ [4—6] — считать, что на каждую частицу действует сила тяжести $m_{i,j}g$. Однако в этом случае легко показать, что при разбиении области Ω с помощью неортогональной сетки возможны варианты, когда невзмущенный слой жидкости не обладает минимальной потенциальной энергией и, значит, не является устойчивым положением равновесия. В расчетах это приводит к нефизичному движению частиц и, как следствие, к разрушению решения. Поэтому сила тяжести здесь вводится иначе. Потенциальная энергия рассматриваемого слоя жидкости равна $\rho g \int_{\Omega} y dx dy$. Дискретная среда занимает область Ω' со свободной границей — ломаной, образованной поверхностными частицами. Будем считать, что потенциальная энергия нашей дискретной системы $\Pi = \rho g \int_{\Omega'} y dx dy$. В данном случае Π минимальна при условии постоянства площади Ω' , когда свободная граница горизонтальна. Ясно также, что Π зависит от координат только поверхностных частиц. С учетом всего вышесказанного лагранжиан дискретной системы имеет вид

$$(1.1) \quad L = \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_{i,j} (\dot{\mathbf{r}}_{i,j})^2 - \Pi.$$

Для вывода уравнений движения к (1.1) надо добавить еще голономные связи, выражающие условие несжимаемости

$$(1.2) \quad V_{i,j} = \text{const}$$

и непротекания

$$(1.3) \quad \gamma_{p,q}(t, \mathbf{r}_{i,j}) = 0.$$

В (1.3) входит явно t в случае, если какая-либо из твердых границ движется по заданному закону. Например, полагая $\alpha = \alpha(t)$, можно получить качающуюся правую стенку — вариант волнопродуктора. Связи (1.2), (1.3) запишем в общем виде

$$(1.4) \quad f_s(t, \mathbf{r}) = 0,$$

где $s = (i, j)$ — мультииндекс (номер связи); \mathbf{r} — вектор, составленный из координат всех частиц. Уравнения движений такой дискретной системы можно найти теперь из принципа Гамильтона, используя технику множителей Лагранжа [7, 3]:

$$(1.5) \quad m_k \dot{\mathbf{u}}_k = \sum_s \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{r}_k} - \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{r}_k}, \quad \dot{\mathbf{r}}_k = \mathbf{u}_k, \quad f_s(t, \mathbf{r}) = 0.$$

Здесь $k = (i, j)$ — мультииндекс (номер частицы); \mathbf{u}_k — скорость k -й частицы; $\partial f_s / \partial \mathbf{r}_k = (\partial f_s / \partial x_k, \partial f_s / \partial y_k)$; λ_s — множители Лагранжа. Заметим, что система (1.5) независимо от количества степеней свободы обладает основными механическими законами сохранения. Так, если связи не зависят явно от t , то сохраняется полная энергия системы, если отсутствуют граничные связи (1.3) и $g = 0$, то сохраняются еще импульс и момент импульса системы. Все это вытекает из инвариантности внутренних связей (1.2), а следовательно, и полного лагранжиана относительно соответствующих групп преобразований сдвига и вращения.

Для численного решения системы (1.5) разработан специальный алгоритм, который для $g = 0$ полностью консервативен, т. е. для любых

значений шага по времени τ обеспечивает выполнение перечисленных законов сохранения. При $g \neq 0$ энергия сохраняется с точностью $O(\tau^2)$, и в практических расчетах ее изменение не превышало десятых долей процента. Алгоритм подробно описан в [8], здесь приведем лишь основные расчетные формулы:

$$(1.6) \quad \mathbf{r}_k^{n+1/2} = \mathbf{r}_k^n + \frac{\tau}{2} \mathbf{u}_k^n,$$

$$m_k \mathbf{u}_k^{n+1} = m_k \mathbf{u}_k^n + \tau \sum_s \lambda_s \mathbf{G}_{sk} - \tau \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{r}_k} (\mathbf{r}^{n+1/2}),$$

$$\mathbf{u}_k^{n+1/2} = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_k^{n+1} + \mathbf{u}_k^n), \quad \mathbf{r}_k^{n+1} = \mathbf{r}_k^n + \tau \mathbf{u}_k^{n+1/2}, \quad \sum_s A_{sp} \lambda_s = F_p,$$

где $\mathbf{G}_{sk} = \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{r}_k} (t_{n+1/2}, \mathbf{r}^{n+1/2})$; $A_{sp} = \sum_k \frac{1}{m_k} \mathbf{G}_{sk} \cdot \mathbf{G}_{pk}$; $F_p = -\frac{2}{\tau} \sum_k \mathbf{G}_{pk} \cdot \left[\mathbf{u}_k^n - \frac{\tau}{2m_k} \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{r}_k} (\mathbf{r}^{n+1/2}) \right]$.

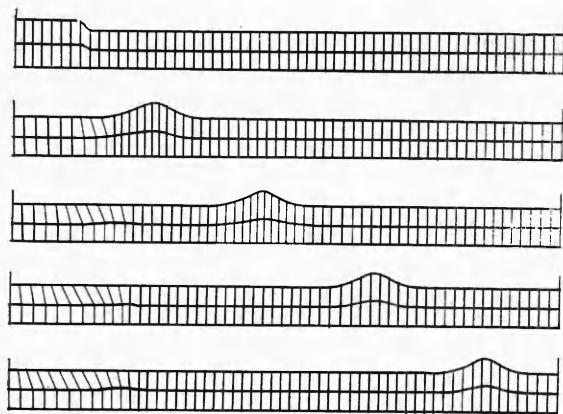
Заметим, что на каждом шаге необходимо решать систему линейных уравнений, матрица A которой симметрична и положительно определена, при этом она сильно разрежена, так как векторы \mathbf{G}_{sk} отличны от нуля только для нескольких соседних значений индексов s и k . В расчетах для решения линейной системы использовался метод последовательной верхней релаксации. В [8] показано, что алгоритм (1.6) обеспечивает аппроксимацию соотношений (1.4) с порядком $O(\tau^2)$. Шаг τ обычно выбирается из условия выполнения (1.4) с заданной точностью.

Граничные условия на твердых поверхностях, сформулированные в виде голономных связей (1.3), естественным образом включаются в общую схему (1.5), (1.6). Соответствующие этим связям множители Лагранжа представляют собой силу реакции стенок на граничные частицы и могут быть затем использованы для вычисления действующих на стенки сил. В некоторых случаях с целью уменьшения размерности матрицы линейной системы в (1.6) удобнее часть граничных связей (1.3) разрешать явно, уменьшая тем самым количество подлежащих определению степеней свободы. Так, в приведенных ниже расчетах для частиц на ровном дне считалась неизвестной только их x -координата. Другими словами, для этих частиц только их x -координаты включались в число обобщенных координат всей системы. С точки зрения уравнений это помимо сокращения размерности приводит также к занулению второй компоненты для некоторых векторов \mathbf{G}_{sk} , отвечающих производной приграничного объема по координатам граничных частиц.

2. Постановка задач. Результаты расчетов. Одна из первых задач — численное получение решения типа уединенной волны. Для чего в качестве расчетной области рассматривался слой жидкости в лотке с горизонтальным дном и вертикальными боковыми стенками, глубиной $H = 1$ и длиной $L = 58$. Плотность жидкости $\rho = 1$, ускорение свободного падения $g = 1$. Таким образом выбранные переменные соответствуют обезразмериванию исходных уравнений с помощью естественных для этой задачи масштабов ρ , H , $U_* = \sqrt{gH}$, $T_* = H/U$. Система координат выбрана так, что $y = 0$ отвечает невозмущенной свободной границе, а $x = 0$ — правой стенке. Генерация волн осуществлялась у левого конца лотка с помощью создания локального возвышения уровня жидкости (рис. 2) и задания закона вертикального движения первых восьми поверхностных частиц (аналог движущейся вниз горизонтальной пластины):

$$v = \begin{cases} -\frac{\pi h}{2T} \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right), & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & t > T. \end{cases}$$

Здесь h задает амплитуду генерируемой волны, а с помощью подбора T удаётся почти полностью избавиться от дисперсионного хвоста. Для по-

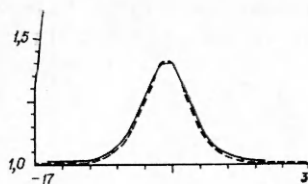


Р и с. 2

и форма через некоторое время устанавливаются. На рис. 3 приведена рассчитанная форма волны в конце лотка с амплитудой $A = 0,41$. Этот расчет выполнен на сетке, изображенной на рис. 2, горизонтальный размер ячеек $h_1 = 1$, вертикальный $h_2 = 0,5$, шаг по времени $\tau = 0,5$. Штриховой линией показана форма волны из решения теории второго приближения мелкой воды [9].

Сравнение со вторым приближением теории мелкой воды проводилось также по скорости распространения волн c . Результаты для нескольких значений амплитуд приведены в табл. 1. Таким образом, данная модель уже при грубой пространственной дискретизации дает возможность хорошо воспроизвести параметры уединенных волн.

Далее рассматривалась задача о накате уединенных волн на вертикальную стенку. Для этого в более коротком лотке длины $L = 22$ задавались начальные данные, полученные из решения предыдущей задачи и соответствующие волне с гребнем при $x = -14$. При расчетах на более мелких сетках производилась линейная интерполяция начальных данных. На рис. 4 точками 1 показаны результаты расчетов на различных сетках максимального заплеска η_{\max} на стенку в зависимости от амплитуды A падающей волны. При $A \leq 0,3$ использовались сетки с $h_1 = 1$, $h_2 = 0,5$ и $0,25$. Для больших A результаты приведены при $h_2 = 0,25$ и $0,125$, $h_1 = 1$ и $1 - 0,5$, когда сетка сгущалась у правой стенки. Здесь же представлены результаты лабораторных экспериментов [1, 11] (точки 2, 3) и [10, 12] (штрихпунктирная и штриховая линии) и расчетов этой задачи методом SUMMAC [1] (сплошная линия) и спектральным методом [2] (точки 4). Прежде всего видно хорошее совпадение расчетов по дискретной модели с расчетами [1, 2]. Экспериментальные данные дают значительный разброс заплеска, наиболее близки к расчетам результаты [12]. Далее следует отметить, что если для $A < 0,5$ все результаты хорошо ложатся на одну кривую, то для $A > 0,5$ наблюдается разброс до 5 % при расчетах на разных сетках. При $A > 0,5$ сильно увеличивается также и разброс экспериментальных данных. Резкий, почти пороговый характер этого явления наводит на предположение о неустойчивости процесса заплеска для волн с амплитудой $A \geq 0,5$.



Р и с. 3

Т а б л и ц а 1

A	$\sqrt{1+A}$	c
0,52	1,233	1,231
0,41	1,187	1,185
0,29	1,136	1,134
0,195	1,093	1,089

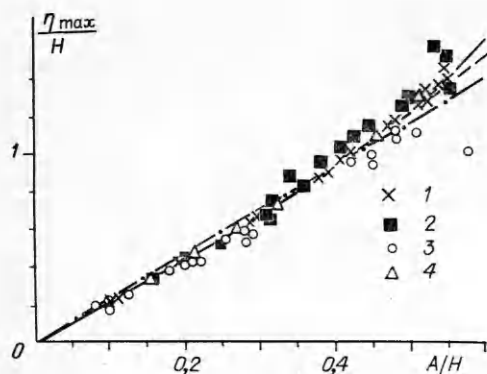


Рис. 4

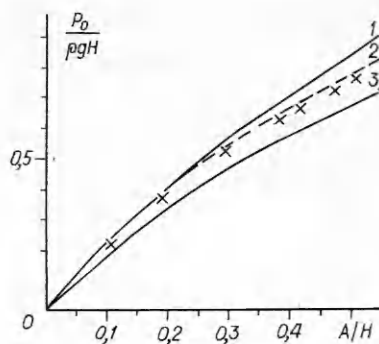


Рис. 5

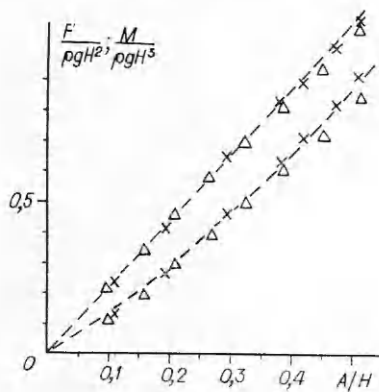


Рис. 6

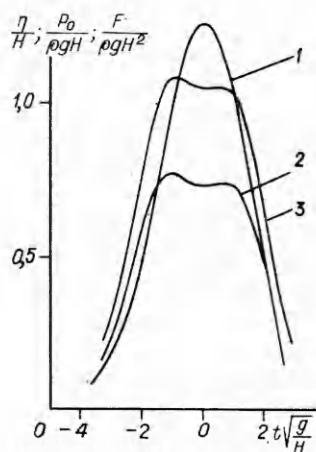


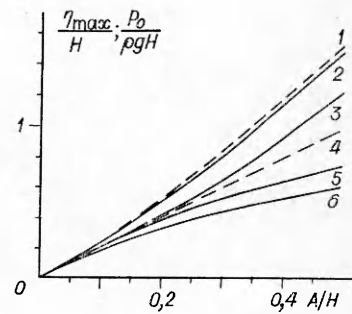
Рис. 7

Определялось также динамическое воздействие волн на стенку. На рис. 5 крестиками показана рассчитанная зависимость от амплитуды волны максимального значения давления на стенке на уровне $y = 0$, а на рис. 6 — аналогичные зависимости для волновой составляющей действующей на стенку силы и опрокидывающего момента. Там же приведены экспериментальные и расчетные данные из цитированных выше работ, а также расчеты по нелинейно-дисперсионной модели [13] (рис. 5: кривые 1—3 отвечают [12, 13, 11]; рис. 6: Δ — [2], штриховые линии — [13]). Интересно отметить, что при расчетах по дискретной модели на грубой сетке из двух ячеек по вертикали заплеск для волн большой амплитуды несколько уменьшается, а давление на стенке немного увеличивается, так что эти зависимости приближаются к результатам расчетов по нелинейно-дисперсионной модели [13]. Похоже, что дискретная модель при увеличении числа степеней свободы переходит по качеству описания течения от упрощенных гидродинамических моделей к полной. В дальнейшем планируется исследовать это обстоятельство с точки зрения дисперсионных соотношений.

На рис. 7 дана зависимость от времени заплеска η , давления на стенке P_0 при $y = 0$ и суммарной силы F (кривые 1—3) в процессе наката волны с амплитудой $A = 0,51$. Хорошо видны обнаруженный экспериментально в [11] эффект появления двух максимумов на хронограмме давления для волн большой амплитуды, а также запаздывание пика заплеска относительно пика давления. Давление и силы вычислялись следующим образом. Можно показать, что каждый множитель Лагранжа λ_s в (1.5), отвечающий внутренней связи (1.2), является аппроксимацией значения функции $p + \rho g y$ в ячейке s (p — полное гидродинамическое

Т а б л и ц а 2

tg α				
1			0,5	
A	η_{\max}	P_0	η_{\max}	P_0
0,113	0,24	0,22	0,27	0,21
0,195	0,44	0,36	0,49	0,32
0,29	0,7	0,49	0,79	0,43
0,41	1,03	0,62	1,17	0,54
0,5	1,3	0,7	1,49	0,61



Р и с. 8

давление). Отсюда давление в s -й ячейке $p_s = \lambda_s - \rho g y_s (\bar{y}_s -$ координата некоторой точки в ячейке s). Сила, действующая на k -ю частицу, может быть вычислена тогда как $\bar{F}_k = \sum_s p_s G_{sk}$. Суммированием по всем частицам, лежащим на стенке, находится результирующая сила F . Для получения волновой силы из F вычитается ее гидростатическая составляющая $(1/2)\rho g H^2$. Аналогично вычисляется опрокидывающий момент. Было опробовано несколько вариантов выбора значений \bar{y}_s . Для мелких сеток все они дали примерно одинаковые результаты, для более грубых наилучшим оказался выбор в качестве \bar{y}_s вертикальной координаты центра масс s -й ячейки. Давление на стенке при $y = 0$ определялось с помощью линейной интерполяции по вертикали по двум соседним ячейкам.

Все приведенные результаты получаются с хорошей точностью на достаточно грубой сетке $h_1 = 1$, $h_2 = 0,25$ и $\tau = 0,2$, время счета типичного варианта составляет около 10 мин на СМ-4. В принципе удовлетворительные результаты, в которых отличие по заплеску, давлению и силе не превышает 5 % от приведенных, получаются уже для $h_1 = 1$, $h_2 = 0,5$, $\tau = 0,5$, при этом время счета уменьшается до полутора минут.

Проводились также расчеты наката уединенных волн на наклонные стенки с тангенсом угла наклона 1 и 0,5. Результаты по заплеску и давлению на уровне $y = 0$ сведены в табл. 2.

На рис. 8 показаны для сравнения зависимости η_{\max} и P_0 от амплитуды волны A для вертикальной стенки и стенки с $\text{tg } \alpha = 0,5$ ($\alpha \approx 27^\circ$). Здесь штриховая линия 4 отвечает η_{\max} и P_0 для линейной теории наката на вертикальную стенку, 3, 5 — для вертикальной, а 2, 6 — для наклонной стенки, штриховая линия 1 — приведенная в [14] эмпирическая формула $\eta_{\max} = KA^\beta$ с константами $K = 3,4$, $\beta = 1,16$, соответствующими $\text{tg } \alpha = 0,5$. Видно, что результаты приведенных расчетов неплохо согласуются с этой зависимостью.

Заметим, что подобные дискретные модели легко строятся не только на четырехугольной, но также на произвольной, в том числе нерегулярной сетке [15] или вообще без сетки [3, 16]. При этом вид уравнений (1.5) и алгоритм (1.6) остаются без изменений, меняется только вид связей (1.2), (1.3), т. е. конкретная интерпретация условия несжимаемости и граничных условий.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Chan R., Street R. A computer study of finite-amplitude water waves // J. Comp. Phys.— 1970.— V. 6.— P. 68.
2. Fenton J. D., Rienecker M. M. A Fourier method for solving nonlinear water-wave problems: application to solitary-wave interactions // J. Fluid Mech.— 1982.— V. 118.— P. 411.
3. Франк А. М., Яненко Н. Н. Дискретная модель несжимаемой жидкости // Применение ЭВМ в моделировании задач математической физики.— Красноярск: Президиум СО АН СССР, 1985.
4. Hirt C. W., Cook J. L., Butler T. D. A Lagrangian method for calculating the dynamics of an incompressible fluid with free surface // Тр. секции по численным мето-

- дам в газовой динамике. II Междунар. коллоквиум по газодинамике взрыва и реагирующих систем.— М.: ВЦ АН СССР, 1971.— Т. 2.
5. Гасилов В. А., Головин В. М. и др. О численном моделировании рэлей-тейлоровской неустойчивости в несжимаемой жидкости.— М., 1979.— (Препр./Ин-т прикл. математики АН СССР; № 70).
 6. Волкова Р. А., Круглякова Л. В. и др. О моделировании рэлей-тейлоровской неустойчивости в несжимаемой жидкости в трехмерной постановке.— М., 1985.— (Препр./Ин-т прикл. математики АН СССР; № 86).
 7. Голдштейн Г. Классическая механика.— М.: Наука, 1975.
 8. Франк А. М. Полностью консервативный численный алгоритм для дискретных моделей несжимаемой жидкости // Моделирование в механике.— Новосибирск: ВЦ СО АН СССР; ИТПМ СО АН СССР, 1987.— Т. 1 (18), № 5.
 9. Овсянников Л. В. Параметры кноидальных волн // Проблемы математики и механики.— Новосибирск: Наука, 1983.
 10. Maxworthy T. Experiments on collisions between solitary waves // J. Fluid Mech.— 1976.— V. 76.— P. 177.
 11. Загрядская Н. Н., Иванова С. В. и др. Действие длинных волн на вертикальную преграду // Изв. ВНИИГ.— 1980.— Т. 138.— С. 94.
 12. Давлетшин В. Х. Силовое воздействие одиночных волн на вертикальные сооружения // Сопровождение по цунами: Тез. докл.— Горький: ИПФ АН СССР, 1984.
 13. Железняк М. И. Воздействие длинных волн на сплошные вертикальные преграды // Накат цунами на берег.— Горький: ИПФ АН СССР, 1985.
 14. Pedersen G., Gjevik B. Run-up of solitary waves // J. Fluid Mech.— 1983.— V. 135.— P. 283.
 15. Паутов В. Н., Франк А. М., Шарая И. А. О методике расчета движения несжимаемой жидкости со свободной границей на сетке Дирихле.— Красноярск, 1987.— (Препр./ВЦ СО АН СССР; № 16).
 16. Frank A. M., Pautov V. N. On discrete model of inviscid incompressible fluid // Proc. Sci. and Meth. Seminar on Ship Hydrodynamics.— Varna: BSHC, 1986.

Поступила 28/1 1988 г.

УДК 533.6.12

О НЕЛИНЕЙНОМ РАЗВИТИИ ДЛИННОВОЛНОВЫХ НЕВЯЗКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

В. И. Жук, С. П. Попов
(Москва)

Анализ распространения по пограничному слою малых двумерных возмущений в ряде случаев сводится к решению одного нелинейного уравнения относительно некоторой функции, зависящей от времени и продольной координаты [1]. Если амплитуда δ и длина волны λ возмущений удовлетворяют условиям $Re^{-2/3} \ll \delta \ll 1$, $\lambda = O(Re^{-1/2} \times \delta^{-1})$, где число Рейнольдса $Re \rightarrow \infty$ определено по характерному размеру обтекаемого тела, то двумерное поле течения в пограничном слое может быть построено в результате решения уравнения Бюргерса [2] при сверхзвуковом режиме обтекания и уравнения Бенджамина — Оно [3, 4] при дозвуковых скоростях набегающего потока. Упомянутые уравнения, введенные в [1] с помощью асимптотических разложений решений полной системы уравнений Навье — Стокса, рассматриваются в [5] как следствие предельного перехода в теории свободного взаимодействия [6—8] к высокочастотным крупномасштабным возмущениям.

1. Проиллюстрируем вывод аналогичного одномерного уравнения на примере возмущенного течения в плоской струе несжимаемой жидкости, граничащей с твердой стенкой [9, 10]. Будем считать время t , декартовы координаты x, y , компоненты вектора скорости u, v и давление p безразмерными соответственно по величинам $L^* U^{*-1}$, L^* , U^* , $\rho^* U^{*2}$ (L^* , U^* — характерные длина и скорость струи, ρ^* — плотность несжимаемой жидкости). При больших $Re = U^* L^* / \nu^*$ (ν^* — кинематическая вязкость) пристеночная струя аналогична пограничному слою, а невозмущенный профиль U_0 продольной компоненты скорости в струе зависит от переменной $Y_m = Re^{1/2} y$. Дальнейший анализ основывается на свойствах функции U_0 , вытекающих из вида изучаемого движения, а именно: на выходе из струи (при увеличении Y_m) и вблизи твердой поверхности $Y_m = 0$, ограничивающей струю снизу,

$$(1.1) \quad \begin{aligned} U_0 &\rightarrow 0, \quad dU_0/dY_m \rightarrow 0, \quad Y_m \rightarrow \infty, \\ U_0 &\rightarrow \lambda_1 Y_m + \lambda_2 Y_m^2 + \dots, \quad Y_m \rightarrow 0. \end{aligned}$$