

УДК 519.632

Разностная схема для сопряженно-операторной модели задачи теплопроводности на несогласованных сетках*

С.Б. Сорокин^{1,2}

¹Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

²Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (НГУ), ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090

E-mail: sorokin@sscc.ru

Сорокин С.Б. Разностная схема для сопряженно-операторной модели задачи теплопроводности на несогласованных сетках // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2016. — Т. 19, № 4. — С. 429–439.

На несогласованных сетках построен дискретный аналог сопряженно-операторной модели задачи теплопроводности, сохраняющий структуру исходной модели. Проведены численные эксперименты, показывающие, что разностная схема имеет второй порядок точности для случаев разрывных параметров среды в законе Фурье и неравномерных сеток.

DOI: 10.15372/SJNM20160407

Ключевые слова: задача теплопроводности, математическая модель, дискретный аналог, несогласованная сетка, сходимость, разностная схема.

Sorokin S.B. A difference scheme for a conjugate-operator model of the heat conduction problem on non-matching grids // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2016. — Vol. 19, № 4. — P. 429–439.

On non-matching grids discrete analogue conjugate-operator models of heat conduction, keeping the structure of the original model are constructed. Numerical experiments show that the difference scheme converges with second order of accuracy for the case of discontinuous parameters of the medium in the Fourier law and non-uniform grids.

Keywords: problem of heat conductivity, mathematical model, discrete analog, non-matching grid, convergence, difference scheme.

Введение

При численной реализации математических моделей нередко возникает необходимость получения более подробной информации о решении в некоторой подобласти расчетной области. При использовании согласованных сеток сгущение сетки в этой подобласти приводит к необоснованному росту числа узлов сетки в соседних с ней подобластях.

Одним из способов избежать появления “ненужных” узлов является использование несогласованных сеток. В этом случае более густая сетка строится только в той подобласти, в которой требуется подробная информация о решении.

*Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований ОМН РАН (№ 1.3, “Современные вычислительные и информационные технологии решения больших задач”), Программы президиума РАН (№ 15, “Информационные, управляющие и интеллектуальные технологии и системы”).

Несогласованные сетки использовались, например, в работах [1–7]. В [1–6] разностная схема строится для эллиптического уравнения второго порядка. В [7] дискретный аналог для сопряженно-операторной модели задачи теплопроводности [8] строится с использованием MFD (Mimetic Finite Difference methods) [9, 10].

В настоящей работе дискретный аналог сопряженно-операторной модели задачи теплопроводности, сохраняющий структуру исходной модели, строится на основе метода опорных операторов [11–15]. В отличие от [7], разностная схема строится на регулярной прямоугольной сетке. Это, по сравнению с [7], несомненно, сужает круг расчетных областей. Однако для областей, составленных из прямоугольников, предложенная схема существенно проще в реализации, записывается в терминах приближенных величин для исходных параметров модели (а не их проекций) и позволяет для диагонального кусочно-постоянного тензора теплопроводности применять технологию декомпозиции области.

1. Формулировка математической модели

Рассмотрим математическую модель стационарной задачи теплопроводности. В области $x = (x_1, x_2) \in \Omega = (a, b) \times (c, d)$ искомые параметры:

$u(x)$ — скалярная функция,

$\mathbf{w}(x) = (w_1(x), w_2(x))^T$ и $\mathbf{q}(x) = (q_1(x), q_2(x))^T$ — векторные поля (тензоры ранга 1), удовлетворяют уравнениям:

$$R^* \mathbf{w} \equiv \operatorname{div} \mathbf{w} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = f(x), \quad (1)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{K} \mathbf{q} = \begin{bmatrix} k_{11}(x) & k_{12}(x) \\ k_{21}(x) & k_{22}(x) \end{bmatrix} \mathbf{q}, \quad (2)$$

$$Ru \equiv -\operatorname{grad} u = - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} u, \quad (3)$$

а на границе области — краевым условиям:

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (4)$$

Введем в рассмотрение пространства:

- H — квадратично суммируемых в Ω функций u , принимающих нулевые значения на границе $\partial\Omega$, со скалярным произведением

$$(u, v)_H = \int_{\Omega} uv \, d\Omega \quad \forall u, v \in H,$$

- H^* — квадратично суммируемых в Ω вектор-функций $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$ со скалярным произведением

$$(\mathbf{w}, \mathbf{q})_{H^*} = \int_{\Omega} (w_1 q_1 + w_2 q_2) \, d\Omega \quad \forall \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \in H^*.$$

Сопряженность по Лагранжу операторов $\operatorname{div} w$ и $-\operatorname{grad} u$ следует из известного интегрального тождества (\mathbf{n} — вектор внешней нормали к $\partial\Omega$):

$$\int_{\Omega} (u \operatorname{div} \mathbf{w}) d\Omega = \int_{\Omega} (-\operatorname{grad} u \cdot \mathbf{w}) d\Omega + \int_{\partial\Omega} \overbrace{u(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w})}^0 dS.$$

Используя принятые обозначения, это интегральное тождество записывается в форме

$$(u, R^* \mathbf{w})_H = (Ru, \mathbf{w})_{H^*}.$$

2. Расчетная область, сетки и конечномерные пространства

Расчетная область и сетки показаны на рисунке.

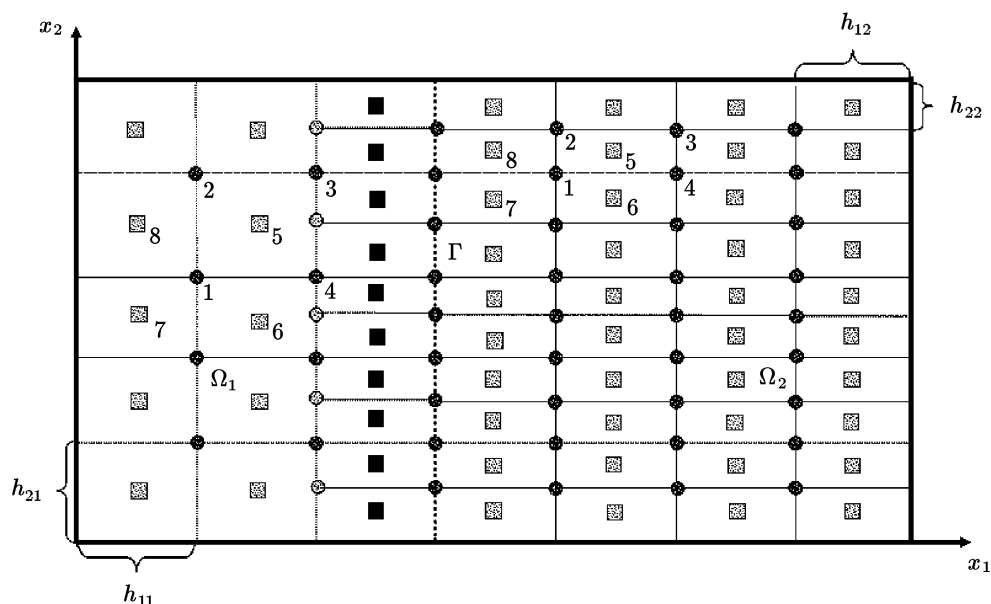


Рис. Расчетная область и сетки

Вертикальная линия Γ (прерывистая) делит область Ω на две части:

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2.$$

В области Ω используются две сетки:

сетка ω для u^h (черные кружки),

сетка $\omega_{\frac{1}{2}}$ для \mathbf{w}^h и \mathbf{q}^h (серые и черные квадраты — середины соответствующих ячеек).

Серые кружки являются вспомогательными и в расчетах не участвуют.

На рисунке обозначены шаги используемой сетки. Для Ω_1 они равны h_{11}, h_{21} , а для Ω_2 — h_{12}, h_{22} . Первый индекс означает номер координатного направления, второй — номер подобласти. В рассматриваемом случае $h_{22} = h_{21}/2$. В соответствии с этим каждый нечетный (считая снизу) узел сетки ω , лежащий на Γ , принадлежит сеточной линии в Ω_2 , но не принадлежит сеточной линии в Ω_1 . Тем самым, в этих узлах сетки в Ω_1 и Ω_2 не стыкуются.

Введем в рассмотрение конечномерные пространства:

- H_h — пространство сеточных функций u^h , определенных в точках сетки ω , принимающих нулевые значения на границе $\partial\Omega$ и со скалярным произведением

$$(u^h, v^h)_{H_h} = \sum_{(x_1, x_2) \in \omega} u^h(x_1, x_2) v^h(x_1, x_2) \tilde{h}_1 \tilde{h}_2 \quad \forall u^h \in H_h, v^h \in H_h,$$

- H_h^* — пространство сеточных вектор-функций $\mathbf{w}^h = \begin{bmatrix} w_1^h \\ w_2^h \end{bmatrix}$, определенных в точках сетки $\omega_{\frac{1}{2}}$ и со скалярным произведением

$$(\mathbf{w}^h, \sigma^h)_{H_h^*} = \sum_{(x_1, x_2) \in \omega_{\frac{1}{2}}} \sum_{k=1}^2 w_k^h(x_1, x_2) \sigma_k^h(x_1, x_2) \tilde{h}_1 \tilde{h}_2$$

$$\forall \mathbf{w}^h = \begin{bmatrix} w_1^h \\ w_2^h \end{bmatrix} \in H_h^*, \sigma^h = \begin{bmatrix} \sigma_1^h \\ \sigma_2^h \end{bmatrix} \in H_h^*.$$

Во введенных выше скалярных произведениях \tilde{h}_1, \tilde{h}_2 означают шаги сетки в первом и втором координатном направлениях соответственно. Они принимают свои значения в каждой из подобластей. Для точек (x_1, x_2) , принадлежащих Ω_1 : $\tilde{h}_1 = h_{11}, \tilde{h}_2 = h_{21}$; для точек (x_1, x_2) , принадлежащих Ω_2 : $\tilde{h}_1 = h_{12}, \tilde{h}_2 = h_{22} = h_{21}/2$. Для точек $(x_1, x_2) \in \Gamma$ первый шаг $\tilde{h}_1 = \frac{h_{11} + h_{12}}{2}$, а второй $\tilde{h}_2 = h_{22}$. Наконец, для узлов $(x_1, x_2) \in \omega_{\frac{1}{2}}$, обозначенных черными квадратами, $\tilde{h}_1 = h_{11}$, а $\tilde{h}_2 = h_{22}$.

3. Аппроксимация оператора $R = -\text{grad}$

Оператор $R = -\text{grad}$ выбирается в качестве опорного оператора [11–13]. Его аппроксимация $R_h : H_h \rightarrow H_h^*$ определяется в каждой прямоугольной ячейке сеточной области следующим образом:

$$[\mathbf{q}^h]_5 = (R_h u^h)_5 = - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{u_4^h - u_1^h}{\tilde{h}_1} + \frac{u_3^h - u_2^h}{\tilde{h}_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{u_2^h - u_1^h}{\tilde{h}_2} + \frac{u_3^h - u_4^h}{\tilde{h}_2} \right) \end{bmatrix}_5 = \left(\begin{bmatrix} R_{1h} \\ R_{2h} \end{bmatrix} u^h \right)_5. \quad (5)$$

В (5) для узлов сетки $\omega_{\frac{1}{2}}$, обозначенных на рисунке серыми квадратами, шаги \tilde{h}_1, \tilde{h}_2 имеют тот же смысл, что и ранее, для Ω_1 : $\tilde{h}_1 = h_{11}, \tilde{h}_2 = h_{21}$, а для Ω_2 : $\tilde{h}_1 = h_{12}, \tilde{h}_2 = h_{22} = h_{21}/2$.

Для узлов сетки $\omega_{\frac{1}{2}}$, обозначенных на рисунке черными квадратами, действие оператора R_h определяется аналогичным образом. Разница состоит лишь в том, что в этом случае $\tilde{h}_1 = h_{11}, \tilde{h}_2 = h_{22}$ и фиктивные узлы, обозначенные серыми кружками и участвующие в определении действия R_h , заменяются посредством интерполяции по ближайшим вертикальным соседним узлам сетки ω :

вблизи $\partial\Omega$ интерполяция по трем узлам вида

$$u\left(x_2 + \frac{h}{2}\right) = \frac{3}{8} u(x_2) + \frac{6}{8} u(x_2 + h) + \frac{-1}{8} u(x_2 + 2h) + O(h^3),$$

в остальных случаях интерполяция по четырем узлам вида

$$u\left(x_2 + \frac{h}{2}\right) = -\frac{1}{16} u(x_2 - h) + \frac{9}{16} u(x_2) + \frac{9}{16} u(x_2 + h) - \frac{1}{16} u(x_2 + 2h) + O(h^4).$$

4. Аппроксимация оператора $R^* = \operatorname{div}$

В качестве аппроксимации $R_h^* : H_h^* \rightarrow H_h$ оператора $R^* = \operatorname{div}$ выбираем сопряженный к построенному в предыдущем пункте оператору $R_h : H_h \rightarrow H_h^*$:

$$(R_h u^h, \mathbf{w}^h)_{H_h^*} = (u^h, R_h^* \mathbf{w}^h)_{H_h}. \quad (6)$$

Конкретный вид оператора R_h^* может быть получен непосредственно из (6) с использованием формул суммирования по частям. Однако более конструктивным представляется следующий путь вычисления действия оператора R_h^* .

Если ввести e_j — ортогональный базис в H_h (в скалярном произведении $(\cdot, \cdot)_{H_h}$), то $R_h^* \mathbf{w}^h$, элемент пространства H_h , может быть представлен в виде разложения по этому базису:

$$R_h^* \mathbf{w}^h = \sum_{j=1}^{\dim H_h} \frac{(R_h^* \mathbf{w}^h, e_j)_{H_h}}{(e_j, e_j)_{H_h}} e_j. \quad (7)$$

Используя в (7) соотношение (6), получаем

$$R_h^* \mathbf{w}^h = \sum_{j=1}^{\dim H_h} \frac{(\mathbf{w}^h, R_h e_j)_{H_h^*}}{(e_j, e_j)_{H_h}} e_j. \quad (8)$$

В качестве базиса в H_h выберем систему сеточных функций $e_{(x_1, x_2)}$, каждая из которых равна единице в одной из точек сетки ω , а во всех остальных точках этой сетки равна нулю:

$$e_{(x_1, x_2)}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \begin{cases} 0, & (x_1, x_2) \neq (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2), \\ 1, & (x_1, x_2) = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2), \end{cases}$$

$\forall (x_1, x_2), (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \omega$. Тогда значение $R_h^* \mathbf{w}^h$ в точке сетки $(x_1, x_2) \in \omega$ вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} R_h^* \mathbf{w}^h(x_1, x_2) &= \sum_{(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \omega} \frac{(\mathbf{w}^h, R_h e_{(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)})_{H_h^*}}{(e_{(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)}, e_{(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)})_{H_h}} e_{(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)}(x_1, x_2) \\ &= \frac{(\mathbf{w}^h, R_h e_{(x_1, x_2)})_{H_h^*}}{(e_{(x_1, x_2)}, e_{(x_1, x_2)})_{H_h}} e_{(x_1, x_2)}(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Для всех точек сетки ω , исключая точки, расположенные на вертикальной линии сетки, ближайшей слева к Γ , последняя формула дает (нумерацию точек смотри на рисунке):

$$(R_h^* \mathbf{w}^h)_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{(w_1^h)_6 - (w_1^h)_7}{\tilde{h}_1} + \frac{(w_1^h)_5 - (w_1^h)_8}{\tilde{h}_1} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{(w_2^h)_8 - (w_2^h)_7}{\tilde{h}_2} + \frac{(w_2^h)_5 - (w_2^h)_6}{\tilde{h}_2} \right].$$

Для точек сетки ω , расположенных на вертикальной линии сетки, ближайшей слева к Γ , выражение для $R_h^* \mathbf{w}^h$ более сложное.

5. Аппроксимация тензора K и разностная схема

За аппроксимацию тензора K выберем оператор $K_h : H_h^* \rightarrow H_h^*$, действующий по правилу

$$[\mathbf{w}^h]_5 = [\mathbf{K}_h \mathbf{q}^h]_5 = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}_5 [\mathbf{q}^h]_5.$$

Окончательно дискретная сопряженно-операторная модель задачи теплопроводности имеет вид:

$$\begin{aligned} R_h^* \mathbf{w}^h &= f^h, \\ \mathbf{w}^h &= \mathbf{K}_h \mathbf{q}^h, \\ \mathbf{q}^h &= R_h u^h, \\ u^h &\in H_h, \quad \mathbf{w}^h \in H_h^*. \end{aligned}$$

6. Вычислительный эксперимент

Таблицы, приведенные ниже, содержат результаты вычислительных экспериментов, показывающие второй порядок точности построенной разностной схемы.

Вычисления производились для области $\Omega = (0, 2) \times (0, 1)$. Область делилась на две равные части:

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 = (0, 1) \times (0, 1) \cup (1, 2) \times (0, 1).$$

В каждой подобласти строилась равномерная сетка: в Ω_1 с шагами $h_{11} = h_{21}$, в Ω_2 с шагами $h_{12} = h_{22} = h_{21}/2$. Используемые шаги приведены в первых двух столбцах таблиц.

Оставшиеся столбцы содержат различные характеристики ошибки

$$\mathbf{Z}^h = [\mathbf{w}^h, u^h]^\top - [\mathbf{w}, u]^\top.$$

Здесь $[\mathbf{w}, u]^\top$ — решение исходной дифференциальной задачи, $[\mathbf{w}^h, u^h]^\top$ — решение дискретной задачи.

В третьем столбце содержится норма второй компоненты \mathbf{Z}^h :

$$\max_{(x_1, x_2) \in \omega} |u(x_1, x_2) - u^h(x_1, x_2)| = \max_u.$$

В четвертом — норма первой компоненты \mathbf{Z}^h :

$$\max \left[\max_{(x_1, x_2) \in \omega_{\frac{1}{2}}} |w_1(x_1, x_2) - w_1^h(x_1, x_2)|, \max_{(x_1, x_2) \in \omega_{\frac{1}{2}}} |w_2(x_1, x_2) - w_2^h(x_1, x_2)| \right] = \max_{\mathbf{w}}.$$

В пятом столбце приводится норма проекции второй компоненты \mathbf{Z}^h на линию Γ :

$$\max_{(x_1, x_2) \in \Gamma} |u(x_1, x_2) - u^h(x_1, x_2)| = \max_{\Gamma}.$$

Наконец в последнем столбце — норма \mathbf{Z}^h :

$$\|\mathbf{Z}^h\|_{\mathbf{H}} = \sqrt{\sum_{(x_1, x_2) \in \omega} (u(x_1, x_2) - u^h(x_1, x_2))^2 \tilde{h}_1 \tilde{h}_2 + \sum_{(x_1, x_2) \in \omega_{\frac{1}{2}}} \sum_{k=1}^2 (w_k(x_1, x_2) - w_k^h(x_1, x_2))^2 \tilde{h}_1 \tilde{h}_2}.$$

В таблицах наряду со значением соответствующей нормы ошибки в скобках приводится порядок точности схемы в этой норме, рассчитанный по апостериорной информации следующим образом.

Предполагается, что структура нормы ошибки имеет вид

$$\|\mathbf{Z}^h\|_* = C_1 h_{11}^p + C_2 h_{21}^p.$$

Тогда

$$\frac{\|\mathbf{Z}^h\|_*}{\|\mathbf{Z}^{\frac{h}{2}}\|_*} = \frac{C_1 h_{11}^p + C_2 h_{21}^p}{C_1 \left(\frac{h_{11}}{2}\right)^p + C_2 \left(\frac{h_{21}}{2}\right)^p} = 2^p,$$

и порядок точности схемы можно получить, вычислив

$$p = \log_2 \left(\frac{\|\mathbf{Z}^h\|_*}{\|\mathbf{Z}^{\frac{h}{2}}\|_*} \right).$$

Именно эта рассчитанная величина и приводится в скобках после соответствующей нормы ошибки в каждой таблице. Вычисленный по апостериорной информации порядок точности схемы соответствует второму порядку во всех используемых нормах.

Таблица 1 соответствует вычислительному эксперименту с тензором теплопроводности

$$\mathbf{K}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (x_1, x_2) \in \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

и точным решением исходной задачи

$$u(x_1, x_2) = \sin^3(\pi x_1) \sin^3(\pi x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega_1 \cup \Omega_2.$$

Таблица 1.

h_{11}	h_{12}	\max_u	\max_w	\max_Γ	$\ \mathbf{Z}^h\ _{\mathbf{H}}$
1/10	1/20	0.8802×10^{-1}	0.2137×10^0	0.1043×10^{-1}	0.1158×10^0
1/20	1/40	0.2069×10^{-1} (2.08)	0.5404×10^{-1} (1.98)	0.2492×10^{-2} (2.06)	0.2765×10^{-1} (2.07)
1/40	1/80	0.5096×10^{-2} (2.02)	0.1348×10^{-1} (2.00)	0.6164×10^{-3} (2.01)	0.6837×10^{-2} (2.01)
1/80	1/160	0.1266×10^{-2} (2.01)	0.3371×10^{-2} (2.00)	0.1534×10^{-3} (2.01)	0.1705×10^{-2} (2.00)

Таблица 2 соответствует вычислительному эксперименту с тензором теплопроводности (“смешанные производные”)

$$\mathbf{K}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (x_1, x_2) \in \Omega_1, \quad \mathbf{K}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (x_1, x_2) \in \Omega_2,$$

и точным решением исходной задачи

$$u(x_1, x_2) = \sin^3(\pi x_1) \sin^3(\pi x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega_1,$$

$$u(x_1, x_2) = \sin^3(10\pi x_1) \sin^3(10\pi x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega_2.$$

Таблица 2.

h_{11}	h_{12}	\max_u	\max_w	\max_Γ	$\ \mathbf{Z}^h\ _{\mathbf{H}}$
1/40	1/80	0.1435×10^0	$0.7841 \times 10^{+1}$	0.3047×10^{-1}	$0.3999 \times 10^{+1}$
1/80	1/160	0.3250×10^{-1} (2.14)	$0.1880 \times 10^{+1}$ (2.06)	0.7146×10^{-2} (2.09)	0.9256×10^0 (2.11)
1/160	1/320	0.7943×10^{-2} (2.03)	0.4662×10^0 (2.01)	0.1746×10^{-2} (2.03)	0.2273×10^0 (2.03)
1/320	1/640	0.1973×10^{-2} (2.01)	0.1167×10^0 (2.00)	0.4299×10^{-3} (2.02)	0.5657×10^{-1} (2.01)

Таблица 3 соответствует вычислительному эксперименту с тензором теплопроводности (“смешанные производные” и разрывные коэффициенты)

$$\mathbf{K}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, (x_1, x_2) \in \Omega_1, \quad \mathbf{K}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, (x_1, x_2) \in \Omega_2,$$

и точным решением исходной задачи

$$u(x_1, x_2) = \sin^3(\pi x_1) \sin^3(\pi x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega_1,$$

$$u(x_1, x_2) = \sin^3(10\pi x_1) \sin^3(10\pi x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega_2.$$

Таблица 3.

h_{11}	h_{12}	\max_u	\max_w	\max_Γ	$\ \mathbf{Z}^h\ _{\mathbf{H}}$
1/40	1/80	0.1478×10^0	$0.1600 \times 10^{+2}$	0.4731×10^{-1}	$0.8007 \times 10^{+1}$
1/80	1/160	0.3348×10^{-1} (2.14)	$0.3820 \times 10^{+1}$ (2.07)	0.1066×10^{-1} (2.15)	$0.1853 \times 10^{+1}$ (2.11)
1/160	1/320	0.8154×10^{-2} (2.04)	0.9464×10^0 (2.01)	0.2512×10^{-2} (2.08)	0.4549×10^0 (2.03)
1/320	1/640	0.2017×10^{-2} (2.01)	0.2364×10^0 (2.00)	0.5910×10^{-3} (2.09)	0.1132×10^0 (2.01)

Таблица 4 соответствует вычислительному эксперименту с тензором теплопроводности (“смешанные производные” и разрывные коэффициенты)

$$\mathbf{K}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 20 \end{bmatrix}, (x_1, x_2) \in \Omega_1, \quad \mathbf{K}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, (x_1, x_2) \in \Omega_2,$$

и точным решением исходной задачи

$$u(x_1, x_2) = \sin^3(\pi x_1) \sin^3(\pi x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega_1,$$

$$u(x_1, x_2) = \sin^3(10\pi x_1) \sin^3(10\pi x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega_2.$$

Таблица 4.

h_{11}	h_{12}	\max_u	\max_w	\max_Γ	$\ \mathbf{Z}^h\ _{\mathbf{H}}$
1/40	1/80	0.1451×10^0	$0.7869 \times 10^{+1}$	0.3423×10^{-1}	$0.4004 \times 10^{+1}$
1/80	1/160	0.3246×10^{-1} (2.16)	$0.1871 \times 10^{+1}$ (2.07)	0.6322×10^{-2} (2.43)	0.9267×10^0 (2.11)
1/160	1/320	0.7818×10^{-2} (2.05)	0.4601×10^0 (2.03)	0.1119×10^{-2} (2.50)	0.2276×10^0 (2.03)
1/320	1/640	0.1912×10^{-2} (2.03)	0.1144×10^0 (2.01)	0.1950×10^{-3} (2.52)	0.5666×10^{-1} (2.01)

Таблица 5 соответствует вычислительному эксперименту с тензором теплопроводности (“смешанные производные” и разрывные коэффициенты)

$$\mathbf{K}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 20 \end{bmatrix}, (x_1, x_2) \in \Omega_1, \quad \mathbf{K}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, (x_1, x_2) \in \Omega_2,$$

и точным решением исходной задачи

$$u(x_1, x_2) = \sin^3(\pi x_1) \sin^3(\pi x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega_1,$$

$$u(x_1, x_2) = \sin^3(5\pi x_1) \sin^3(5\pi x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega_2.$$

Таблица 5.

h_{11}	h_{12}	\max_u	\max_w	\max_Γ	$\ \mathbf{Z}^h\ _{\mathbf{H}}$
1/40	1/80	0.3313×10^{-1}	0.9375×10^0	0.7459×10^{-2}	0.4905×10^0
1/80	1/160	0.7961×10^{-2} (2.06)	0.2310×10^0 (2.02)	0.1421×10^{-2} (2.39)	0.1207×10^0 (2.02)
1/160	1/320	0.1931×10^{-2} (2.04)	0.5751×10^{-1} (2.01)	0.2613×10^{-3} (2.44)	0.3000×10^{-1} (2.01)
1/320	1/640	0.4699×10^{-3} (2.04)	0.1419×10^{-1} (2.02)	0.4899×10^{-4} (2.41)	0.7455×10^{-2} (2.01)

Таблица 6 соответствует вычислительному эксперименту с тензором теплопроводности (“смешанные производные” и разрывные коэффициенты)

$$\mathbf{K}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 20 & 10 \\ 10 & 20 \end{bmatrix}, \quad (x_1, x_2) \in \Omega_1, \quad \mathbf{K}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (x_1, x_2) \in \Omega_2,$$

и точным решением исходной задачи

$$u(x_1, x_2) = \sin^3(\pi x_1) \sin^3(\pi x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega_1,$$

$$u(x_1, x_2) = \sin^3(15\pi x_1) \sin^3(15\pi x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega_2.$$

Таблица 6.

h_{11}	h_{12}	\max_u	\max_w	\max_Γ	$\ \mathbf{Z}^h\ _{\mathbf{H}}$
1/40	1/80	0.3902×10^0	$0.3153 \times 10^{+2}$	0.1012×10^0	$0.1578 \times 10^{+2}$
1/80	1/160	0.7446×10^{-1} (2.39)	$0.6568 \times 10^{+1}$ (2.26)	0.1673×10^{-1} (2.60)	$0.3217 \times 10^{+1}$ (2.30)
1/160	1/320	0.1767×10^{-1} (2.07)	$0.1579 \times 10^{+1}$ (2.06)	0.2981×10^{-2} (2.49)	0.7717×10^0 (2.06)
1/320	1/640	0.4342×10^{-2} (2.02)	0.3889×10^0 (2.02)	0.5214×10^{-3} (2.51)	0.1911×10^0 (2.02)

Таблица 7 соответствует вычислительному эксперименту с тензором теплопроводности (“смешанные производные” и разрывные коэффициенты)

$$\mathbf{K}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 0.002 & 0.01 \\ 0.01 & 0.002 \end{bmatrix}, \quad (x_1, x_2) \in \Omega_1, \quad \mathbf{K}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (x_1, x_2) \in \Omega_2,$$

и точным решением исходной задачи

$$u(x_1, x_2) = \sin^3(\pi x_1) \sin^3(\pi x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega_1,$$

$$u(x_1, x_2) = \sin^3(10\pi x_1) \sin^3(10\pi x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega_2.$$

Таблица 7.

h_{11}	h_{12}	\max_u	\max_w	\max_Γ	$\ \mathbf{Z}^h\ _{\mathbf{H}}$
1/40	1/80	0.1514×10^0	$0.8146 \times 10^{+1}$	0.6161×10^{-1}	$0.4028 \times 10^{+1}$
1/80	1/160	0.3462×10^{-1} (2.12)	$0.1944 \times 10^{+1}$ (2.07)	0.1453×10^{-1} (2.08)	0.9287×10^0 (2.11)
1/160	1/320	0.8446×10^{-2} (2.04)	0.4831×10^0 (2.01)	0.3501×10^{-2} (2.05)	0.2281×10^0 (2.03)
1/320	1/640	0.2065×10^{-2} (2.04)	0.1199×10^0 (2.01)	0.8270×10^{-3} (2.08)	0.5677×10^{-1} (2.01)

Литература

1. **Волков Е.А.** Метод сеток для конечных и бесконечных областей с кусочно-гладкой границей // Докл. АН СССР. — 1966. — Т. 168, № 5. — С. 978–981.
2. **Волков Е.А.** О методе регулярных составных сеток для уравнения Лапласа на многоугольниках // Тр. МИАН СССР. — 1976. — Т. 140. — С. 68–102.
3. **Вабищевич П.Н.** Адаптивные сетки составного типа в задачах математической физики // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1989. — Т. 29, № 6. — С. 902–914.
4. **Ewing R.E., Lazarov R.D., and Vassilevski P.S.** Local refinement techniques for elliptic problems on cell-centered grids. I. Error analysis // Mathematics of Computation. — 1991. — Vol. 56, № 194. — P. 437–461.
5. **Василевский Ю.В.** Методы решения краевых задач с использованием нестыкующихся сеток // Тр. Математического центра им. Н.И. Лобачевского. — Казань: Унипресс, 1999. — Т. 2. — С. 94–121.
6. **Chen H., Min C., and Gibou F.** A supra-convergent finite difference scheme for the Poisson and heat equations on irregular domains and non-graded adaptive Cartesian grids // J. of Scientific Computing. — 2007. — Vol. 31. — P. 19–60.
7. **Kuznetsov Yu., Lipnikov K., and Shashkov M.** The mimetic finite difference method on polygonal meshes for diffusion-type problems // Computational Geosciences. — 2004. — Vol. 8, iss. 4. — P. 301–324.
8. **Коновалов А.Н.** Сопряженно-факторизованные модели в задачах математической физики // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, — 1998. — Т. 1, № 1. — С. 25–57.
9. **da Veiga L. Beirao, Lipnikov K., and Manzini G.** The Mimetic Finite Difference Method for Elliptic Problems // Modeling, Simulation and Applications. — Berlin: Springer-Verlag, 2014. — Vol. 11.
10. **Lipnikov K., Manzini G., and Shashkov M.** Mimetic finite difference method // J. of Computational Physics. — 2014. — Vol. 257. — P. 1163–1227.
11. **Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю.** Разностные аналоги основных дифференциальных операторов первого порядка. — Москва, 1981. — (Препринт / ИПМ АН СССР; 8).
12. **Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю.** Операторные разностные схемы // Дифф. уравнения. — 1981. — Т. 17, № 7. — С. 1317–1321.
13. **Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю.** О представлении разностных схем математической физики в операторной форме // ДАН СССР. — 1981. — Т. 258, № 5. — С. 1092–1096.
14. **Samarskii A.A., Tishkin V.F., Favorskii A.P., and Shashkov M.** Employment of the reference-operator methods in the construction of finite difference analog of tensor operations // Differ. Equ. — 1983. — Vol. 18, № 7. — P. 881–885.
15. **Сорокин С.Б.** Обоснование дискретного аналога сопряженно-операторной задачи теплопроводности // Сиб. журн. индустриальной математики. — 2014. — Т. 17, № 4. — С. 98–110.

*Поступила в редакцию 28 декабря 2015 г.,
в окончательном варианте 22 апреля 2016 г.*

Литература в транслитерации

1. **Volkov E.A.** Metod setok dlya konechnykh i beskonechnykh oblastei s kusochno-gladkoi granicej // Dokl. AN SSSR. — 1966. — Т. 168, № 5. — С. 978–981.

2. **Volkov E.A.** O metode regulyarnykh sostavnykh setok dlya uravneniya Laplasya na mnogougol'nikakh // Tr. MIAN SSSR. — 1976. — T. 140. — S. 68–102.
3. **Vabishchevich P.N.** Adaptivnye setki sostavnogo tipa v zadachakh matematicheskoi fiziki // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1989. — T. 29, № 6. — S. 902–914.
4. **Ewing R.E., Lazarov R.D., and Vassilevski P.S.** Local refinement techniques for elliptic problems on cell-centered grids. I. Error analysis // Mathematics of Computation. — 1991. — Vol. 56, № 194. — P. 437–461.
5. **Vasilevskii Yu.V.** Metody resheniya kraevykh zadach s ispol'zovaniem nestykuyushchikhsya setok // Tr. Matematicheskogo centra im. N.I. Lobachevskogo. — Kazan': Unipress, 1999. — T. 2. — S. 94–121.
6. **Chen H., Min C., and Gibou F.** A supra-convergent finite difference scheme for the Poisson and heat equations on irregular domains and non-graded adaptive Cartesian grids // J. of Scientific Computing. — 2007. — Vol. 31. — P. 19–60.
7. **Kuznetsov Yu., Lipnikov K., and Shashkov M.** The mimetic finite difference method on polygonal meshes for diffusion-type problems // Computational Geosciences. — 2004. — Vol. 8, iss. 4. — P. 301–324.
8. **Konovalov A.N.** Sopryazhenno-faktorizovannyye modeli v zadachakh matematicheskoi fiziki // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, — 1998. — T. 1, № 1. — S. 25–57.
9. **da Veiga L. Beirao, Lipnikov K., and Manzini G.** The Mimetic Finite Difference Method for Elliptic Problems // Modeling, Simulation and Applications. — Berlin: Springer-Verlag, 2014. — Vol. 11.
10. **Lipnikov K., Manzinia G., and Shashkov M.** Mimetic finite difference method // J. of Computational Physics. — 2014. — Vol. 257. — P. 1163–1227.
11. **Samarskii A.A., Tishkin V.F., Favorskii A.P., Shashkov M.Yu.** Raznostnye analogi osnovnykh differentsial'nykh operatorov pervogo poryadka. — Moskva, 1981. — (Preprint / IPM AN SSSR; 8).
12. **Samarskii A.A., Tishkin V.F., Favorskii A.P., Shashkov M.Yu.** Operatornye raznostnye skhemy // Diff. uravneniya. — 1981. — T. 17, № 7. — S. 1317–1321.
13. **Samarskii A.A., Tishkin V.F., Favorskii A.P., Shashkov M.Yu.** O predstavlenii raznostnykh skhem matematicheskoi fiziki v operatornoi forme // DAN SSSR. — 1981. — T. 258, № 5. — S. 1092–1096.
14. **Samarskii A.A., Tishkin V.F., Favorskii A.P., and Shashkov M.** Employment of the reference-operator methods in the construction of finite difference analog of tensor operations // Differ. Equ. — 1983. — Vol. 18, № 7. — P. 881–885.
15. **Sorokin S.B.** Obosnovanie diskretnogo analoga sopryazhenno-operatornoi zadachi teploprovodnosti // Sib. zhurn. industrial'noi matematiki. — 2014. — T. 17, № 4. — S. 98–110.

