

УДК 519.6

## Свойства разностных схем на косых шаблонах для гиперболических уравнений

В.И. Паасонен<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

<sup>2</sup>Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (НГУ), ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090

E-mail: paas@ict.nsc.ru

**Паасонен В.И.** Свойства разностных схем на косых шаблонах для гиперболических уравнений // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2018. — Т. 21, № 1. — С. 83–97.

В работе изучаются всевозможные разностные схемы для уравнения переноса на косых шаблонах, т. е. схемы, использующие различные пространственные сетки на разных временных слоях. Такого рода схемы могут быть полезны при решении краевых задач с подвижными границами, при использовании регулярных сеток нестандартной структуры, например треугольных или сотовых, а также при использовании адаптивных методов.

Для исследования устойчивости схем на косых шаблонах используются анализ первого дифференциального приближения и дисперсионный анализ. Анализируется смысл условий устойчивости с точки зрения ограничений на расположение элементов шаблона относительно характеристик уравнения, а также проводится сравнение результатов с геометрическими интерпретациями устойчивости классических схем. В работе представлены обобщения косых схем на случай квазилинейного уравнения переноса и приведены результаты численных экспериментов для них.

**DOI:** 10.15372/SJNM20180106

**Ключевые слова:** *неравномерная сетка, адаптивная сетка, косой шаблон, подвижная сетка, компактная схема.*

**Paasonen V.I.** The properties of difference schemes on oblique stencils for the hyperbolic equations // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2018. — Vol. 21, № 1. — P. 83–97.

In this paper, we study various difference schemes on oblique stencils, i.e., the schemes using different space grids on different time levels. Such schemes can be useful when solving boundary value problems with moving boundaries and when using the regular grids of a non-standard structure (for example, triangular or cellular) and, also, when applying the adaptive methods.

To study the stability, we use the analysis of First Differential Approximation of finite difference schemes and the dispersion analysis. We study the meaning of the stability conditions as constraints on the geometric location of stencil elements with respect to the characteristics of the equation. In addition, we compare our results with the geometric interpretation of the stability of classical schemes. The paper also presents the generalization of oblique schemes in the case of the quasi-linear equation of transport and numerical experiments for these schemes.

**Keywords:** *non-uniform grid, adaptive grid, oblique stencil, moving grid, compact scheme.*

---

## Введение

Обычно разностные схемы для решения динамических задач записываются на прямых шаблонах, для которых пространственная сетка на обоих временных слоях одна и

та же. Даже при использовании классических адаптивных методов, связанных с непосредственной перестройкой сетки [1–3] на каждом временном слое, разностная задача сначала решается на прямом шаблоне, а затем сетка перестраивается, адаптируясь к полученному профилю решения, после чего осуществляется интерполяция решения со старой сетки на новую. Впрочем, спектр адаптивных методов очень широк [4], и в данном случае речь не идет о классе адаптивных методов, опирающихся на подходящее преобразование координат [4, 5], когда фактически задача решается в новых переменных на фиксированной равномерной сетке.

Обычно при расчетах в исходных физических координатах дифференциальное уравнение проще, но зато сетка в адаптивных методах требует перестройки, а при автоматическом способе сетка равномерна, но уравнение отягощено преобразованием, зависящим от решения. Для простых схем первого и второго порядка точности наличие нелинейности в преобразованном уравнении не вызывает никаких затруднений при построении разностных аппроксимаций, поэтому для них предпочтителен второй способ. Но для построения аппроксимаций высоких порядков точности нелинейность в дифференциальном операторе, напротив, является существенным препятствием [6, 7]. А поскольку автору близка именно тематика компактных схем, то его выбор в пользу классического подхода, при котором задача решается в исходных физических переменных, становится ясным.

Для адаптивных схем выше первого порядка точности линейная интерполяция решения понизила бы порядок точности метода в целом до первого. Но полиномиальная или сплайновая интерполяция, формально более точная по порядку, в задачах с неоднородным характером решения способна приводить к значительной фактической потере точности в зонах больших градиентов. Поэтому представляется крайне желательным по возможности вовсе исключить интерполяцию из цепочки вычислений, а это легко удаётся сделать, используя именно схемы на косых шаблонах. Для этого необходимо сначала каким-нибудь образом определить сетку на следующем слое, решение на котором еще не известно, а потом решать разностную задачу на данный момент времени, используя схемы на косых шаблонах.

Данные соображения относительно возможности обойти интерполяционные проблемы при реализации адаптивных методов и явились первопричиной интереса автора к разностным схемам на косых шаблонах, а иные области их приложения, такие как краевые задачи с подвижными границами и использование непрямоугольных регулярных сеток (например треугольных или сотовых), явились дополнительными элементами мотивации к их исследованию. В дальнейшем мы абстрагируемся от способов генерации сеток и займемся исключительно разностными схемами, предполагая известными различные сетки на различных временных слоях. Объектом исследования будут линейное и квазилинейное уравнения переноса с одной пространственной переменной.

## 1. Простейшая явная схема

Для уравнения переноса

$$\frac{\partial U}{\partial t} + c \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad c = \text{const}, \quad (1)$$

рассмотрим косой аналог явной схемы с двумя узлами на нижнем слое

$$u^{n+1}(x + \alpha) = u^n(x) + D \frac{u^n(x + h) - u^n(x)}{h}, \quad D = \alpha - ct. \quad (2)$$

Здесь  $x = x_i^n$  и  $x + h = x_{i+1}^n$  — координаты двух последовательных узлов неравномерной сетки нижнего слоя,  $x + \alpha = x_i^{n+1}$  — координата узла сетки на верхнем слое,  $\tau$  — шаг по времени, пространственный шаг предполагается переменным, а  $h$  — его локальное значение для данного узла сетки. Будем предполагать, что имеет место естественное для гиперболического случая соотношение шагов  $\tau = O(h)$ . Предполагается также, что  $\alpha$  также имеет равный порядок малости с  $h$ . Используя продолженную систему, вычислим разложение невязки схемы (2) на достаточно гладких решениях уравнения (1):

$$\psi = \frac{D^2 - Dh}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + O(\tau^3 + h^3).$$

Очевидно, порядок погрешности аппроксимации схемы на единицу меньше порядка невязки, так как запись схемы (2) отличается от канонической формы множителем  $\tau$ . Следовательно, схема (2) аппроксимирует уравнение (1) с первым порядком, при этом ее первое дифференциальное приближение (ПДП)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + c \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{D(h - D)}{2\tau} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

является параболическим при условии  $0 < D < h$ , что равносильно ограничению на параметр Куранта:

$$\frac{\alpha}{h} - 1 < K < \frac{\alpha}{h}, \quad K = \frac{c\tau}{h}. \quad (3)$$

Геометрический смысл неравенства (3) заключается в том, что для характеристики, проходящей через узел  $(x + \alpha, t + \tau)$  верхнего временного слоя, точка ее пересечения с нижним слоем расположена между узлами шаблона  $(x, t)$  и  $(x + h, t)$ . При этом решение на верхнем слое выражается как линейная комбинация с положительными коэффициентами значений решения в узлах нижнего слоя, как это имеет место для традиционных явных схем на шаблоне “уголок”.

При этом же условии (3) множители возрастания всех гармоник по модулю строго меньше единицы. В самом деле, для коэффициента возрастания  $\rho$  гармоники  $\exp(i\omega x)$  имеем дисперсионное соотношение

$$\rho e^{i\omega\alpha} = 1 - \frac{D}{h}(1 - e^{i\omega h}),$$

откуда следует

$$|\rho|^2 = 1 - 4 \frac{D(h - D)}{h^2} \sin^2 \frac{\omega h}{2} < 1,$$

так как, согласно (3),  $D = \alpha - c\tau \in (0, h)$ .

Таким образом, имеет место полная аналогия с традиционными схемами первого порядка точности, для которых условия устойчивости схемы, параболичности ее ПДП и монотонности эквивалентны [8].

В частном случае ( $\alpha = h$ ) схема (2) совпадает с явной схемой с левосторонней разностью, при  $\alpha = 0$  — с правосторонней, а при  $\alpha = h/2$  — со схемой Лакса, а также с первым шагом схемы предиктор–корректор. Во всех перечисленных частных случаях общее условие устойчивости (3) для косых схем переходит в условие Куранта для традиционных схем.

Остается добавить, что в нелинейном случае

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

аналог схемы (2) имеет вид

$$u^{n+1}(x + \alpha) = u^n(x) + \alpha \frac{u^n(x + h) - u^n(x)}{h} - \tau \frac{\phi^n(x + h) - \phi^n(x)}{h}. \quad (5)$$

Порядок аппроксимации для нее также первый по каждой переменной.

## 2. Простейшая неявная схема

Рассмотрим косой аналог

$$u^{n+1}(x) + B \frac{u^{n+1}(x + h) - u^n(x)}{h} = u^n(x + \alpha), \quad B = \alpha + c\tau, \quad (6)$$

обычной неявной схемы. Здесь  $x$  и  $x + h$  — координаты двух последовательных узлов неравномерной сетки верхнего слоя, а  $x + \alpha$  — координата узла сетки на нижнем слое,  $h$  и  $\alpha$  — локальные значения шагов. Легко убедиться, что схема (6) аппроксимирует уравнение (1) с первым порядком, и ПДП схемы имеет вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} + c \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{B(B - h)}{2\tau} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

Условием параболичности ПДП является неравенство  $B(B - h) > 0$ , истинное при  $B < 0$  или при  $B > h$ . Первое из них выполняется, когда характеристика, проходящая через узел  $(x, t + \tau)$  на верхнем слое, остается внутри треугольника с вершинами, образующими шаблон схемы. Второе неравенство имеет аналогичный смысл, но по отношению ко второму узлу верхнего слоя: характеристика из узла  $(x + h, t + \tau)$  проходит внутри треугольника, образованного узлами шаблона. Таким образом, в общем случае область устойчивости представляет собой объединение двух вееров характеристик, определяемых неравенствами

$$c\tau < -\alpha, \quad c\tau > h - \alpha. \quad (7)$$

Данная геометрическая интерпретация полностью согласуется с интерпретацией устойчивости для чисто неявных схем с односторонними разностями на прямых шаблонах с  $\alpha = 0$  или  $\alpha = h$ .

При этом же условии (7) множители возрастания всех гармоник по модулю строго меньше единицы. В самом деле, для коэффициента возрастания гармоник имеем дисперсионное соотношение

$$\rho \left( 1 + \frac{B}{h} (e^{i\omega h} - 1) \right) = e^{i\omega \alpha},$$

откуда следует

$$|\rho|^2 = \left( 1 + 4 \frac{B(B - h)}{h^2} \sin^2 \frac{\omega h}{2} \right)^{-1} < 1.$$

Таким образом, и в случае неявных косых схем свойства устойчивости и параболичности ПДП эквивалентны, как и для традиционных схем [8].

## 3. Косой аналог схемы Лакса–Вендроффа

Как известно, классическую схему Лакса–Вендроффа на равномерной сетке можно записать как двухшаговую с промежуточным шагом в виде схемы Лакса и с корректором на ромбовидном шаблоне, а также непосредственно в целых шагах как явную схему на шаблоне с тремя узлами на нижнем слое. По аналогии с классическим вариантом схему на косом шаблоне запишем в одношаговой форме

$$u^{n+1}(x + \alpha) = a_- u^n(x - h_-) + a_0 u^n(x) + a_+ u^n(x + h_+). \quad (8)$$

Заметим, что схема (8) обобщает классическую схему Лакса–Вендроффа одновременно в двух смыслах: как обобщение на случай неравномерной сетки ( $h_- \neq h_+$ ) и в смысле перехода от прямого шаблона к косому ( $\alpha \neq 0$ ). Нетрудно установить, что погрешность схемы есть величина  $O(\tau^2 + h^2)$  при выполнении условий аппроксимации:

$$a_- + a_0 + a_+ = 1, \quad -a_-h_- + a_+h_+ = D, \quad a_-h_-^2 + a_+h_+^2 = D^2$$

(здесь и в дальнейшем  $D = \alpha - c\tau$ ), из которых однозначно определяются коэффициенты схемы:

$$a_- = \frac{D(D - h_+)}{h_-(h_+ + h_-)}, \quad a_+ = \frac{D(D + h_-)}{h_+(h_+ + h_-)}, \quad a_0 = \frac{(h_+ - D)(D + h_-)}{h_+h_-}. \quad (9)$$

В частном случае ( $\alpha = 0$  и  $h_+ = -h_- = h$ ) коэффициенты схемы приобретают вид

$$a_- = \frac{K(K + 1)}{2}, \quad a_0 = 1 - K^2, \quad a_+ = \frac{K(K - 1)}{2},$$

где  $K = c\tau/h$  — параметр Куранта, т. е. косая схема переходит в обычную схему Лакса–Вендроффа на равномерной сетке, устойчивую при условии  $K^2 \leq 1$ . Для классической схемы Лакса–Вендроффа средний коэффициент  $a_0$  неотрицателен, а крайние имеют разные знаки, в связи с чем схема не гарантирует сохранения монотонности. Легко проверить, что и в общем случае косой схемы при условии

$$-h_- \leq D \leq h_+, \quad (10)$$

коэффициентам схемы (9) присущи ровно те же свойства:  $a_0 \geq 0$ ,  $a_-a_+ \leq 0$ . Заметим также, что условие (10) является прямым обобщением условия Куранта (так как в случае прямого шаблона  $D = -c\tau$ ), и при его выполнении характеристика, проходящая через вершину шаблона, пересекает нижний слой в пределах основания шаблона ( $x - h_-$ ,  $x + h_+$ ), как для классической схемы.

Проведем гармонический анализ схемы. Для множителя возрастания гармоник имеем соотношение

$$\rho e^{i\alpha\omega} = 1 - a_-(1 - e^{-ih_-\omega}) - a_+(1 - e^{ih_+\omega}).$$

Выражая тригонометрические функции через синусы и косинусы половинных углов, после несложных преобразований получим

$$|\rho|^2 = 1 - 4a_-(1 - a_-) \sin^2 \psi_- - 4a_+(1 - a_+) \sin^2 \psi_+ - 8a_-a_+ \sin \psi_- \sin \psi_+ \cos(\psi_+ - \psi_-),$$

где  $\psi_+ = h_+\omega/2$ ,  $\psi_- = h_-\omega/2$ . Отсюда следует, что условие устойчивости  $|\rho|^2 \leq 1$  эквивалентно неравенству

$$a_-(1 - a_-) \sin^2 \psi_- + a_+(1 - a_+) \sin^2 \psi_+ + 2a_-a_+ \sin \psi_- \sin \psi_+ \cos(\psi_+ - \psi_-) \geq 0,$$

которое после подстановки в него коэффициентов (9) и сокращения на одинаковые положительные множители приобретает вид

$$A_- \sin^2 \psi_- + A_+ \sin^2 \psi_+ + 2A_0 \sin \psi_- \sin \psi_+ \cos(\psi_+ - \psi_-) \geq 0, \quad (11)$$

где

$$A_- = D(D - h_+ - h_-)h_+^2, \quad A_+ = D(D + h_+ + h_-)h_-^2, \quad A_0 = -D^2h_-h_+.$$

В общем случае исследование неравенства (11) затруднительно, и причиной является не косоугольный шаблон, а неравномерность сетки. Иначе говоря, при неравномерной сетке исследование неравенства так же проблематично, как и в случае прямого шаблона. Однако в предположении близости пространственных шагов  $h_{\pm} = h \pm \varepsilon$  главный член разложения левой части неравенства (11) по малому параметру  $\varepsilon$  имеет вид  $(A_- + A_+ + 2A_0) \sin^2 \psi$ , а коэффициенты приобретают вид

$$A_- = Dh^2(D - 2h), \quad A_+ = Dh^2(D + 2h), \quad A_0 = -D^2h^2,$$

и неравенство (11) в первом приближении оказывается истинным.

#### 4. Косая схема предиктор–корректор

Предположим, что косоугольный шаблон сетки задан координатами узлов  $x - h_-$ ,  $x$ ,  $x + h_+$  на нижнем слое и  $x + \alpha$  на верхнем. Введем промежуточный слой  $t + \tau/2$ , причем узлы сетки на нем  $x + \alpha_-$ ,  $x + \alpha_+$  определим так, чтобы они лежали на боковых сторонах треугольного шаблона схемы в целых шагах. Это означает, что

$$\alpha_- = \frac{\alpha - h_-}{2}, \quad \alpha_+ = \frac{\alpha + h_+}{2}.$$

На первом полушаге применим рассмотренную выше явную схему (2):

$$\begin{aligned} u^{n+1/2}(x + \alpha_-) &= u^n(x) + b_- \frac{u^n(x) - u^n(x - h_-)}{h_-}, & b_- &= \alpha_- - \frac{c\tau}{2}, \\ u^{n+1/2}(x + \alpha_+) &= u^n(x) + b_+ \frac{u^n(x + h_+) - u^n(x)}{h_+}, & b_+ &= \alpha_+ - \frac{c\tau}{2}, \end{aligned} \quad (12)$$

а на втором —

$$Lu^{n+1}(x + \alpha) = Lu^n(x) - b_0 \frac{u^{n+1/2}(x + \alpha_+) - u^{n+1/2}(x + \alpha_-)}{\alpha_+ - \alpha_-}, \quad (13)$$

где линейная комбинация

$$Lu^n = a_+ u^n(x + h_+) + a_0 u^n(x) + a_- u^n(x - h_-)$$

имеет неопределенные коэффициенты, параметр  $b_0$  также пока остается свободным.

Исключив промежуточный шаг из системы (12), (13) и требуя затем, чтобы схема в целых шагах аппроксимировала уравнение (1) со вторым порядком, получим систему уравнений для определения коэффициентов:

$$\begin{aligned} a_+ + a_0 + a_- &= 1, \\ h_+ a_+ - h_- a_- &= D + b_0, \\ h_+^2 a_+ + h_-^2 a_- &= D^2 + b_0(D + h_+ - h_-), \end{aligned} \quad (14)$$

из которой находим

$$\begin{aligned}
a_+ &= \frac{D(D + h_-) + b_0(D + h_+)}{h_+(h_+ + h_-)}, \\
a_- &= \frac{D(D - h_+) + b_0(D - h_-)}{h_-(h_+ + h_-)}, \\
a_0 &= 1 - a_- - a_+.
\end{aligned} \tag{15}$$

Ясно, что при частном значении  $b_0 = 0$  шаг предиктор (12) теряет смысл, поскольку в этом случае промежуточные значения не используются при вычислении окончательного выражения решения, а корректор (13) оказывается рассмотренным выше косым аналогом схемы Лакса–Вендроффа в целых шагах.

Возникает вопрос, нельзя ли выбрать свободный параметр  $b_0$  так, чтобы повысить порядок точности до третьего. Ответ на этот вопрос отрицательный. Для проверки данного утверждения удержим еще одно слагаемое в разложении невязки и дополним систему (14) уравнением

$$h_+^3 a_+ + h_-^3 a_- = D^3 + b_0(h_+^2 - h_+ h_- + h_-^2 + D(h_+ - h_-)),$$

которое является условием обращения в нуль следующего члена разложения погрешности. Подставим в него выражения коэффициентов  $a_+$ ,  $a_-$ , заданных формулами (15). После приведения подобных и сокращений получим вырожденное уравнение

$$0 b_0 = D(h_+ - D)(D + h_-)$$

с нулевым коэффициентом при неизвестной переменной  $b_0$ , в общем случае не имеющее решения. Исключения составляют тривиальные случаи  $D = -h_-$ ,  $D = 0$  и  $D = h_+$ , когда для любых  $b_0$  порядок точности бесконечен. Эти три случая реализуются, когда характеристика, проходящая через узел верхнего слоя, содержит также один из трех узлов шаблона нижнего слоя.

Возникает также вопрос, можно ли в корректоре (13) выбрать параметры так, чтобы линейная комбинация  $Lu^n$  содержала бы только одно центральное значение  $u^n(x)$ , как это имеет место в классической схеме Лакса–Вендроффа на равномерной сетке. Для этого, очевидно, крайние коэффициенты должны исчезнуть:  $a_+ = a_- = 0$ . Подставив нулевые значения  $a_+$ ,  $a_-$  в (15), приходим к системе двух уравнений:

$$b_0 = -D, \quad D(h_+ - h_-) = 0.$$

Если исключить тривиальный случай  $D = b_0 = 0$ , когда характеристика соединяет верхний узел шаблона с центральным узлом на нижнем слое, то остается лишь вариант равномерной сетки  $h_+ = h_-$ . Следовательно, наличие на шаге корректора (13) нетривиальной линейной комбинация  $Lu^n$  обусловлено неравномерностью сетки и присуще как традиционным схемам, так и схемам на косых шаблонах.

Таким образом, схема (12), (13) при любом параметре  $b_0$  аппроксимирует уравнение (1) со вторым порядком. При частном значении  $b_0 = \sigma\tau$  схема приобретает форму, знакомую по классической схеме предиктор–корректор на прямом шаблоне.

## 5. Схема предиктор–корректор в нелинейном случае

Прямое обобщение схемы (12), (13) при  $b_0 = \sigma\tau$  на случай нелинейного уравнения (4) дает схему:

$$\begin{aligned} u^{n+1/2}(x + \alpha_+) &= u^n(x) + \alpha_+ \Delta_+ u^n - \frac{\tau}{2} \Delta_+ \phi^n, & \Delta_+ v &= \frac{v(x + h_+) - v(x)}{h_+}, \\ u^{n+1/2}(x + \alpha_-) &= u^n(x) + \alpha_- \Delta_- u^n - \frac{\tau}{2} \Delta_- \phi^n, & \Delta_- v &= \frac{v(x) - v(x - h_-)}{h_-}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$u^{n+1}(x + \alpha) = Lu^n(x) - \tau \Delta \phi^{n+1/2}, \quad \Delta \phi = \frac{\phi(x + \alpha_+) - \phi(x + \alpha_-)}{\alpha_+ - \alpha_-}. \quad (17)$$

Однако, в отличие от частного случая равномерной сетки и прямого шаблона, в общем случае схема (16), (17) имеет погрешность аппроксимации не второго, а первого порядка. Докажем это утверждение.

С этой целью разложим выражения предиктора в окрестности  $(x, t)$  с точностью до членов третьего порядка малости:

$$\begin{aligned} u^{n+1/2}(x + \alpha_+) &= u + \alpha_+ \left( u_x + \frac{h_+}{2} u_{xx} \right) - \frac{\tau}{2} \left( \phi_x + \frac{h_+}{2} \phi_{xx} \right) + \dots, \\ u^{n-1/2}(x + \alpha_-) &= u + \alpha_- \left( u_x - \frac{h_-}{2} u_{xx} \right) - \frac{\tau}{2} \left( \phi_x - \frac{h_-}{2} \phi_{xx} \right) + \dots, \end{aligned}$$

а затем выполним разложение с той же точностью значений функций  $\phi$ :

$$\begin{aligned} \phi^{n+1/2}(x + \alpha_+) &= \phi + \left( \alpha_+ u_x - \frac{\tau}{2} \phi_x + \frac{h_+}{2} \left( \alpha_+ u_{xx} - \frac{\tau}{2} \phi_{xx} \right) \right) \phi_u + \frac{1}{2} \left( \alpha_+ u_x - \frac{\tau}{2} \phi_x \right)^2 \phi_{uu} + \dots, \\ \phi^{n+1/2}(x + \alpha_-) &= \phi + \left( \alpha_- u_x - \frac{\tau}{2} \phi_x - \frac{h_-}{2} \left( \alpha_- u_{xx} - \frac{\tau}{2} \phi_{xx} \right) \right) \phi_u + \frac{1}{2} \left( \alpha_- u_x - \frac{\tau}{2} \phi_x \right)^2 \phi_{uu} + \dots \end{aligned}$$

Отсюда следует разложение для разделенной разности, входящей в (17):

$$\Delta \phi^{n+1/2} = \left( u_x + \frac{\alpha + d}{2} u_{xx} - \frac{\tau}{2} \phi_{xx} \right) \phi_u + \left( \frac{2\alpha + d}{4} u_x - \frac{\tau}{2} \phi_x \right) \phi_{uu} + O(\tau^2 + h^2). \quad (18)$$

Далее, разлагая в ряд левую часть корректора (17) и линейную комбинацию  $Lu^n$ , а также учитывая разложение (18), дифференциальное следствие

$$(u_t + \phi_x)_t \equiv u_{tt} - \phi_{xx} \phi_u - \phi_{uu} u_x \phi_x \equiv 0$$

исходного уравнения (4) и очевидное тождество

$$\phi_{xx} \equiv (\phi_u u_x)_x \equiv \phi_u u_{xx} + \phi_{uu} u_x u_x,$$

вычислим невязку схемы (16), (17):

$$\begin{aligned} \psi &= (1 - a_+ - a_0 - a_-)u + (\alpha - h_+ a_+ + h_- a_-)u_x + \\ &\quad \frac{1}{2} \left( \alpha^2 - h_+^2 a_+ - h_-^2 a_- + \tau \frac{h_+ - h_-}{2} \phi_u \right) u_{xx} + \frac{\tau}{2} \left( \frac{h_+ - h_-}{2} - \alpha \right) \phi_{xx} + \dots \end{aligned} \quad (19)$$

Первые три слагаемые разложения невязки (19) удается обратить в нуль, выбрав коэффициенты линейной комбинации из однозначно разрешимой системы условий:



$$\begin{aligned}
a_+ + a_0 + a_- &= 1, \\
h_+ a_+ - h_- a_- &= \alpha, \\
h_+^2 a_+ + h_-^2 a_- &= \alpha^2 + \tau \frac{h_+ - h_-}{2} \phi_u.
\end{aligned} \tag{20}$$

Последнее же слагаемое невязки (19) в общем случае не равно нулю. Оно определяет вид главного члена разложения погрешности и свидетельствует о первом порядке аппроксимации схемы. Оно обращается в нуль лишь при уникальной связи между параметрами схемы  $\alpha = (h_+ - h_-)/2$ , которая геометрически означает симметричное расположение узла верхнего слоя относительно крайних узлов нижнего слоя:

$$x + \alpha = \frac{(x - h_-) + (x + h_+)}{2},$$

или же тогда, когда одновременно и сетка равномерна ( $h_- = h_+$ ), и шаблон прямой ( $\alpha = 0$ ).

Тем не менее повышение порядка до второго и в общем случае оказывается возможным. Для этого на шаге корректора требуется добавить поправочное слагаемое, аппроксимирующее главный член разложения погрешности с противоположным знаком. Уточненная таким способом форма корректора (17) имеет вид

$$u^{n+1}(x + \alpha) = Lu^n(x) - \tau \Delta \phi^{n+1/2} - \frac{\tau}{2} \left( \alpha - \frac{h_+ - h_-}{2} \right) \Lambda \phi^n, \tag{21}$$

где  $\Lambda$  — обычный трехточечный разностный аналог оператора двойного дифференцирования на неравномерной сетке. Схема (16), (21) аппроксимирует нелинейное уравнение переноса (4) со вторым порядком по обоим переменным.

## 6. Косая схема бегущего счета

Рассмотрим схему, имеющую по два узла на верхнем и на нижнем слое:

$$(1 - a)u^{n+1}(x + \alpha_0) + au^{n+1}(x + \alpha_1) = (1 - b)u^n(x) + bu^n(x + h). \tag{22}$$

Схема (22) обобщает на случай косого шаблона схемы с двумя узлами на каждом из слоев, когда  $\alpha_0 = 0$  и  $\alpha_1 = h$ . Будем считать, что при детализации сетки шаги по пространству и времени являются величинами одного порядка малости. Тогда невязку схемы можно представить в виде разложения

$$\psi = (A_1 - r - B_1)u_x + \frac{1}{2}(A_2 - 2rA_1 + r^2 - B_2)u_{xx} + O(\tau^3 + h^3), \tag{23}$$

где  $r = c\tau$ , а  $A_k$  и  $B_k$  — следующие линейные зависимости коэффициентов схемы:

$$A_k = (1 - a)\alpha_0^k + a\alpha_1^k, \quad B_k = bh^k, \quad k = 1, 2.$$

Условие аппроксимации с первым порядком имеет вид  $A_1 - B_1 = r$ , или

$$(1 - a)\alpha_0 + a\alpha_1 - bh = r. \tag{24}$$

Решение уравнения (24) зависит от одного свободного параметра. Если за свободный параметр принять коэффициент схемы  $b$ , тогда

$$a = \frac{r + bh - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_0}. \tag{25}$$

При этом ПДП схемы (22) определяется последним слагаемым невязки (23) и имеет вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} + c \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{(r - r_0)(r - r_1)}{2\tau} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

где

$$r_{0,1} = \frac{\alpha_1 + \alpha_0}{2} - bh \mp \sqrt{d}, \quad d = \left( \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{2} \right)^2 - \hat{h}^2, \quad \hat{h} = h\sqrt{b(1-b)}.$$

ПДП параболично, когда либо дискриминант  $d$  отрицателен, либо при положительном дискриминанте  $r = c\tau$  лежит вне отрезка  $[r_0, r_1]$ .

Очевидно, что разность  $\alpha_1 - \alpha_0$  — это локальное значение шага сетки на верхнем слое, а веса  $b$  и  $1 - b$  представляют собой доли левого и правого значения решения на нижнем слое в линейной комбинации правой части схемы (22). Геометрический смысл положительности дискриминанта состоит в том, что половина шага верхнего слоя больше, чем среднее геометрическое  $\hat{h}$  частей  $bh$  и  $(1 - b)h$  шага нижнего слоя. Среднее геометрическое  $\hat{h}$  может быть построено как длина перпендикуляра к временному слою из точки  $x + bh$  до точки окружности, построенной на  $h$  как на диаметре.

Из очевидного неравенства  $b(1 - b) \leq 1/4$  следует положительность дискриминанта в частном случае, когда шаг верхнего слоя больше шага нижнего слоя.

Следует заметить, что при приближении веса  $b$  от среднего значения  $b = 1/2$  к крайним  $b = 0$  и  $b = 1$  среднее геометрическое  $\hat{h}$  монотонно уменьшается от  $h/2$  до нуля, поэтому, начиная с некоторых значений  $b$ , дискриминант обязательно становится положительным, при этом условия параболичности ПДП приближаются к выше установленным условиям устойчивости чисто неявных схем на шаблоне “косой уголок”.

Еще одно свойство схемы (22) заключается в том, что если характеристика, исходящая из точки  $(x + bh, t)$ , пересекает верхний слой  $t + \tau$  в пределах верхней грани шаблона, т. е. между узлами  $x + \alpha_0$  и  $x + \alpha_1$ , то  $a \in (0, 1)$ , и оба коэффициента схемы на верхнем слое положительны. В противном случае эта характеристика пересекает одну из боковых граней шаблона и тогда  $a(1 - a) \leq 0$ .

При специальном значении веса

$$b = \frac{(r - \alpha_0)(r - \alpha_1)}{h(\alpha_1 + \alpha_0 - h - 2r)}$$

порядок аппроксимации схемы (22) повышается до второго. Отметим, что для схемы на шаблоне, имеющем по два узла на верхнем и нижнем слое, максимально возможный порядок по обоим переменным оказывается вторым независимо от того, является шаблон прямым или косым. В частном случае прямого шаблона ( $\alpha_0 = 0$ ,  $\alpha_1 = h$ ) второй порядок реализуется для известной схемы “прямоугольник” с симметрично осредненными разделенными разностями по времени и пространственной переменной.

## 7. Схема произвольного порядка аппроксимации

Аппроксимируем линейные уравнения переноса (1) двухслойной неявной схемой на косом шаблоне с произвольным числом узлов на каждом слое. В общем случае схема имеет вид

$$Au^{n+1} = Bu^n, \quad (26)$$

где операторы  $A$  и  $B$  определены на сетках  $x^{n+1}$  и  $x^n$  соответственно:

$$Au_i^{n+1} = \sum_{j=0}^J a_j u(x_{i+j}^{n+1}, t + \tau), \quad Bu_i^n = \sum_{q=0}^Q b_q u(x_{i+q}^n, t),$$

$t$  и  $t + \tau$  — значения времени на нижнем и верхнем слоях, шаблон схемы имеет  $J + 1$  узлов на верхнем слое и  $Q + 1$  узлов на нижнем, а коэффициенты схемы  $a_j$  ( $j = 0, \dots, J$ ) и  $b_q$  ( $q = 0, \dots, Q$ ) определяются условиями аппроксимации уравнения переноса с заданным порядком.

Зафиксируем произвольно внутренний узел сетки нижнего слоя  $x = x_i^n$ , запишем в нем схему и обозначим через  $\beta_j$  и  $\alpha_q$  местные координаты узлов шаблона (смещения относительно  $x$ ):

$$x_{i+q}^n = x + \beta_q \quad (q = 0, \dots, Q); \quad x_{i+j}^{n+1} = x + \alpha_j \quad (j = 0, \dots, J).$$

Сетки считаются заданными, поэтому смещения  $\alpha_j$  и  $\beta_q$  представляют собой известные величины, при этом  $\beta_0 = 0$  ввиду выбора точки  $x$ .

Предположим, что имеет место естественный для гиперболического случая предельный переход  $\tau = O(h)$  при стремлении шагов сетки к нулю, где  $h$  — глобальная норма пространственного шага. Значения смещений также имеют порядок нормы шага. Невязка схемы на решениях уравнения (1) имеет вид

$$\psi = \sum_{j=0}^J a_j U(x + \alpha_j, t + \tau) - \sum_{q=0}^Q b_q U(x + \beta_q, t).$$

Разложим ее в ряд Тейлора в окрестности точки  $(x, t)$ , удерживая слагаемые до порядка  $L$ , и воспользуемся следствиями дифференциального уравнения, выражая старшие производные по времени через производные по  $x$ . В результате получим

$$\psi \simeq \sum_{l=0}^L \frac{(-r)^l}{l!} \left( \sum_{k=0}^{L-l} \frac{A_k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial x^k} \right) \frac{\partial^l U}{\partial x^l} - \sum_{l=0}^L \frac{B_l}{l!} \frac{\partial^l U}{\partial x^l},$$

где

$$r = c\tau, \quad A_l = \sum_j a_j \alpha_j^l, \quad B_l = \sum_q b_q \beta_q^l, \quad l = 0, 1, \dots, L.$$

Задавая естественное условие нормировки  $A_0 = 1$  и приводя подобные, получим систему условий аппроксимации с погрешностью  $O(h^L + \tau^L)$ :

$$A_0 = 1, \quad \sum_{k=0}^l C_l^k (-r)^k A_{l-k} - B_l = 0, \quad C_l^k = \frac{l!}{k!(l-k)!}, \quad l = 0, \dots, L. \quad (27)$$

Так как  $A_l, B_l$  ( $l = 0, \dots, L$ ) выражаются линейно через искомые коэффициенты, то условия (27) представляют собой систему  $(L + 2)$  линейных алгебраических уравнений относительно  $J + Q + 2$  неизвестных  $a_j, b_q$ . Отсюда следует, что максимально возможный порядок аппроксимации по обоим переменным на рассматриваемом шаблоне равен  $L = J + Q$ , т. е. он на две единицы меньше общего числа узлов двухслойного шаблона. Таким образом, несмотря на то, что в общем случае сетки не только не равномерны, но и различны на разных слоях, максимально возможный порядок аппроксимации тот же, что и для прямых шаблонов при равномерных сетках [9].

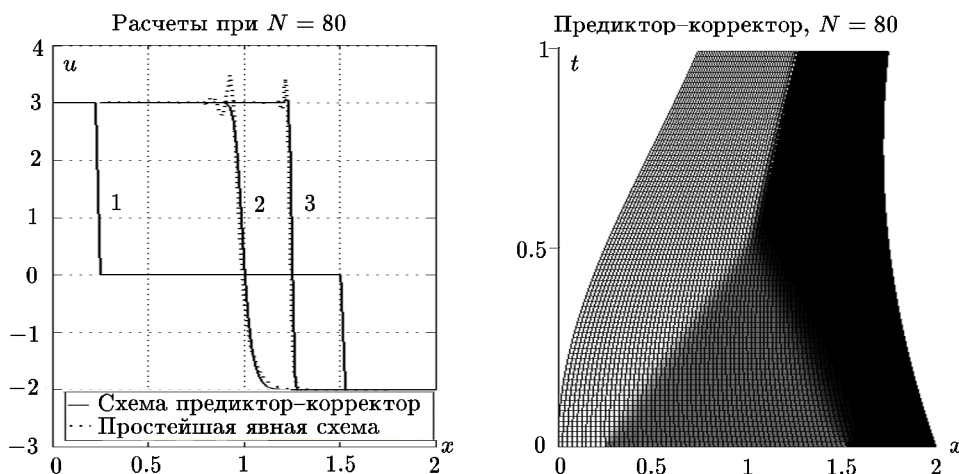
Следует заметить, что все рассмотренные выше примеры схем для линейного уравнения переноса являются частными случаями схемы (26), (27) произвольного порядка аппроксимации.

## 8. Результаты численных экспериментов

В качестве теста для решения нелинейного уравнения переноса (4) в промежутке времени  $0 < t < 1$  рассчитано взаимодействие двух ударных волн в области с подвижными границами  $x_0(t) = 0.5(1 - \cos(2\pi t/3))$ ,  $x_1(t) = 2 + 0.5t(t - 3/2)$ . Начальная функция кусочно-постоянная со значениями: 3, 0 и  $-2$  имеет разрывы при  $x = 0.25$  и  $x = 1.25$ . Точное решение представляет собой две ступеньки, которые перемещаются навстречу друг другу со скоростями 1.5 и  $-1$ , соединяясь в точке  $x = 1$  в момент времени  $t = 0.5$  в одну ступеньку, движущуюся далее со скоростью 0.5. Расчеты проводились по простейшей явной схеме (5) и схеме предиктор–корректор (16), (21) на начальной сетке  $20 \times 48$  с последующим дроблением шагов по обоим переменным вдвое.

Известно, что классическая явная схема “уголок” для данной задачи была бы вообще неприемлема в однородном виде (без применения противотоковой ориентации) или без искусственной вязкости, так как в ней параметр Куранта меняет знак. Косая схема предиктор–корректор так же, как ее прямой аналог, тоже не является диссипативной, поэтому в случае разрывных решений требует введения искусственной вязкости, прямого сглаживания или модификации с использованием “приподнятого” промежуточного слоя. По этим причинам в расчетах для обеих исследуемых схем проводилось стандартное сглаживание по трем соседним узлам, эквивалентное введению некоторой искусственной вязкости.

В левой половине рисунка 1 изображены расчетные профили решений в начальный момент (ступенчатая функция 1), в момент встречи двух ударных волн (кривая 2) и в конечный момент времени (кривая 3), полученные на сетке с 80 шагами по  $x$ . Имеет место хорошее совпадение положения скачков с точными значениями. Вблизи разрывов имеются осцилляции, довольно слабые для схемы предиктор–корректор и более заметные для простейшей явной схемы. Представление об очертании расчетной области и конфигурации разрывов дает правая половина рисунка 1. Расчетная конфигурация взаимодействия ударных волн хорошо согласуется с точной картиной.



**Рис. 1.** Профили решения в разные моменты (слева) и численное решение  $u_i^n = u(x_i^n, t^n)$  (вид сверху) в области расчета (справа)

На рис. 2 представлено в виде поверхности численное решение  $u_i^n = u(x_i^n, t^n)$  на сетке с 20 шагами по  $x$ . На рис. 3 в несколько ином ракурсе изображено решение, полученное на сетке с 40 шагами. В верхней части поверхностей видны осциллирующие возмущения

за фронтом ударной волны, более заметные в расчетах по простейшей явной схеме, чем по схеме предиктор–корректор.

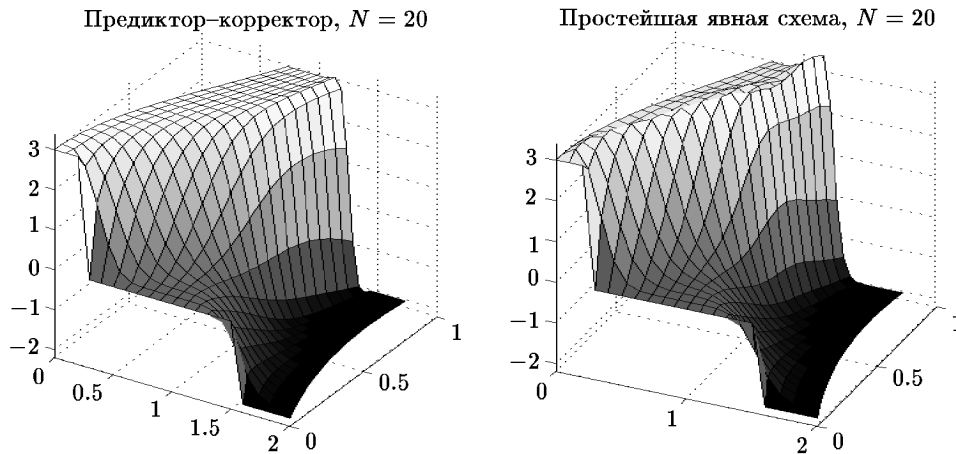


Рис. 2. Результаты расчетов по двум схемам на грубой сетке

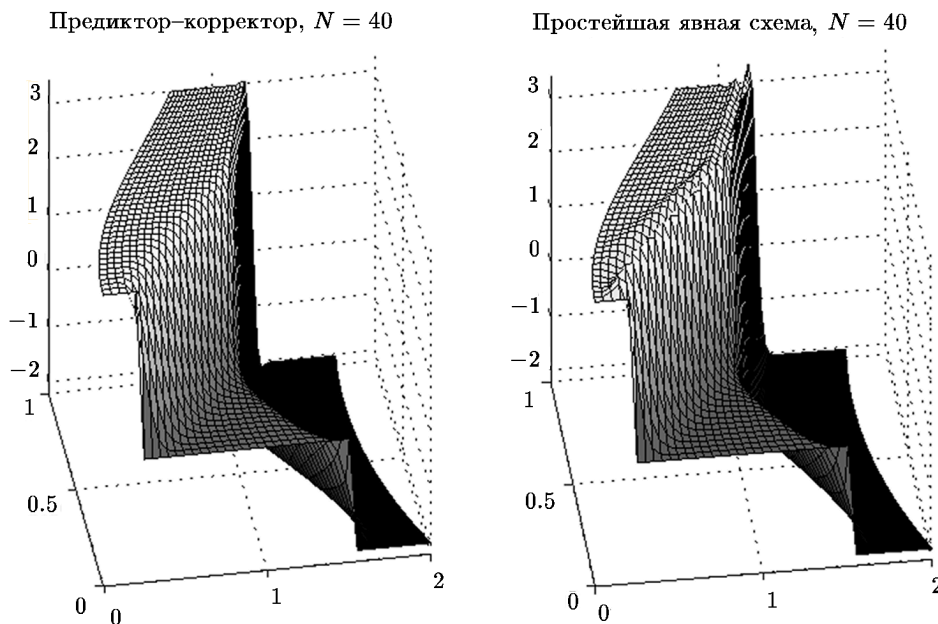


Рис. 3. Результаты расчета на более детальной сетке

## Заключение

Таким образом, на модельном примере простейшего гиперболического уравнения построены и изучены разностные схемы на косых шаблонах различных конфигураций. Показано, что максимально возможный порядок аппроксимации схем в случае постоянных коэффициентов зависит только от числа узлов в шаблоне, но не зависит от того, шаблон схемы косой или прямой, равномерна сетка или не равномерна. Сформулированы условия параболичности ПДП для косых схем, необходимые условия их спектральной устойчивости по Нейману и геометрические интерпретации устойчивости в форме

ограничений на расположение узлов шаблона относительно положения характеристик. Показано, что полученные критерии устойчивости переходят в соответствующие классические условия, когда сетки верхнего и нижнего слоя совмещаются, т. е. когда косою шаблон превращается в обычный прямой. Построены обобщения схем на косых шаблонах на случай квазилинейного уравнения и проведены численные эксперименты, демонстрирующие их приемлемость для удовлетворительных расчетов задач с разрывами.

## Литература

1. **Thompson J.F.** Grid generation techniques in computational fluid dynamics // AIAA Journal. — 1984. — Vol. 22, № 11. — P. 1505–1523.
2. **Rai M.M., Anderson D.A.** Application of adaptive grids to fluid-flow problems with asymptotic solutions // AIAA Journal. — 1982. — Vol. 20, № 4. — P. 496–502.
3. **Dwyer H.A.** Grid adaptive for problem in fluid dynamics // AIAA Journal. — 1984. — Vol. 22, № 12. — P. 1705–1712.
4. **Лисейкин В.Д.** Обзор методов построения структурированных адаптивных сеток // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1996. — Т. 36, № 1. — С. 3–41.
5. **Хакимзянов Г.С., Шокина Н.Ю.** Метод эквираспределения для построения адаптивных сеток // Вычисл. технологии. — 1998. — Т. 3, № 6. — С. 63–81.
6. **Paasonen V.I.** Компактные схемы третьего порядка точности на неравномерных адаптивных сетках // Вычисл. технологии. — 2015. — Т. 20, № 2. — С. 56–64.
7. **Paasonen V.I.** The compact schemes for system of second-order equations without mixed derivatives // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 1998. — Vol. 13, № 4. — P. 335–344.
8. **Шокин Ю.И.** О методе первого дифференциального приближения в теории разностных схем для гиперболических систем уравнений // Тр. МИАН СССР. — 1973. — Т. 122. — С. 66–84.
9. **Paasonen V.I.** Диссипативные неявные схемы с псевдовязкостью высших порядков для гиперболических систем уравнений // Числ. методы мех. сплош. среды. — Новосибирск, 1973. — Т. 4, № 4. — С. 44–57.

*Поступила в редакцию 12 апреля 2017 г.,  
в окончательном варианте 13 июня 2017 г.*

## Литература в транслитерации

1. **Thompson J.F.** Grid generation techniques in computational fluid dynamics // AIAA Journal. — 1984. — Vol. 22, № 11. — P. 1505–1523.
2. **Rai M.M., Anderson D.A.** Application of adaptive grids to fluid-flow problems with asymptotic solutions // AIAA Journal. — 1982. — Vol. 20, № 4. — P. 496–502.
3. **Dwyer H.A.** Grid adaptive for problem in fluid dynamics // AIAA Journal. — 1984. — Vol. 22, № 12. — P. 1705–1712.
4. **Liseykin V.D.** Obzor metodov postroeniya strukturirovannykh adaptivnykh setok // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1996. — Т. 36, № 1. — С. 3–41.
5. **Hakimzyanov G.S., Shokina N.Yu.** Metod ekviraspredeleniya dlya postroeniya adaptivnykh setok // Vychisl. tekhnologii. — 1998. — Т. 3, № 6. — С. 63–81.
6. **Paasonen V.I.** Kompaktnye skhemy tret'ego poryadka tochnosti na neravnomernykh adaptivnykh setkah // Vychisl. tekhnologii. — 2015. — Т. 20, № 2. — С. 56–64.

7. **Paasonen V.I.** The compact schemes for system of second-order equations without mixed derivatives // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 1998. — Vol. 13, № 4. — P. 335–344.
8. **Shokin Yu.I.** O metode pervogo differentsial'nogo priblizheniya v teorii raznostnyh skhem dlya giperbolicheskikh sistem uravneniy // Tr. MIAN SSSR. — 1973. — T. 122. — S. 66–84.
9. **Paasonen V.I.** Dissipativnye neyavnye skhemy s psevdovyazkost'yu vysshih poryadkov dlya giperbolicheskikh sistem uravneniy // Chisl. metody mekh. splosh. sredy. — Novosibirsk, 1973. — T. 4, № 4. — S. 44–57.

